MATHEMATISCHE ANNALEN

132. BAND

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN — DAVID HILBERT

OTTO BLUMENTHAL — ERICH HECKE

132. BAND

SPRINGER-VERLAG

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1956/57

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg
Printed in Germany

Inhalt des 132. Bandes

(In alphabetischer Ordnung)

Leichtweiss, K.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 1—16 (1956)

Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie

II. Existenz und Eindeutigkeit spezieller Mannigfaltigkeiten

Von

Kurt Leichtweiss in Freiburg i. Br.

In einer früheren Abhandlung[1]) wurde unter Benutzung einer auf Reduktion der Integrierbarkeitsbedingungen von partiellen Differentialgleichungen beruhenden Methode die isometrische Einbettung und Verbiegung von Mannigfaltigkeiten mit (analytischer) Riemannscher Metrik untersucht. Mit Hilfe dieser Methode gelingt es nun auch, die Existenz und die Eindeutigkeit spezieller, in einen gewissen Raum eingebetteter Mannigfaltigkeiten nachzuweisen, so wie z. B. H. A. Schwarz 1874 die Existenz und Eindeutigkeit einer Minimalfläche durch einen vorgegebenen Streifen zeigen konnte. Es ergibt sich zunächst in Verallgemeinerung des angeführten Resultats von Schwarz, daß durch einen vorgegebenen Anfangsstreifen des n-dimensionalen Riemannschen Raums genau eine m-dimensionale Minimalmannigfaltigkeit geht (Korollar zu Satz 7). Außerdem läßt sich die Existenz von m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen affinen Raum nachweisen, welche Verallgemeinerungen nichttrivialer, d. h. nicht kegel- oder zylinderartiger Torsen darstellen (Satz 9).

Wir verwenden die Bezeichnungsweise und die Hilfssätze aus I; einige der angeführten Gleichungsnummern stammen ebenfalls aus I.

§ 5. Das Problem von Björling für Minimalmannigfaltigkeiten

Wir wenden uns jetzt der Erörterung des Problems von Cauchy für m-dimensionale, analytische Minimalmannigfaltigkeiten M_m in einem n-dimensionalen Riemannschen Raum mit analytischer Metrik R_n zu. Ziel dieses Paragraphen ist es, die bekannte Lösung des Problems von E. Björling zu verallgemeinern, welche besagt: Durch jeden analytischen Streifen geht genau eine analytische Minimalfläche des dreidimensionalen euklidischen Raums. Nun ist eine Minimalmannigfaltigkeit $x^i(u^\alpha)$ bekanntlich durch das Verschwinden ihres Vektors der mittleren Krümmung

$$h^i \equiv \sum_{\lambda=m+1}^{n} \left(g^{ab} \underset{\lambda}{A}_{ab}\right) \underset{\lambda}{\eta}^i \tag{5.1}$$

[1]) K. Leichtweiss: „Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. I. Zur isometrischen Einbettung und Verbiegung von Riemannschen Räumen". Math. Ann. 130, 442 (1956); diese Arbeit werde im folgenden mit I bezeichnet.

charakterisiert[2]). Wir können wegen (5.1) die gegenüber Koordinatentransformationen von V_m und R_n invarianten Größen

$$g^{ab}\underset{\lambda}{A}_{ab} \quad (m+1 \leq \lambda \leq n)$$

jeder beliebigen m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit V_m des R_n als relative Komponenten des stets auf V_m orthogonalen Vektors h^i ansprechen. Diese sind aber nicht wie die Komponenten h^i (in bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem (x^i) des R_n) eindeutig definiert, sondern hängen von der Wahl der Basis $\left(\underset{\lambda}{\eta}^i\right)$ des Normalenraums der V_m ab.

Wir können aber nach dem beim Beweis von Satz 2 Gesagten die Normalvektoren $\underset{\lambda}{\eta}^i$ dadurch eindeutig auf der V_m festlegen, daß wir diese etwa auf dem Streifen $u^m = 0$ als irgendwie fest gegeben annehmen und die Bedingung

$$\underset{\lambda\mu}{T}_m(u^a) = 0$$

vorschreiben. Wir bezeichnen jetzt die sich auf diese durch den Streifen normierten Normalvektoren beziehenden relativen Komponenten von h^i als normierte relative Komponenten und bewiesen in Verallgemeinerung des Problems von BJÖRLING:

Satz 7.

Vor.: Γ sei ein durch $x^i(p^{\bar a})$ und $\underset{\lambda}{\eta}^i(p^{\bar a})$ mit

$$x^i(0) = 0, \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar a}}\right) = m-1, \ g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar a}}\underset{\lambda}{\eta}^j = 0, \ g_{ij}\underset{\lambda}{\eta}^i\underset{\mu}{\eta}^j = \delta^\mu_\lambda \tag{5.2}$$
$$(1 \leq \bar a \leq m-1, \ m+1 \leq \lambda, \mu \leq n, \ m < n)$$

gegebener, im Nullpunkt analytischer Streifen des R_n, und $\underset{\lambda}{\varphi}(p^a)$ seien $n-m$ im Nullpunkt analytische, sonst aber beliebige Funktionen.

Beh.: Dann existiert in der Umgebung des Nullpunkts von R_n genau eine durch $x^i(p^a)$ gegebene, im Nullpunkt analytische Mannigfaltigkeit V_m, welche für $p^m = 0$ orientiert durch Γ geht und folgende Eigenschaften besitzt: Die p^a sind auf Γ bezogene, geodätische Parallelkoordinaten, und die durch Γ normierten relativen Komponenten des Vektors der mittleren Krümmung der V_m besitzen die vorgeschriebenen Werte $\underset{\lambda}{\varphi}(p^a)$.

Beweis: Zunächst bestimmt sich $\frac{\partial x^i}{\partial p^m}(p^{\bar a})$ eindeutig aus den gegebenen Größen von Γ durch die Gleichungen

$$g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar a}}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial p^m} = g_{\bar a m} = 0, \ g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial p^m}\frac{\partial x^j}{\partial p^m} = g_{mm} = 1, \ g_{ij}\underset{\lambda}{\eta}^i\frac{\partial x^j}{\partial p^m} = 0 \tag{5.3}$$
$$(1 \leq \bar a \leq m-1, \ m+1 \leq \lambda \leq n)$$

und die Orientierungsforderung

$$\left\| \frac{\partial x^i}{\partial p^1}(0), \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial p^m}(0), \underset{m+1}{\eta}^i(0), \ldots, \underset{n}{\eta}^i(0) \right\| > 0$$

als analytische Funktion der $p^{\bar a}$, da Rang $\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar a}}, \underset{\lambda}{\eta}^i\right) = n-1$ ist. Damit

[2]) Siehe [1], S. 178; die hier benutzte Schreibweise stammt aus § 3.

erhalten wir:

$$g_{\bar a \bar b}(p^{\bar c}, 0) = g_{ij}(x^r(p^{\bar c}))\,\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar a}}(p^{\bar c})\,\frac{\partial x^j}{\partial p^{\bar b}}(p^{\bar c}) \tag{5.4}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\bar a \bar b}}{\partial p^m}(p^{\bar c}, 0) &= \\ &= -2\,g_{ij}(x^r(p^{\bar c}))\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial p^{\bar a}\,\partial p^{\bar b}}(p^{\bar c}) + \Gamma^i_{kl}(x^r(p^{\bar c}))\,\frac{\partial x^k}{\partial p^{\bar a}}(p^{\bar c})\,\frac{\partial x^l}{\partial p^{\bar b}}(p^{\bar c})\right)\frac{\partial x^j}{\partial p^m}(p^c)\end{aligned} \tag{5.5}$$

(nach 3.10!), sowie wegen (3.23):

$$\begin{aligned}\underset{\lambda}{A}_{\bar a \bar b}(p^{\bar c}) &= g_{ij}(x^r(p^{\bar c}))\,\frac{D}{D\,p^{\bar b}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar a}}\right)(p^{\bar c})\,\underset{\lambda}{\eta}^j(p^{\bar c})\\ \underset{\lambda\mu}{T}_{\bar b}(p^{\bar c}) &= g_{ij}(x^r(p^{\bar c}))\,\frac{D\,\underset{\lambda}{n}^i}{D\,p^{\bar b}}(p^{\bar c})\,\underset{\mu}{n}^j(p^{\bar c})\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$(1 \leq r \leq n,\ 1 \leq \bar a, \bar b \leq m-1,\ m+1 \leq \lambda, \mu \leq n).$$

Nun lauten unsere Bedingungsgleichungen für die gesuchte V_m:

$$g_{a m}(p^c) = \delta^m_a, \tag{5.7}$$

$$\underset{\lambda\mu}{T}\,m(p^c) = 0 \tag{5.8}$$

und

$$g^{ab}(p^c)\,\underset{\lambda}{A}_{ab}(p^c) = \underset{\lambda}{\varphi}(p^c). \tag{5.9}$$

Diese Gleichungen sind nämlich mit den in der Behauptung geforderten Eigenschaften für die V_m identisch.

Um die Existenz einer derartigen V_m zu beweisen, lösen wir (5.9) nach $\underset{\lambda}{A}_{mm}$ auf und erhalten wegen der aus (5.7) folgenden Beziehungen $g^{am} = \delta^m_a$:

$$\underset{\lambda}{A}_{mm} = \underset{\lambda}{\varphi} - \sum_{\bar a, \bar b = 1}^{m-1} \underset{\lambda}{A}_{\bar a \bar b}\, g^{\bar a \bar b} \tag{5.10}$$

Setzen wir dies, (5.7) und (5.8) in die Differentialgleichungen

$$\mathfrak{L}_{m\bar a \bar b m} = 0,\ \underset{\lambda}{\mathfrak{M}}_{\bar a \bar b m} = 0,\ \underset{\lambda\mu}{\mathfrak{N}}_{\bar b m} = 0\ ^{3)}$$

$$(1 \leq \bar b \leq \bar a \leq m-1,\ a \geq \bar b,\ m+1 \leq \mu < \lambda \leq n)$$

ein, so können wir die so entstehenden Gleichungen in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g_{\bar a \bar b}}{(\partial p^m)^2} &= \frac{1}{\|g_{\bar c \bar d}\|}\,\Psi_1\left(g_{\bar c \bar d}, \frac{\partial g_{\bar c \bar d}}{\partial p^b}, \underset{\mu}{A}_{e\bar f}, R_{ijkl}(x^r), x^s_c, \underset{\chi}{\varphi}(p^d)\right)\\ \frac{\partial \underset{\lambda}{A}_{a\bar b}}{\partial p^m} &= \frac{1}{(\|g_{\bar c \bar d}\|)^2}\,\Psi_2\Bigg(g_{\bar c \bar d}, \frac{\partial g_{\bar c \bar d}}{\partial' p^b}, \underset{\mu}{A}_{e\bar f}, \frac{\partial \underset{\mu}{A}_{e\bar f}}{\partial p_{\bar b}}, \underset{\lambda\nu}{T}_{\bar b}, R_{ijkl}(x^r), x^s_e, \underset{\lambda}{\eta}^t,\\ &\qquad \underset{\chi}{\varphi}(p^d), \frac{\partial \underset{\chi}{\varphi}}{\partial p_{\bar b}}(p^d)\Bigg)\\ \frac{\partial \underset{\lambda\mu}{T}_{\bar b}}{\partial p^m} &= \frac{1}{\|g_{\bar c \bar d}\|}\,\Psi_3\left(g_{\bar c \bar d}; \frac{\partial g_{\bar c \bar d}}{\partial p^b}, \underset{\nu}{A}_{e\bar f}, \underset{\lambda\nu}{T}_{\bar b}, \underset{\mu\nu}{T}_{\bar b}, R_{ijkl}(x^r), x^s_c, \underset{\mu}{n}^t, \underset{\lambda}{\eta}^t, \underset{\chi}{\varphi}(p^d)\right),\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$(1 \leq \bar a, \bar b, \bar c, \bar d, \bar f \leq m-1;\ \bar a \geq \bar b, a \geq \bar b, 1 \leq i, j, k, l, r, s, t \leq n;$$
$$m+1 \leq \lambda, \mu, \nu, \chi \leq n; \lambda > \mu),$$

---

[3]) Die in diesen Gleichungen auftretenden Ausdrücke sind in § 3 (3.27) erklärt.

wobei Ψ_1, Ψ_2 und Ψ_3 ganze rationale Funktionen der angegebenen Argumente sind. Außerdem erhalten wir aus den Ableitungsgleichungen (3.23) durch Einsetzung von (5.7), (5.8) und (5.10):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x^i}{\partial p^m} = \Psi_4\,(x^i_m)\\
(5.12)\quad &\frac{\partial x^i_a}{\partial p^m} = \frac{1}{\|g_{\bar c\bar d}\|}\,\Psi_5\left(g_{\bar c\bar d}, \frac{\partial g_{\bar c\bar d}}{\partial p^b}, \underset{\lambda}{A}_{e\bar f}, \Gamma^k_{ij}\,(x^l), x^s_c, \underset{\mu}{n}^t, \underset{\chi}{\varphi}\,(p^d)\right)\\
&\frac{\partial \underset{\lambda}{\eta}^i}{\partial p^m} = \frac{1}{\|g_{\bar c\bar d}\|}\,\Psi_6\left(g_{\bar c\bar d}, \underset{\lambda}{A}_{e\bar f}, \Gamma^k_{ij}\,(x^l), x^s_c, \underset{\mu}{n}^t, \underset{\chi}{\varphi}\,(p^d)\right)
\end{aligned}$$

(Ψ_4, Ψ_5, Ψ_6 = ganz rational; $1 \leqq \bar c, \bar d, \bar f \leqq m-1$; $1 \leqq i, j, k, l, s, t \leqq n$;
$m+1 \leqq \lambda, \mu, \chi \leqq n$).

Das aus (5.11) und (5.12) gebildete Gleichungssystem hat die Normalform des Satzes von CAUCHY-KOWALEWSKI, wenn wir die in ihm auftretenden Argumente $g_{\bar c\bar d}$, $\underset{\lambda}{A}_{e\bar f}$ und $\underset{\lambda\nu}{T}_{\bar b}$ mittels

$$(5.13)\qquad g_{\bar c\bar d} = g_{\bar d\bar c}, \quad \underset{\lambda}{A}_{e\bar f} = \underset{\lambda}{A}_{\bar f e}, \quad \underset{\lambda\nu}{T}_{\bar b} = -\underset{\nu\lambda}{T}_{\bar b}$$

auf die Argumente $g_{\bar c\bar d}$ ($\bar c \geqq \bar d$), $\underset{\lambda}{A}_{e\bar f}$ ($e \geqq \bar f$) und $\underset{\lambda\nu}{T}_{\bar b}$ ($\lambda > \nu$) reduzieren und beachten, daß die Funktionen $\Gamma^k_{ij}(x^l)$, $R_{ijkl}(x^r)$ und $\underset{\lambda}{\varphi}(p^d)$ sämtlich im Nullpunkt analytisch sind und daß $\|g_{\bar c\bar d}\|\,(0) \neq 0$ gilt. Es besitzt genau eine im Nullpunkt analytische Lösung $\mathring{g}_{\bar a\bar b}$, $\underset{\lambda}{\mathring{A}}_{a\bar b}$, $\underset{\lambda\mu}{\mathring{T}}_{\bar b}$, $\mathring{x}^i$, $\mathring{x}^i_a$, $\underset{\lambda}{\mathring{\eta}}^i$ ($\bar a \geqq \bar b$, $a \geqq \bar b$, $\lambda > \mu$), welche für $p^m = 0$ die durch (5.4), (5.5), (5.6) und $x^i(p^{\bar a})$, $\frac{\partial x^i}{\partial p^a}(p^{\bar a})$, $\underset{\lambda}{\eta}^i(p^{\bar a})$ gegebenen, im Nullpunkt von den $p^{\bar a}$ analytisch abhängenden Anfangswerte annimmt. Vervollständigen wir jetzt diese Lösungsfunktionen durch (5.13), (5.7), (5.10) und (5.8), so gilt für die aus ihnen nach (3.27) und (3.23) gebildeten Ausdrücke $\mathring{\mathfrak{L}}_{abcd}$, $\underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{M}}}_{abc}$, $\underset{\lambda\mu}{\mathring{\mathfrak{N}}}_{ab}$, $\underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_a$:

$$(5.14)\qquad \mathring{\mathfrak{L}}_{m\bar a\bar b m}(p^c) = 0,\ \underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{M}}}_{a\bar b m}(p^c) = 0,\ \underset{\lambda\mu}{\mathring{\mathfrak{N}}}_{\bar b m}(p^c) = 0,\ \underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_m(p^c) = 0$$
$$(\bar a \geqq \bar b,\ a \geqq \bar b,\ \lambda > \mu).$$

Weiter folgt aus (5.4), (5.3) und (5.2) zusammen mit den Anfangsbedingungen unserer Lösung

$$(5.15)\qquad \underset{\delta}{\mathring{\mathfrak{B}}}(p^1, \ldots, p^{m-1}, 0) = 0.$$

Ebenso ergibt sich wegen (5.5) und (5.6)

$$(5.16)\qquad \underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_{\bar a}\,(p^1, \ldots, p^{m-1}, 0) = 0.$$

Nun können wir wie beim Beweis von Satz 1 aus (5.14), (5.15) und (5.16) mittels Hilfssatz 2 von § 2 auf

$$\underset{\delta}{\mathring{\mathfrak{B}}}(p^c) = 0 \text{ und } \underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_a(p^c) = 0$$

schließen. Hieraus ergibt sich dann sofort, daß $\mathring{g}_{ab}$ Maßtensor, $\underset{\lambda}{\mathring{\eta}}^i$ ein Normalvektor und $\mathring{g}^{ab}\underset{\lambda}{\mathring{A}}_{ab}$ eine normierte, relative Komponente des Vektors der

mittleren Krümmung der Mannigfaltigkeit $x^i = \mathring{x}^i(p^a)$ ist. Damit sind für diese Mannigfaltigkeit alle Bedingungen der Behauptung von Satz 7 erfüllt. Endlich sieht man leicht ein, daß umgekehrt für jede diesen Bedingungen genügende Mannigfaltigkeit $x^i(p^a)$ die Funktionen $x^i(p^a)$ zusammen mit den anderen Funktionen Lösung des Systems der Gln. (5.11) und (5.12) unter denselben Anfangsbedingungen sind, daß sie also nach (I) eindeutig bestimmt sind[4]), so daß auch nur eine einzige der in Frage kommenden Mannigfaltigkeiten existieren kann; w.z.b.w.

Aus Satz 7 ergibt sich im Falle einer Minimalmannigfaltigkeit $(\underset{\lambda}{\varphi}(p^c) = 0)$ sofort das

Korollar: *Durch einen beliebigen, analytischen „$(m-1)$-dimensionalen" Streifen des Riemannschen Raums $R_n (n > m)$ geht genau eine analytische, m-dimensionale Minimalmannigfaltigkeit.*

Es stellt eine direkte Verallgemeinerung der bekannten Lösung von H. A. Schwarz für das Björlingsche Problem dar. Im Falle $n = m + 1$ kann man aus dem Korollar den ebenfalls von Schwarz stammenden Schluß ziehen, daß eine analytische, m-dimensionale Minimalhyperfläche des euklidischen Raums, die einen $(m-1)$-dimensionalen linearen Raum enthält, durch eine Halbdrehung um diesen Raum in sich selbst übergeht. Ebenso erkennt man, daß eine analytische Minimalhyperfläche M_m in bezug auf eine Hyperebene symmetrisch ist, wenn die Normale von M_m in allen Punkten des $(m-1)$-dimensionalen Schnitts dieser Hyperebene mit der M_m in der Hyperebene liegt.

§ 6. Existenz- und Eindeutigkeitssätze von Torsen

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung unserer Integrationstheorie bilden diejenigen Mannigfaltigkeiten besonderer Art, welche im folgenden „Torsen" genannt werden sollen. Ihre genaue Definition wurde von Atanasjan [1] gegeben; sie ist natürlich eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Definition einer zweidimensionalen Torse im dreidimensionalen euklidischen Raum und lautet folgendermaßen: *Eine m-dimensionale (zweimal stetig differenzierbare) Mannigfaltigkeit im n-dimensionalen affinen Raum A_n heißt p-Torse, wenn ihre Tangentialräume nur von genau p-Parametern abhängen* $(0 \leq p < m)$, oder noch etwas präzisiert: Eine m-dimensionale p-Torse T_m^p im A_n ist eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{x}(u^a)$, welche aus derartigen ∞^p $(m-p)$- aber nicht höherdimensionalen, etwa durch $u^1 = \text{const}, \ldots, u^p = \text{const}$ gegebenen Erzeugenden V_{m-p} besteht, daß in den Punkten der V_{m-p} die Tangentialräume der T_m^p alle dieselben sind.

Wir können nun einen Tangentialraum der T_m^p in der Form

$$\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r)\,\mathfrak{y} = h_\lambda(u^r)\ ^{5)} \quad (r = 1, 2, \ldots, p;\ \lambda = m+1, \ldots, n) \tag{6.1}$$

darstellen, wobei die Vektoren $\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}$ alle linear unabhängig sind und nur von

---

[4]) Siehe dazu § 2.

[5]) Wir bedienen uns hier der im affinen Raum nicht ganz stilechten, aber für unsere Zwecke bequemen Schreibweise des inneren Produkts.

den angegebenen Argumenten einmal stetig differenzierbar abhängen. Aus (6.1) folgt speziell

$$\text{(6.2)} \qquad \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r)\,\mathfrak{x}(u^a) = h_\lambda(u^r),$$

was nach u^s differenziert wegen $\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}\,\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^s} = 0$:

$$\text{(6.3)} \qquad \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}(u^r)\,\mathfrak{x}(u^a) = \frac{\partial h_\lambda}{\partial u^s}(u^r)$$

$$(s = 1, 2, \ldots\, p;\ \lambda = m+1\ \ldots\ n)$$

ergibt. $\mathfrak{x}(u^a)$ genügt nach (6.3) und (6.2) einem inhomogenen linearen Gleichungssystem, dessen Koeffizienten nur von den u^r abhängen, läßt sich also in der Form

$$\mathfrak{x}(u^a) = \mathfrak{x}(u^r, 0) + \sum_{u=p+1}^{m} \varrho_u(u^a)\,\mathfrak{a}_u(u^r)$$

mit stetigen, linear unabhängigen $\mathfrak{a}_u$ und mit einmal nach u^v stetig differenzierbaren Koeffizienten ϱ_u darstellen, wobei wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^v} = \displaystyle\sum_{u=p+1}^{m} \frac{\partial \varrho_u}{\partial u^v}\,\mathfrak{a}_u$

$$\text{(6.4)} \qquad \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \varrho_u}{\partial u^v}(u^a)\right) = m - p \qquad (u, v = p+1\ \ldots\ m)$$

sein muß. Dabei wird vorausgesetzt, daß Rang $\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \dfrac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right)$ überall gleich $n-(m-p)$ ist. Diese Voraussetzung ist sinnvoll, da die Anzahl der Vektoren $\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}$ und $\dfrac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}$ zusammen $(n-m)(p+1) = n - m + (n-m)\,p \geqq n-(m-p)$ beträgt; sie bedeutet im allgemeinen keine Einschränkung der Allgemeinheit [6]). Wir können wegen (6.4) nach Ausführung der Parametertransformation $\bar{u}^r = u^r$, $\bar{u}^u = \varrho_u(u^a)$ die Darstellung der T_m^p in die besonders einfache Form bringen:

$$\text{(6.5)} \qquad \mathfrak{x}(u^a) = \mathfrak{x}(u^r, 0) + \sum_{v=p+1}^{m} u^v\,\mathfrak{a}_v(u^r)\ ^{7)}.$$

Die T_m^p ist deshalb als verallgemeinerte Regelfläche anzusehen, welche durch den durch die Vektoren $\mathfrak{x}(u^r, 0)$ und $\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r)$ gegebenen, p-dimensionalen „Streifen" m-dimensionaler Tangentialraumelemente eindeutig bestimmt ist. Aus (6.5) folgt nämlich zusammen mit (6.2) und (6.3)

$$\text{(6.6)} \qquad \mathfrak{a}_v\,\underset{\lambda}{\mathfrak{m}} = 0 \quad\text{und}\quad \mathfrak{a}_v\,\frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s} = 0,$$

$$(1 \leqq s \leqq p;\ p+1 \leqq v \leqq m;\ m+1 \leqq \lambda \leqq n),$$

---

[6]) Aus (6.2) und (6.3) folgt wegen der Dimensionszahl m von T_m^p zunächst nur Rang $\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \dfrac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right) \leqq n-(m-p)$, wir können aber den Fall Rang $\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \dfrac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right) < n-(m-p)$ als Ausnahmefall ausschließen.

[7]) Die Querstriche der Parameter seien in Zukunft stets weggelassen.

wodurch wegen Rang $\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right) = n - (m - p)$ die durch die $\mathfrak{a}_v$ aufgespannten Erzeugenden V_{m-p} der T^p_m eindeutig festgelegt sind.

Nun geht aber nicht durch jeden p-Streifen eine p-Torse, da im allgemeinen Rang $\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right) > n - (m - p)$ sein wird, wo (6.6) kein Lösungssystem linear unabhängiger $\mathfrak{a}_v$ besitzt. Nur für $n - m = 1$, d. h. bei sog. Hypertorsen ist (6.6) im allgemeinen linear unabhängig lösbar. Diese Bedingungen (6.6) reichen zusammen mit Rang $\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right) = n - (m - p)$ und der (ebenfalls für Hyperflächenstreifen im allgemeinen erfüllten) Bedingung

$$\text{(6.7)} \qquad \text{Rang}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^s}(0), \mathfrak{a}_u(0)\right) = m$$

auch schon hin, daß die durch (6.5) mit einmal stetig differenzierbaren $\mathfrak{x}(u^r, 0)$ und $\mathfrak{a}_v(u^r)$ sowie linear unabhängigen $\mathfrak{a}_v$ gegebene Mannigfaltigkeit (lokal) eine für $u^{p+1} = \cdots = u^m = 0$ durch den p-Streifen $\{\mathfrak{x}(u^r, 0), \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r)\}$ gehende p-Torse ist. Aus (6.6) folgt nämlich wegen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^s}(u^r, 0)\, \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r) = 0$:

$$\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r) \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^s \partial u^v}(u^b) = \frac{\partial \mathfrak{a}_v}{\partial u^s}(u^r)\, \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^u \partial u^v}(u^b)\, \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r) = 0$$

sowie

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^a}(u^b)\, \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r) = 0 \text{ und (wegen (6.7): Rang}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^a}(0)\right) = m.$$

Die Ableitungen der Tangentialvektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^a}$ nach u^v hängen also in einer Umgebung des Nullpunktes von diesen Vektoren selbst mit stetigen Koeffizienten linear ab. Dann bleibt aber der von den $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^a}$ aufgespannte Tangentialraum nach Hilfssatz 3 für festgehaltene u^r konstant. Es kann nicht sein, daß (bei geeigneter Wahl der Parameter u^r) dieser Tangentialraum schon bei festgehaltenen $u^{\bar r}$ ($\bar r = 1, 2, \ldots, p-1$) konstant bleibt, da in diesem Falle wegen Hilfssatz 3: $\frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^p} = \sum_{\mu=m+1}^{n} C_{\lambda\mu} \underset{\mu}{\mathfrak{m}}$ $(m + 1 \leq \lambda \leq n)$ und deshalb

$$\text{Rang}\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right) = \text{Rang}\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^{\bar s}}\right) \leq n - (m - p + 1) < n - (m - p)$$
$$(\bar s = 1, 2, \ldots, p-1)$$

(vgl. Anm. [6]) von S. 6) gelten würde, was mit der Bedingung Rang $\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right) = n - (m - p)$ im Widerspruch steht. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 8. *Eine zweimal stetig differenzierbare, m-dimensionale p-Torse läßt sich im n-dimensionalen, affinen Raum im allgemeinen in der Form einer verallgemeinerten Regelfläche* $\mathfrak{x}(u^a) = \mathfrak{x}(u^r, 0) + \sum_{v=p+1}^{m} u^v \mathfrak{a}_v(u^r)$ $(1 \leq r \leq p)$ *darstellen und ist durch den durch* $\mathfrak{x}(u^r, 0)$ *und* $\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}(u^r)$ $(m + 1 \leq \lambda \leq n)$ *gegebenen p-Streifen ebenfalls im*

allgemeinen (d. h. wenn Rang$\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right) = n - (m - p)$ $(1 \leqq s \leqq p)$ ist) *eindeutig bestimmt. Für* $n = m + 1$ *geht außerdem durch jeden zweimal stetig differenzierbaren p-Streifen* $\{\mathfrak{x}(u^r, 0), \mathfrak{m}(u^r)\}$ *in einer Umgebung des Nullpunktes im allgemeinen*[8]) (d. h. wenn Rang$\left(\mathfrak{m}, \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^s}\right) = n - (m - p)$ und Rang$\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^s}(0), \mathfrak{a}_v(0)\right)$ $= m$ für die linear unabhängigen Lösungen von $\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}_v = 0$ und $\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^s}\mathfrak{a}_v = 0$ gilt) *für* $u^{p+1} = \cdots = u^m = 0$ *eine (einmal stetig differenzierbare) m-dimensionale p-Hypertorse.*

Man kann sich nun fragen, ob — wenn schon nicht durch jeden p-Streifen, so doch — wenigstens durch jede (zweimal stetig differenzierbare) p-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{x}(u^r)$ schon eine (zweimal stetig differenzierbare) p-Torse gehen kann. Wie wir gesehen haben, ist dafür das Erfülltsein der Bedingungen

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^s}\underset{\lambda}{\mathfrak{m}} = 0, \quad \mathfrak{a}_v \underset{\lambda}{\mathfrak{m}} = 0, \quad \mathfrak{a}_v \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s} = 0$$

sowie

$$\operatorname{Rang}\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}\right) = n - m \quad \text{und} \quad \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^s}, \mathfrak{a}_v\right) = m,$$

oder etwas umgeformt:

$$\text{(6.8)} \qquad \begin{gathered} \frac{\partial \mathfrak{a}_v}{\partial u^s}(u^r) \cong 0 \left(\operatorname{mod} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^t}(u^r), \mathfrak{a}_u(u^r)\right)^{9)} \\ (1 \leqq r, s, t \leqq p;\; p + 1 \leqq u, v \leqq m) \end{gathered}$$

notwendig und zusammen mit

$$\operatorname{Rang}\left(\underset{\lambda}{\mathfrak{m}}, \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{m}}}{\partial u^s}\right) = n - (m - p)$$

auch hinreichend. Ein Lösungsversuch von (6.8) nach den Methoden der Hilfssätze von § 2 führt allerdings lediglich auf die trivialen Lösungen:

$$\mathfrak{a}_v(u^r) = k_v \mathfrak{x}(u^r) + \mathfrak{b}_v \qquad (k_v = \text{const}, \mathfrak{b}_v = \text{const}),$$

zu welchen die Mannigfaltigkeiten

$$\text{(6.9)} \qquad \mathfrak{x}(u^a) = \mathfrak{x}(u^r) + \sum_{v=p+1}^{m} u^v \mathfrak{b}_v \qquad (\mathfrak{b}_v = \text{const})$$

und

$$\text{(6.10)} \qquad \begin{gathered} \mathfrak{x}(u^a) = \left(1 + \sum_{v=p+1}^{m} k_v u^v\right)\mathfrak{x}(u^r) + \sum_{v=p+1}^{m} u^v \mathfrak{b}_v \\ \left(k_v = \text{const}, \sum_{v=p+1}^{m} (k_v)^2 \neq 0;\; \mathfrak{b}_v = \text{const.}\right) \end{gathered}$$

gehören.

---

[8]) Daß hier Ausnahmefälle auftreten können, beweist die Tatsache, daß durch einen ebenen, geradlinigen, 1-dimensionalen Flächenstreifen im 3-dimensionalen Raum keine 1-Torse mit einer von der Streifenkurve verschiedenen Erzeugenden gehen kann.

[9]) Hiermit sei wie in § 2 ausgedrückt, daß sich $\frac{\partial \mathfrak{a}_v}{\partial u^s}$ als Linearkombination von $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^t}$ und $\mathfrak{a}_u$ ausdrücken läßt.

Die durch (6.9) dargestellte Mannigfaltigkeit geht durch $\mathfrak{x}(u^r)$ und besteht aus ∞^p Erzeugenden V_{m-p}, welche alle zueinander parallel sind, während die ∞^p Erzeugenden V_{m-p} der Mannigfaltigkeit (6.10) alle den durch die Gleichung $1 + \sum_{v=p+1}^{m} k_v u^v = 0$ gegebenen, $(m-p-1)$-dimensionalen linearen Raum L_{m-p-1}, auf welchem kein Punkt von $\mathfrak{x}(u^r)$ liegt, gemein haben und (6.10) auch durch $\mathfrak{x}(u^r)$ geht. Dadurch wird ersichtlich, daß eine Mannigfaltigkeit der Art (6.10) stets durch eine nichtausgeartete projektive Abbildung des (vervollständigten) A_n in eine Mannigfaltigkeit der Art (6.9) übergeführt werden kann. Man muß nur die Projektivität so einrichten, daß diese den L_{m-p-1} ganz in die uneigentliche Hyperebene des A_n hinein abbildet. Wir brauchen also nur noch (6.9) weiter zu untersuchen und stellen dabei folgendes fest: Die Tangentialräume von (6.9) sind für alle Punkte mit konstanten u^r identisch. Im allgemeinen hängen sie auch von nicht weniger als diesen p Parametern ab. Wir können nämlich ohne Einschränkung der Allgemeinheit in (6.9) $\mathfrak{b}_u \mathfrak{b}_v = \delta_u^v$ annehmen und $\mathfrak{x}(u^r)$ durch

$$\bar{\mathfrak{x}}(u^r) = \mathfrak{x}(u^r) - \sum_{v=p+1}^{m} (\mathfrak{x}(u^r)\,\mathfrak{b}_v)\,\mathfrak{b}_v$$

ersetzen. Damit wird

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}}{\partial u^r}\mathfrak{b}_v = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{x}}}{\partial u^r \partial u^s}\mathfrak{b}_v = 0. \tag{6.11}$$
$$(1 \leqq s, r \leqq p;\ p+1 \leqq v \leqq m)$$

Würden nun die Tangentialräume von (6.9) (nach geeignet vorgenommener Transformation der Parameter u^r) auch für $u^{\bar{r}} = \text{const}$ $(1 \leqq \bar{r} \leqq p-1)$ identisch sein, so würde nach Hilfssatz 3 $\frac{\partial}{\partial u^p}\left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}}{\partial u^{\bar{r}}}\right)$ linear von $\frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}}{\partial u^s}$ und $\mathfrak{b}_v$, also wegen (6.11) linear von $\frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}}{\partial u^s}$ abhängen, d. h. nach demselben Hilfssatz wäre $\bar{\mathfrak{x}}(u^r)$ zumindest eine $(p-1)$-Torse aus geradlinigen Erzeugenden, was im allgemeinen nicht zutreffen wird. Also ist die Mannigfaltigkeit (6.9) im allgemeinen eine spezielle p-Torse, und dies gilt genauso für die Mannigfaltigkeit (6.10), da die letztere durch eine Projektivität aus der p-Torse (6.9) entsteht und somit nach Definition ebenfalls eine p-Torse sein muß. Wir nennen die p-Torse (6.9) „zylindrisch" und die p-Torse (6.10) „axial". Beide Arten fassen wir unter dem Begriff triviale Torsen zusammen, es sind dies für $p = 1$, $m = 2$, $n = 3$ Zylinder- und Kegelflächen.

Durch jede p-dimensionale Mannigfaltigkeit geht also im allgemeinen eine triviale p-Torse (welche durch die Mannigfaltigkeit keineswegs eindeutig bestimmt ist!), die Frage, ob auch eine nichttriviale p-Torse hindurchgeht, bleibt offen. Sicher ist dies im allgemeinen für $n - m = 1$ oder für $p = 1$ möglich, wie Satz 8 und die Tatsache zeigt, daß für $p = 1$ die Bedingung (6.8) auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen führt, welches sich ganz allgemein lösen läßt.

Es ist aber möglich, den folgenden, viel schwächeren Satz zu beweisen:

Satz 9. Zu jedem Tripel p, m, n natürlicher Zahlen mit $1 \leqq p < m < n$ existiert eine m-dimensionale p-Torse, welche weder zylindrisch noch axial ist.

Beweis. Wir gehen von den Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \underset{i}{\psi}}{\partial u^b} - \underset{i}{G_b}\Big(u^d, \underset{\alpha}{\psi}\Big) \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^b} - \mathfrak{x}_b &&= 0 \\
(6.12)\quad &\frac{\partial \underset{i,a}{\psi}}{\partial u^b} - \underset{i,a}{G_b}\Big(u^d, \underset{\alpha}{\psi}\Big) \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}_a}{\partial u^b} - \gamma_{ab}^{c}(u^d)\,\mathfrak{x}_c - \sum_{\lambda=m+1}^{n} \underset{\lambda}{U}_{ab}(u^d)\,\underset{\lambda}{\mathfrak{t}} &&= 0 \\
&\frac{\partial \underset{i,\lambda}{\psi}}{\partial u^b} - \underset{i,\lambda}{G_b}\Big(u^d, \underset{\alpha}{\psi}\Big) \equiv \frac{\partial \underset{\lambda}{\mathfrak{t}}}{\partial u^b} &&= 0
\end{aligned}$$

einer dreimal stetig differenzierbaren, m-dimensionalen p-Torse $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^a)$ mit

$$(6.13)\qquad \gamma_{ab}^{c} = \gamma_{ba}^{c},\ \underset{\lambda}{U}_{ab} = \underset{\lambda}{U}_{ba} \quad (m+1 \leqq \lambda \leqq n)$$

und der für sie nach Hilfssatz 3 charakteristischen Nebenbedingung:

$$(6.14)\qquad \underset{\lambda}{U}_{au}(u^d) = 0 \quad (p+1 \leqq u \leqq m)$$

aus. Hierbei ist natürlich

$$(6.15)\qquad \operatorname{Rang}\big(\mathfrak{x}_a, \underset{\lambda}{\mathfrak{t}}\big) = n$$

vorausgesetzt. Die Integrabilitätsbedingungen von (6.12) lauten in der Bezeichnungsweise von Hilfssatz 2a):

$$\begin{aligned}
&\underset{i}{\mathfrak{J}}_{bc}(u^e) \equiv 0 \\
(6.16)\quad &\underset{i,a}{\mathfrak{J}}_{bc}(u^e) \equiv \mathfrak{P}_{abc}^{d}(u^e)\,\mathfrak{x}_d(u^e) + \sum_{\lambda=m+1}^{n} \underset{\lambda}{\mathfrak{Q}}_{abc}(u^e)\,\underset{\lambda}{\mathfrak{t}}(u^e) = 0 \\
&\underset{i,\lambda}{\mathfrak{J}}_{bc}(u^e) \equiv 0,
\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung:

$$(6.17)\qquad \begin{aligned}
\mathfrak{P}_{abc}^{d} &\equiv \frac{\partial}{\partial u^c}\big(\gamma_{ab}^{d}\big) - \frac{\partial}{\partial u^b}\big(\gamma_{ac}^{d}\big) + \gamma_{ab}^{e}\gamma_{ec}^{d} - \gamma_{ac}^{e}\gamma_{eb}^{d} \\
\underset{\lambda}{\mathfrak{Q}}_{abc} &\equiv \frac{\partial}{\partial u^c}\big(\underset{\lambda}{U}_{ab}\big) - \frac{\partial}{\partial u^b}\big(\underset{\lambda}{U}_{ac}\big) + \gamma_{ab}^{d}\,\underset{\lambda}{U}_{dc} - \gamma_{ac}^{d}\,\underset{\lambda}{U}_{db}
\end{aligned}$$

gesetzt ist.

Um nun (6.12) und (6.14) zusammen so zu integrieren, daß die entstehende p-Torse sicher nichttrivial wird, lösen wir zunächst das Gleichungssystem

$$(6.18)\qquad \gamma_{up'}^{s}\,\underset{n}{U}_{sr''} - \gamma_{ur''}^{s}\,\underset{n}{U}_{sp'} = 0$$

$$(1 \leqq s \leqq p;\ 1 \leqq r'' < p';\ p+1 \leqq u \leqq m;\ 1 < p' \leqq p)$$

nach $\gamma_{up'}^{s''}$ $(1 \leqq s'' < p')$ auf, wobei sich $\gamma_{up'}^{s''}$ in der Form:

$$(6.19)\qquad \gamma_{up'}^{s''} = \frac{1}{\big\|\underset{n}{U}_{r''s''}\big\|}\,\Phi\Big(\gamma_{ur''}^{s},\ \gamma_{up'}^{\bar{s}},\ \underset{n}{U}_{tr'}\Big)$$

(Φ ist ganz rational in den angegebenen Argumenten, $1 \leqq r' \leqq p'$, $p' \leqq \bar{s} \leqq p$, $1 \leqq t \leqq p$) ausdrücken läßt. Darauf setzen wir diesen Ausdruck für $\gamma_{up'}^{s''}$ zusammen mit

$$(6.20)\qquad \gamma_{ar}^{u} = 0,\ \gamma_{uv}^{a} = 0,\ \underset{\bar{\lambda}}{U}_{ab} = 0 \text{ und } \underset{n}{U}_{ua} = 0 \quad (m+1 \leqq \bar{\lambda} < n)$$

in die Differentialgleichungen

$$\mathfrak{P}_{a r'' p'}^{\ \ d} = 0 \quad \text{und} \quad \underset{\lambda}{\mathfrak{Q}}_{a r'' p'} = 0 \ (a \geqq r'')$$

ein und erhalten so ein Differentialgleichungssystem der Form:

$$\begin{aligned} \text{(6.21)} \quad & \frac{\partial \gamma_{a r''}^{\ r}}{\partial u^{p'}} = \frac{1}{\left(\left\|\underset{n}{U}_{r'' s''}\right\|\right)^{2}} \Psi_1 \left(\gamma_{b s''}^{\ R}, \frac{\partial \gamma_{b s''}^{\ R}}{\partial u^{r''}}, \gamma_{s p'}^{\ S}, \frac{\partial \gamma_{s p'}^{\ S}}{\partial u^{r''}}, \gamma_{u p'}^{\ \bar{s}}, \frac{\partial \gamma_{u p'}^{\ \bar{s}}}{\partial u^{r''}}, \underset{n}{U}_{t t''}, \frac{\partial \underset{n}{U}_{t t''}}{\partial u^{r''}},\right. \\ & \qquad\qquad \left. \underset{n}{U}_{t p'}, \frac{\partial \underset{n}{U}_{t p'}}{\partial u^{r''}}\right) \\ & \frac{\partial \underset{n}{U}_{s r''}}{\partial u^{p'}} = \Psi_2 \left(\gamma_{s r''}^{\ R}, \gamma_{s p'}^{\ S}, \underset{n}{U}_{t r''}, \underset{n}{U}_{t p'}, \frac{\partial \underset{n}{U}_{t p'}}{\partial u^{r''}}\right) \\ & (1 \leqq a, b \leqq m;\ 1 \leqq r, s, t, R, S \leqq p;\ p+1 \leqq u \leqq m; \\ & 1 \leqq r'', s'', t'' \leqq p'-1;\ p' \leqq \bar{s} \leqq p;\ 1 < p' \leqq p;\ a \geqq r'';\ s \geqq r''), \end{aligned}$$

wobei Φ_1 und Φ_2 in den angegebenen Argumenten ganz rational sind, während die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_{a r'' p'}^{\ \ u} = 0,\ \underset{n}{\mathfrak{Q}}_{u r'' p'} = 0 \quad \text{und} \quad \underset{\lambda}{\mathfrak{Q}}_{a r'' p'} = 0 \ (a \geqq r'')$$

wegen (6.18) und (6.20) identisch befriedigt sind. Ebenso gewinnen wir durch Einsetzung von (6.19) und (6.20) in die Differentialgleichungen $\underset{i}{\mathfrak{A}}_{p'} = 0$, $\underset{i,a}{\mathfrak{A}}_{p'} = 0$ und $\underset{i,\lambda}{\mathfrak{A}}_{p'} = 0$ nach (6.12) ($\mathfrak{x} = (x^i)$, $\mathfrak{x}_a = (x_a^i)$ und $\underset{\lambda}{\mathfrak{t}} = (\underset{\lambda}{t}^i)$ gesetzt):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x^i}{\partial u^{p'}} = \Psi_3 (x_{p'}^i) \\ \text{(6.22)} \quad & \frac{\partial x_a^i}{\partial u^{p'}} = \frac{1}{\left\|\underset{n}{U}_{r'' s''}\right\|} \Psi_4 \left(x_b^i, \underset{n}{t}^i, \gamma_{u s''}^{\ R}, \gamma_{s p'}^{\ S}, \gamma_{u p'}^{\ \bar{s}}, \underset{n}{U}_{t t''}, \underset{n}{U}_{t p'}\right) \\ & \frac{\partial \underset{\lambda}{t}^i}{\partial u^{p'}} = 0 \\ & (\Psi_3, \Psi_4 = \text{ganz rational};\ 1 \leqq i \leqq n;\ 1 \leqq a, b \leqq m;\ 1 \leqq s, t, R, S \leqq p; \\ & p+1 \leqq u \leqq m;\ 1 \leqq r'', s'', t'' \leqq p'-1,\ p' \leqq \bar{s} \leqq p;\ 1 < p' \leqq p; \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m+1 \leqq \lambda \leqq n) \end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt an, $\mathring{\mathfrak{x}}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)$, $\mathring{\mathfrak{x}}_a(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)$ $\underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{t}}}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)$, $\mathring{\gamma}_{ab}^{\ c}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)$, $\underset{\lambda}{\mathring{U}}_{ab}(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0)$ $(1 \leqq m' \leqq m)$ seien im Nullpunkt analytische Funktionen, die den Bedingungen

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{x}_a(0), \underset{\lambda}{\mathfrak{t}}(0)) = n,\ \gamma_{ab}^{\ c} = \gamma_{ba}^{\ c},\ \underset{\lambda}{U}_{ab} = \underset{\lambda}{U}_{ba};$$

$$\gamma_{ar}^{\ u} = 0,\ \gamma_{uv}^{\ a} = 0,\ \underset{\lambda}{U}_{ab} = 0,\ \underset{n}{U}_{ua} = 0,\ \gamma_{m1}^{\ 1}(u^1, 0 \ldots 0) \neq \text{const},\ \ \underset{n}{U}_{rs}(0) = \delta_r^s;$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{a b''' m''}^{\ \ d}(u^1, \ldots, u^{m''}, 0 \ldots 0) = 0,\ \underset{\lambda}{\mathfrak{Q}}_{a b''' m''}(u^1, \ldots, u^{m''}, 0 \ldots 0) = 0,& \\ \underset{a}{\mathfrak{A}}_{m''}(u^1, \ldots, u^{m''}, 0 \ldots 0) = 0& \end{aligned}$$

$$(a \geqq b''';\ 1 \leqq b''' < m'';\ 1 \leqq m'' \leqq m')$$

genügen. Für $m' = 1$ ist diese Annahme sicher richtig, d. h. für $m' = 1$ existiert sicher eine derartige Menge von Funktionen, die diesen Bedingungen genügt, wie man durch Integration der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_1(u^1, 0 \ldots 0) = 0$ einsieht, wenn man deren (beliebig vorgebbare) Koeffizienten noch obigen algebraischen Bedingungen unterwirft.

Wir denken die obige Annahme nun für $m' - 1$ bewiesen und wollen zeigen, daß unsere Funktionen nach einer auf den Parameterbereich $u^{m'+1} = \cdots = u^m = 0$ erweiterten, geeigneten Definition auch die obigen Bedingungen für m' erfüllen. Dazu unterscheiden wir die beiden Fälle $m' \leqq p$ und $m' > p$. Im Falle $m' = p' \leqq p$ definieren wir:

$$\mathring{\gamma}^{u}_{ar}(u^1, \ldots, u^{p'}\ 0 \ldots 0) = 0\ (a \geqq r),\ \mathring{\gamma}^{a}_{uv}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0) = 0$$

$$\underset{\lambda}{\mathring{U}}_{ab}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0) = 0,\ \underset{n}{\mathring{U}}_{ua}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0) = 0 \quad (u \geqq a).$$

$$\mathring{\gamma}^{r}_{a\bar{\bar{s}}}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0)\ (a \geqq \bar{\bar{s}};\ p' < \bar{\bar{s}} \leqq p),\ \mathring{\gamma}^{r}_{sp'}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0)\ (s \geqq p'),$$

$$\mathring{\gamma}^{\bar{s}}_{up'}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0)\ \ (p' \leqq \bar{s} \leqq p),\ \underset{n}{\mathring{U}}_{r\bar{\bar{s}}}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0)\ (r \geqq \bar{\bar{s}}),$$

$$\underset{n}{\mathring{U}}_{tp'}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0)\ (t \geqq p')$$

seien beliebige analytische Fortsetzungen ihrer schon bekannten Anfangswerte für $u^{p'} = 0$, während $\mathring{\gamma}^{r}_{ar''}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0)\ (a \geqq r'')$,

$$\underset{n}{\mathring{U}}_{sr''}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0)\ (s \geqq r''),\ \mathring{x}^i(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0),$$

$$\mathring{x}^i_a(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0),\ \underset{\lambda}{\mathring{t}}^i(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0),$$

die durch die analytischen Anfangsbedingungen für $u^{p'} = 0$ eindeutig bestimmten, im Nullpunkt analytischen Lösungen des aus (6.21), (6.22) unter Benutzung von (6.13) gebildeten, wegen $\|\underset{n}{U}_{r''s''}(0)\| = \|\delta^{s''}_{r''}\| = 1 \neq 0$ analytischen, CAUCHY-KOWALEWSKIschen Systems sein sollen. Endlich bestimmen wir $\mathring{\gamma}^{s''}_{vp'}(u^1, \ldots, u^{p'}, 0 \ldots 0)\ (1 \leqq s'' < p')$ durch (6.19) und die restlichen unserer Funktionen durch ihre Symmetriebedingung in den zwei rechts unten stehenden Indizes. Dann genügen alle so definierten, im Nullpunkt analytischen Funktionen in der Tat unseren Bedingungen für m'.

Im Falle $m' = q' > p\,(p + 1 \leqq q' \leqq m)$ definieren wir: $\mathring{\gamma}^{u}_{ar}(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0) = 0\,(a \geqq r)$,

$$\mathring{\gamma}^{a}_{uv}(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0) = 0,\ \underset{\lambda}{\mathring{U}}_{ab}(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0) = 0,$$

$$\underset{n}{\mathring{U}}_{ua}(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0) = 0\ (u \geqq a),$$

und außerdem definieren wir

$$\mathring{\gamma}^{r}_{as}(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0)\ (a \geqq s),\ \underset{n}{\mathring{U}}_{rs}(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0)\ \ (r \geqq s),$$

$$\mathring{x}^i(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0),\ \mathring{x}^i_a(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0),\ \underset{\lambda}{\mathring{t}}^i(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0)$$

als die durch die analytischen Anfangsbedingungen für $u^{q'} = 0$ eindeutig bestimmten, analytischen Lösungen der Gleichungen

$$\mathfrak{P}^{\ r}_{asq'} = 0\ (a \geqq s),\ \underset{n}{\mathfrak{Q}}_{rsq'} = 0\ (r \geqq s),\ \underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{q'} = 0 \tag{6.23}$$

oder

$$\frac{\partial \gamma^{\,r}_{as}}{\partial u^{q'}} = \frac{\partial \gamma^{\,r}_{q'a}}{\partial u^{s}} - \gamma^{\,t}_{as}\,\gamma^{\,r}_{q't} + \gamma^{\,t}_{q'a}\,\gamma^{\,r}_{ts} \quad (a \geqq s)$$

$$\frac{\partial \underset{n}{U}_{rs}}{\partial u^{q'}} = \gamma^{\,t}_{q'r}\,\underset{n}{U}_{ts} \qquad\qquad (r \geqq s)$$

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial u^{q'}} = x^{i}_{q'}$$

$$\frac{\partial x^{i}_{a}}{\partial u^{q'}} = \gamma^{\,t}_{q'a}\,x^{i}_{t}$$

$$\frac{\partial \underset{\lambda}{t}^{i}}{\partial u^{q'}} = 0,$$

wobei wir darin schon die algebraischen Beziehungen für $\gamma^{\,c}_{ab}$ und $\underset{\lambda}{U}_{ab}$ teilweise eingesetzt haben. Diese Gleichungen bilden nämlich (bei voller Reduktion der $\gamma^{\,c}_{ab}$ und $\underset{\lambda}{U}_{ab}$ durch deren algebraische Bedingungen) ein analytisches Cauchy-Kowalewskisches Gleichungssystem. Die restlichen Funktionen bestimmen wir schließlich wieder durch die Symmetriebedingungen in den unteren Indizes. Jetzt erfüllen alle Funktionen neben (6.23) noch die Gleichungen

$$\mathring{\mathfrak{P}}^{\;a}_{uvq'}\,(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0) = 0,\ \mathring{\mathfrak{P}}^{\;u}_{asq'}\,(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0) = 0,$$

$$\underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{Q}}}_{abq'}\,(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0) = 0,\ \underset{n}{\mathring{\mathfrak{Q}}}_{usq'}\,(u^1, \ldots, u^{q'}, 0 \ldots 0) = 0.$$

Hiermit ist in jedem Fall allen unseren Bedingungen für m', welche wir an unsere Funktionen gestellt hatten, Genüge getan, und durch vollständige Induktion nach m' folgt jetzt die Existenz von (analytischen) Funktionen $\mathring{\mathfrak{x}}$, $\mathring{\mathfrak{x}}_a$, $\underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{t}}}$, $\mathring{\gamma}^{\,c}_{ab} = \mathring{\gamma}^{\,c}_{ba}$, $\underset{\lambda}{\mathring{U}}_{ab} = \underset{\lambda}{\mathring{U}}_{ba}$ aller m Koordinaten u^a, für welche die folgenden Beziehungen richtig sind:

(6.24) $$\operatorname{Rang}\,(\mathring{\mathfrak{x}}_a(0), \underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{t}}}\,(0)) = n,$$

(6.25) $$\mathring{\gamma}^{\,1}_{m1}(u^1, 0 \ldots 0) \neq \text{const},$$

(6.26) $$\underset{n}{\mathring{U}}_{rs}\,(0) = \delta^{s}_{r},$$

(6.27) $$\mathring{\gamma}^{\,v}_{ur}\,(u^b) = 0,$$

(6.28) $$\underset{\lambda}{\mathring{U}}_{ua}\,(u^b) = 0$$

und

(6.29) $$\underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_{m'}\,(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0,$$

(6.30) $$\mathring{\mathfrak{P}}^{\;d}_{ab''m'}\,(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0,$$

(6.31) $$\underset{\lambda}{\mathring{\mathfrak{Q}}}_{ab''m'}\,(u^1, \ldots, u^{m'}, 0 \ldots 0) = 0.$$

$$(1 \leqq r, s \leqq p;\ p + 1 \leqq u, v \leqq m;\ \ m + 1 \leqq \lambda \leqq n;\ \ a \geqq b'';\ \ 1 \leqq b'' < m';$$
$$m' = 1, 2, \ldots, m).$$

Nun benützen wir die aus (6.17) folgenden Darstellungen

$$\overset{\circ}{\mathfrak{P}}_{abc}^{\ \ \ d} = \overset{\circ}{\mathfrak{R}}_{acb}^{\ \ \ d} - \overset{\circ}{\mathfrak{R}}_{abc}^{\ \ \ d} \text{ mit } \overset{\circ}{\mathfrak{R}}_{abc}^{\ \ \ d} = \overset{\circ}{\mathfrak{R}}_{bac}^{\ \ \ d} = -\left(\frac{\partial}{\partial u^c}\left(\overset{\circ}{\gamma}_{ab}^{d}\right) + \overset{\circ}{\gamma}_{ab}^{e}\,\overset{\circ}{\gamma}_{ec}^{d}\right)$$

und

$$\overset{\circ}{\underset{\chi}{\mathfrak{Q}}}_{abc} = \overset{\circ}{\underset{\chi}{\mathfrak{S}}}_{acb} - \overset{\circ}{\underset{\chi}{\mathfrak{S}}}_{abc} \text{ mit } \overset{\circ}{\underset{\chi}{\mathfrak{S}}}_{abc} = \overset{\circ}{\underset{\chi}{\mathfrak{S}}}_{bac} = -\left(\frac{\partial}{\partial u^c}\left(\overset{\circ}{\underset{\chi}{U}}_{ab}\right) + \overset{\circ}{\gamma}_{ab}^{d}\,\overset{\circ}{\underset{\chi}{U}}_{dc}\right)$$

und leiten daraus unter Benutzung von (6.30), (6.31) analog wie in I S. 459 die Gleichungen:

$$\overset{\circ}{\mathfrak{P}}_{ab''m'}^{\ \ \ \ \ d}(u^1,\ldots,u^{m'},0\ldots0) \cong 0 \ (\mathrm{mod}\ \overset{\circ}{\mathfrak{P}}_{m'a''b''}^{\ \ \ \ \ \ d}(u^1,\ldots,u^{m'},0\ldots0))$$

und

$$\overset{\circ}{\underset{\chi}{\mathfrak{Q}}}_{ab''m'}(u^1,\ldots,u^{m'},0\ldots0) \cong 0 \ (\mathrm{mod}\ \overset{\circ}{\underset{\chi}{\mathfrak{Q}}}_{m'a''b''}(u^1,\ldots,u^{m'},0\ldots0))$$

$$(1 \leqq a'', b'' < m';\ 2 \leqq m' \leqq m)$$

ab, aus welchen wegen (6.16) und (6.24)

$$(6.32)\quad \underset{\alpha}{\mathfrak{J}}_{b''m'}(u^1,\ldots,u^{m'},0\ldots0) \cong 0 \ (\mathrm{mod}\ \underset{\beta}{\mathfrak{J}}_{c''d''}(u^1,\ldots,u^{m'},0\ldots0)) \quad (2 \leqq m' \leqq m)$$

folgt. Jetzt ergibt sich aus (6.29) und (6.32) nach I, Hilfssatz 2b):

$$\overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}}_a(u^b) = 0.$$

Die durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^0(u^a)$ dargestellte (wegen (6.24)) m-dimensionale Mannigfaltigkeit $\overset{\circ}{V}_m$ im A_n hat also wegen (6.28) die Eigenschaft, daß ihre Tangentialräume bei konstanten u^r $(1 \leqq r \leqq p)$ alle identisch sind. Es kann weiter nicht zutreffen, daß (nach geeigneter Transformation der u^r) die Tangentialräume alle schon bei konstanten $u^{\bar r}(1 \leqq \bar r \leqq p-1)$ identisch sind, denn dann wäre notwendig der (gegenüber Parametertransformationen invariante) Rang von $(\overset{\circ}{\underset{n}{U}}_{ab})$ wegen (6.14) überall kleiner als p im Gegensatz zu (6.26). $\overset{\circ}{V}_m$ ist deshalb eine p-Torse, und wir müssen, um den Beweis von Satz 9 zu Ende zu führen, lediglich noch zeigen, daß $\overset{\circ}{V}_m$ nichttrivial ist.

Dies geschehe indirekt; wir nehmen also an, $\overset{\circ}{V}_m$ sei zylindrisch oder axial. Dann gehen alle durch $u^r =$ const gegebenen Erzeugenden von $\overset{\circ}{V}_m$ durch einen $(m-p-1)$-dimensionalen linearen Raum L_{m-p-1}, welcher entweder ganz in der uneigentlichen Hyperebene liegt oder nicht. Im ersten Fall sind alle Erzeugenden parallel, und $\overset{\circ}{V}_m$ wird in einem geeigneten Parametersystem $\bar u^a$ durch

$$(6.33)\qquad \overset{\circ}{\mathfrak{x}}(\bar u^a) = \overset{\circ}{\mathfrak{x}}(\bar u^r, 0) + \sum_{v=p+1}^{m} \bar u^v \mathfrak{b}_v \quad (\mathfrak{b}_v = \text{const};\ \bar u^r = u^r)$$

dargestellt. Im zweiten Fall können wir durch eine etwaige Parametertransformation der u^a:

$$\begin{aligned}\hat u^r &= u^r\\ \hat u^v &= u^v + c_v\end{aligned}\qquad (c_v = \text{beliebige, nichtverschwindende Konstante})$$

stets erreichen, daß der Parameternullpunkt der u^a nicht in L_{m-p-1} zu liegen kommt und trotzdem die Beziehungen (6.24), (6.25) und (6.27) (bei hinreichend kleiner Wahl der c_v) ihre Gültigkeit behalten. Wir denken uns dies schon ausgeführt. Außerdem können wir (nach Durchführung einer etwaigen Translation von $\mathring{\mathfrak{x}}(u^a)$) den Nullpunkt des A_n als mit einem (endlichen) Punkt von L_{m-p-1} zusammenfallend annehmen und die axiale p-Torse $\mathring{V}_m$ durch

$$\mathring{\bar{\mathfrak{x}}}(\bar{u}^a) = \mathring{\mathfrak{x}}(\bar{u}^r, 0) + \sum_{\bar{v}=p+1}^{m-1} \bar{u}^{\bar{v}}\, \mathfrak{b}_{\bar{v}} + \bar{u}^m\, \mathring{\mathfrak{x}}(\bar{u}^r, 0) \tag{6.34}$$

darstellen, wobei die $\mathfrak{b}_{\bar{v}}$ konstante, zu L_{m-p-1} parallele und zusammen mit $\mathring{\mathfrak{x}}(\bar{u}^r, 0)$ linear unabhängige Vektoren darstellen und wobei $\bar{u}^r = u^r$ ist. Der Vergleich von $\mathring{\mathfrak{x}}(u^a)$ und den beiden anderen möglichen Darstellungen $\mathring{\bar{\mathfrak{x}}}(\bar{u}^a)$ der $\mathring{V}_m$ nach (6.33) und (6.34) zeigt jetzt: $\mathring{\bar{\mathfrak{x}}}$ geht aus $\mathring{\mathfrak{x}}$ durch eine (im Nullpunkt) analytische Parametertransformation $u^a = u^a(\bar{u}^b)$ hervor, für welche speziell

$$u^r(\bar{u}^s, \bar{u}^v) = \bar{u}^r \quad \text{und} \quad u^v(\bar{u}^s, 0) = 0 \tag{6.35}$$
$$(1 \leq r, s \leq p;\ p+1 \leq v \leq m)$$

gilt. Weiter transformieren sich die Größen $\mathring{\gamma}^c_{ab}$ bei dieser Parametertransformation wie Christoffelsymbole; es gilt also:

$$\mathring{\gamma}^s_{ur} = \frac{\partial}{\partial u^r}\left(\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^u}\right)\frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^a} + \mathring{\bar{\gamma}}^c_{ab}\,\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^u}\,\frac{\partial u^b}{\partial u^r}\,\frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^c}$$

(6.36) und

$$\mathring{\gamma}^v_{ur} = \frac{\partial}{\partial u^r}\left(\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^u}\right)\frac{\partial u^v}{\partial \bar{u}^a} + \mathring{\bar{\gamma}}^c_{ab}\,\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^u}\,\frac{\partial \bar{u}^b}{\partial u^r}\,\frac{\partial u^v}{\partial \bar{u}^c}\,.$$

Nun folgt aus (6.35):

$$\frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^s}(\bar{u}^t, 0) = \delta^r_s,\ \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^v}(\bar{u}^t, 0) = 0 \ \text{und}\ \frac{\partial u^v}{\partial \bar{u}^r}(\bar{u}^t, 0) = 0 \quad (1 \leq t \leq p),$$

woraus für die umgekehrte Transformation ebenfalls

$$\frac{\partial \bar{u}^r}{\partial u^s}(u^t, 0) = \delta^r_s,\ \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial u^v}(u^t, 0) = 0 \ \text{und}\ \frac{\partial \bar{u}^v}{\partial u^r}(u^t, 0) = 0$$

folgt. Dies ergibt in Verbindung mit (6.36) wegen (6.27), $\left\| \frac{\partial u^v}{\partial \bar{u}^u}(0) \right\| \neq 0$ und der aus (6.33) bzw. (6.34) folgenden Beziehung $\mathring{\bar{\gamma}}^v_{ur} = 0$ für $\bar{u}^v = u^v = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial u^r}\left(\frac{\partial \bar{u}^v}{\partial u^u}\right)(u^t, 0) = 0 \tag{6.37}$$

und

$$\mathring{\gamma}^s_{ur}(u^t, 0) = \mathring{\bar{\gamma}}^s_{vr}(u^t, 0)\,\frac{\partial \bar{u}^v}{\partial u^u}(u^t, 0). \tag{6.38}$$

Berücksichtigen wir jetzt noch die Tatsache, daß $\mathring{\bar{\gamma}}^s_{vr}(u^t, 0)$ nach (6.33) bzw. (6.34) gleich 0 bzw. gleich $\delta^m_v\, \delta^s_r$, also jeweils konstant ist und daß $\frac{\partial \bar{u}^v}{\partial u^u}(u^t, 0)$ nach (6.37) ebenfalls konstant ist, so zeigt (6.38) auch die Konstantheit von $\mathring{\gamma}^s_{ur}(u^t, 0)$; also speziell die Konstantheit von $\mathring{\gamma}^1_{m1}(u^1, 0 \ldots 0)$. Dies steht aber

mit (6.25) im Widerspruch, womit in der Tat gezeigt ist, daß $\overset{\circ}{V}_m$ eine nichttriviale p-Torse ist. w.z.b.w.

Bemerkungen: 1. Allgemeine Existenzsätze nichttrivialer p-Torsen scheinen nach Atanasjan[10]) bisher nicht bekannt zu sein; auch E. Cartan [2, 3] behandelt nur Spezialfälle.

2. Der durch die Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^a}$ und $\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^a \partial u^b}$ $(1 \leqq a, b \leqq m)$ in jedem Punkt einer p-Torse $\mathfrak{x}(u^a)$ aufgespannte, sog. (zweite) Schmiegraum besitzt wegen (6.12) und (6.14) höchstens die Dimension $m + \frac{p(p+1)}{2}$. Wenn er nun überall die maximal mögliche Dimension $m + \frac{p(p+1)}{2}$ besitzt und wenn $p > 1$ ist, so ist die p-Torse nach E. Cartan[11]) trivial. Es muß also für $p > 1$ und $\frac{p(p+1)}{2} \leqq n - m$ die Dimension d_2 des Schmiegraums unserer in Satz 9 konstruierten, nichttrivialen p-Torse $\overset{\circ}{\mathfrak{x}}(u^a)$ kleiner als $m + \frac{p(p+1)}{2}$ sein. Dies ist in der Tat auch der Fall, denn es gilt für $p > 1$ wegen $\underset{\bar\lambda}{\overset{\circ}{U}}_{ab} = 0$ für $m + 1 \leqq \bar{\lambda} < n$:

$$d_2 = \mathrm{Rang}\left(\frac{\partial \overset{\circ}{\mathfrak{x}}}{\partial u^a}, \frac{\partial^2 \overset{\circ}{\mathfrak{x}}}{\partial u^a \partial u^b}\right) = \mathrm{Rang}\left(\underset{\lambda}{\overset{\circ}{U}}_{ab}\right) + m = 1 + m < m + \frac{p(p+1)}{2}.$$

Unser Beispiel zeigt, daß der Satz von Cartan für $p = 1$ falsch wird, wie auch Cartan selbst erwähnt hat.

In einem dritten Teil dieser Arbeit sollen natürliche Gleichungen in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie behandelt werden.

Literatur

[1] Atanasjan, L.: Signierte Mannigfaltigkeiten spezieller Form im mehrdimensionalen affinen Raume. Trudy sem. vekt. tenz. analizu 9, 351—410 (1952). — [2] Cartan, E.: Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien. I. Bull. Soc. Math. France 47, 25—160 (1919). — [3] Cartan, E.: Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien. II. Bull. Soc. Math. France 48, 132—203 (1920). — [4] Eisenhart, L. P.: Riemannian Geometry. Princeton 1949.

(Eingegangen am 1. November 1955)

[10]) Vgl. [1], S. 353.
[11]) Vgl. [3], S. 162.

Stöcker, C.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 17—42 (1956)

Alternative Divisionsringe beliebiger Charakteristik

Von

Claus Stöcker in Frankfurt am Main

Einleitung

Bruck und Kleinfeld [1] (Theorem A, Corollary 2), Kleinfeld [4], [5] und Skornjakov [10] bewiesen den Satz[1]) über die Einzigkeit der Cayley-Dickson-Algebren[2])

Satz: *Jeder echt alternative Divisionsring ist eine* Cayley-Dickson-*Algebra über seinem Zentrum*,

und zwar Bruck und Kleinfeld in [1] unter der Einschränkung, daß die Charakteristik des Ringes von 2 verschieden ist, Kleinfeld in [4] für den Fall, daß die Charakteristik des Ringes gleich 2 ist und Skornjakov in [10] unter der Voraussetzung, daß die Charakteristik des Ringes von 2 und 3 verschieden ist[3]). Einen weiteren Beweis dieses Satzes deutet Kleinfeld in [5], § 3 an. Soweit es sich um die bei Kleinfeld durchgeführten Schlüsse handelt, ist dieser Beweis für beliebige Charakteristik gültig. Kleinfeld benutzt im weiteren Verlauf dann aber ein Ergebnis von Smiley [8], zu dessen Beweis sich wiederum eine die Charakteristik betreffende Fallunterscheidung als notwendig erweist.

Diese Sachlage läßt naturgemäß die Frage nach einem einheitlichen, für beliebige Charakteristik gültigen Beweis auftreten. Die Beantwortung dieser Frage ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Es sei erwähnt, daß der Beweis in der hier vorliegenden Form völlig elementar und im wesentlichen[4]) konstruktiv ist. Bei der Durchführung des Beweises lassen sich mit Erfolg einige der von Bruck und Kleinfeld [1], § 2 und Skornjakov [10], § 1 abgeleiteten Identitäten verwenden. Der Beweis hat eine gewisse Ähnlichkeit mit den Beweisen von Kleinfeld [4] und Skornjakov [10], an wesentlichen Stellen ist jedoch eine von der Kleinfeldschen und der Skornjakovschen durchaus verschiedene Schlußweise erforderlich.

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit verdanke ich Frau Prof. Dr. R. Moufang.

[1]) Eine ausführliche Darstellung dieser Beweise mit Ausnahme des Beweises von Skornjakov findet man bei Pickert [6], Kap. 6, S. 157—186, und Anhang, S. 327.

[2]) Eine für beliebige Charakteristik gültige Definition der Cayley-Dickson-Algebren findet man bei Schafer [7], § 2, eine ältere, für den Fall Charakteristik $\neq 2$ gültige Definition bei Dickson [2], Kap. XII, § 133, S. 264. Im Fall Charakteristik $\neq 2$ sind beide Definitionen gleichwertig.

[3]) Die Einschränkung Charakteristik $\neq 3$ wurde von Skornjakov selbst in [11] beseitigt. Der von Skornjakov gleichfalls in dieser Arbeit bewiesene Satz „Jeder alternative Divisionsring der Charakteristik 2 ist assoziativ" ist nach einer Bemerkung von M. Hall [3] falsch.

[4]) Hierzu siehe Fußnote [14]) auf S. 25.

1. Hilfsresultate

Beim Beweis des Satzes werden die von Bruck und Kleinfeld [1] eingeführte Funktion

(1.1) $$f(w, x, y, z) = (wx, y, z) - x(w, y, z) - (x, y, z)\, w$$

sowie die im folgenden Hilfssatz genannten Eigenschaften dieser Funktion benutzt.

Hilfssatz 1.1: *In jedem alternativen Ring ist die Funktion $f(w,x,y,z)$ linear in allen Argumenten: sie wechselt das Vorzeichen, wenn zwei ihrer Argumente vertauscht werden und verschwindet, wenn zwei ihrer Argumente gleich sind*[5]).

Ferner werden die folgenden, in jedem alternativen Ring gültigen, ebenfalls von Bruck und Kleinfeld in [1] bewiesenen Identitäten benutzt.

(1.2) $$f(w, x, y, z) = ((w, x), y, z) + ((y, z), w, x)$$

(1.3) $$f(uv, u, x, y) = uf(v, u, x, y) + (u, x, y)\,(v, u)$$

(1.4) $$(xy, z) = x(y, z) + (x, z)\,y + 3\,(x, y, z)$$

(1.5) $$(x^2, y, z) = x(x, y, z) + (x, y, z)\,x$$

(1.6) $$(x, xy, z) = (x, y, z)\,x\;; \quad (x, yx, z) = x(x, y, z)$$[6])

Aus (1.6) folgt insbesondere wegen der Alternativität des Ringes

(1.7) $$(xy, x, y) = 0\,.$$

Der Beweis der folgenden bekannten Tatsachen dürfte sich erübrigen.

Jeder alternative Divisionsring ist nullteilerfrei, enthält ein eindeutig bestimmtes Einselement und zu jedem von Null verschiedenen Element x ein eindeutiges inverses Element x^{-1}. Für $x \neq 0$ und beliebiges y aus dem Ring ist

(1.8) $$(x, x^{-1}, y) = 0\,.$$

Für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ ist

(1.9) $$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}\,.$$

Bei den folgenden 3 Hilfssätzen handelt es sich um Verallgemeinerungen der Lemmas 1, 5, 6 und 7 aus [10], § 1.

Hilfssatz 1.2: *Ist für zwei Elemente x, y eines alternativen Ringes R*

$$xy \pm yx = a,$$

so ist für beliebiges $z \in R$

$$x(x, y, z) \pm (x, y, z)\,x = (x, a, z)$$[7]).

Beweis: Wegen (1.6) wird bei Beachtung der Linearität des Assoziators

$$x(x, y, z) \pm (x, y, z)\,x = (x, yx \pm xy, z) = (x, a, z)\,, \qquad \text{q.e.d.}$$

[5]) Zum Beweise siehe [1], 2, Beweis zu Lemma 2.1. Der Beweis ist unter Voraussetzung beliebiger Charakteristik gültig.

[6]) Zum Beweise siehe [1], 2, Beweis der Identitäten (2.9), (2.18), (2.6), (2.12), (2.13) und (2.14). Der Beweis ist unter Voraussetzung beliebiger Charakteristik gültig.

[7]) Siehe [10], § 1, Lemma 1.

Hilfssatz 1.3: *Ist für 2 Elemente x, y eines alternativen Ringes R*

$$xy + yx = a\,,$$

so ist für beliebiges $z \in R$

(i) $$(zx)y = -(zy)x + za$$

(ii) $$x(yz) = -y(xz) + az$$ [8].

Beweis: Es ist

(1.10) $$(z, x, y) = (zx)y - z(xy)$$

$$-(z, x, y) = (z, y, x) = (zy)x - z(yx)\,,$$

wegen $yx = -xy + a$ also

(1.11) $$-(z, x, y) = (zy)\,x + z(xy) - za\,.$$

Addition von (1.10) und (1.11) liefert

$$0 = (zx)y + (zy)x - za, \text{ also (i)}\,.$$

Analog beweist man (ii).

Hilfssatz 1.4: *Ist für die Elemente x, y, z eines alternativen Ringes R*

$$xy + yx = a; \quad xz + zx = b,$$

so ist

(i) $$(x, y, z) = (yz, x) - yb + az$$

(ii) $$(yz + zy, x) = (y, b) + (z, a)$$ [9].

Beweis: Es ist wegen $xy = -yx + a$

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz) = -(yx)z + az - x(yz).$$

Aber wegen $zx + xz = b$ ist nach Hilfssatz 1.3 (i)

$$-(yx)z = (yz)x - yb, \text{ also}$$

(1.12) $$(x, y, z) = (yz)x - yb + az - x(yz)$$

$$= (yz, x) - yb + az,$$

womit (i) bewiesen ist.

Speziell ist dann nach (i)

(1.13) $$(x, z, y) = (zy, x) - za + by.$$

Addition von (1.12) und (1.13) liefert wegen $(x, y, z) = -(x, z, y)$

$$0 = (yz, x) + (zy, x) - yb + by + az - za,$$

also wegen der Linearität des Kommutators

$$(yz + zy, x) = (y, b) + (z, a).$$

Eine leichte Verallgemeinerung des Lemmas 3.1 von Bruck und Kleinfeld [1] ist der folgende

[8]) Siehe [10], § 1, Lemma 5.

[9]) Siehe [10], § 1, Lemma 6 und Lemma 7.

Hilfssatz 1.5: *Sei R ein alternativer Ring, U der von einer Untermenge S aus R erzeugte Unterring von R. Sei ferner H die Menge aller Elemente $h \in R$, für die*

$$(h, U) = (h, U, U) = 0$$

ist. Ein Element $p \in R$ gehört genau dann zu H, wenn

$$(p, S) = (p, S, S) = 0$$

ist.

Beweis: Der Beweis verläuft fast wörtlich wie der des Lemmas 3.1 in [1] und soll daher hier unterdrückt werden.

Hilfssatz 1.6: *Sei R ein alternativer nullteilerfreier Ring, der von den drei Elementen x, y, z mit*

$$(x, y, z) \neq 0$$

erzeugt wird. Sei C das Zentrum von R[10]*.*
Dann ist

$$p x^2 - q x + r = 0$$

mit gewissen Elementen p, q, r aus C und $p \neq 0$. Es ist

$$p = (x, y, z)^2; \quad q = (x, y, z)\,(x^2, y, z); \quad r = (x, xy, z)^2.$$

Beweis: Siehe [9]. Einen anderen Beweis dieses Satzes findet man bei Pickert [6], S. 166 u. S. 179.

2. Ausgezeichnete Tripel

Definition: Ein Tripel u, v, w von Elementen eines alternativen Ringes, für die

$$1 - 2u \neq 0; \quad v \neq 0; \quad w \neq 0$$

$$uv + vu = v; \quad uw + wu = w; \quad vw + wv = 0$$

$$w(vu) + (wv)u = wv$$

ist, soll ein *ausgezeichnetes Tripel* heißen[11].

Grundlegend für den Beweis des Hauptsatzes ist der

Satz 2.1: *In jedem echt alternativen Divisionsring R gibt es mindestens ein ausgezeichnetes Tripel.*

Der Beweis dieses Satzes gelingt unter Verwendung des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz 2.1: *Ist für drei Elemente u, v* und *t eines alternativen Ringes*

$$1 - 2u \neq 0; \quad v \neq 0; \quad (u, v, t) \neq 0; \quad uv + vu = v,$$

so bilden die Elemente $u, v, w = (u, v, t)$ ein ausgezeichnetes Tripel[12]*.*

[10]) Als Zentrum C eines alternativen Ringes R wird die Menge aller Elemente $c \in R$ bezeichnet mit $(c, R) = (c, R, R) = 0$.

[11]) Siehe auch [10], § 3 und [4].

[12]) Siehe auch [10], § 3, Lemma 10.

Beweis: Wegen $uv + vu = v$ liefert Hilfssatz 1.2

$$uw + wu = u(u, v, t) + (u, v, t)u = (u, v, t) = w$$

und
$$\begin{aligned} vw + wv &= v(u, v, t) + (u, v, t)v \\ &= -\{v(v, u, t) + (v, u, t)v\} = -(v, v, t) = 0. \end{aligned}$$

Wegen $uv + vu = v$ ist weiter

$$w(vu) = -w(uv) + wv,$$

andererseits ist wegen $uw + wu = w$ nach Hilfssatz 1.3 (ii) auch

$$u(wv) = -w(uv) + wv,$$

daher also

$$w(vu) = u(wv). \tag{2.1}$$

Nach (1.6) gilt

$$wv = (u, v, t)\, v = (u, v, vt). \tag{2.2}$$

Bei Beachtung von (2.1) und (2.2) verifiziert man unter Berücksichtigung von $uv + vu = v$ und Hilfssatz 1.2

$$\begin{aligned} (wv)u + w(vu) &= (wv)u + u(wv) = (wv)u + u(u, v, vt) \\ &= (wv)u - (u, v, vt)u + (u, v, vt) \qquad (2.3) \\ &= (wv)u - (wv)u + wv = wv. \end{aligned}$$

Wegen $w = (u, v, t) \neq 0$ erfüllen die Elemente u, v, w also die in der obigen Definition genannten Bedingungen, q.e.d.

Nun zum Beweis des Satzes 2.1. Er zerfällt in mehrere Schritte.

Sei also im folgenden R ein echt alternativer Divisionsring.

1. Behauptung: Es gibt in R Elemente a, a', für die gilt

$$aa' + a'a \neq 0, \tag{2.4}$$

wobei
$$a' \notin K^{13)}.$$

Beweis: Seien $l, m, n \in R$ mit

$$(l, m, n) \neq 0. \tag{2.5}$$

Solche l, m, n existieren, weil R echt alternativ ist. Insbesondere ist dann

$$l \notin K; \quad m \notin K; \quad n \notin K; \quad l, m, n \neq 0. \tag{2.6}$$

Entweder ist nun für wenigstens eines der Paare l, m; l, n; m, n die Bedingung (2.4) erfüllt. Dann ist nichts mehr zu beweisen. Oder es ist

$$lm + ml = ln + nl = mn + nm = 0. \tag{2.7}$$

Man betrachte die Elemente lm und n. Entweder ist schon für diese Elemente (2.4) erfüllt. Dann setze man $a = lm$, $a' = n$ und hat damit wiederum zwei Elemente der verlangten Art. Oder es ist

$$(lm)n + n(lm) = 0. \tag{2.8}$$

[13]) Mit K wird der Kern von R bezeichnet, also die Menge aller $k \in R$ mit $(k, R, R) = 0$.

Dann haben aber die Elemente $a = lm + n$, $a' = n$ die in der Behauptung genannten Eigenschaften; denn wegen $ln + nl = 0$ und Hilfssatz 1.3 (ii) sowie wegen $nm = -mn$ ist jetzt

$$(lm)n + n(lm) = (lm)n - l(nm) = (lm)n + l(mn)$$
$$= (l, m, n) + 2l(mn) = 0,$$

d. h. unter der Annahme (2.8) ist wegen (2.5) die Charakteristik des Ringes von 2 verschieden, so daß wegen $n \neq 0$ gilt

$$aa' + a'a = (lm)n + n(lm) + 2n^2 = 2n^2 \neq 0,$$

wobei
$$a' = n \notin K.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Behauptung: Es gibt in R Elemente b, b' mit

$$bb' + b'b \notin K.$$

Beweis: Seien a, a' zwei Elemente aus R mit

$$aa' + a'a \neq 0; \quad a' \notin K.$$

Entweder ist für diese Elemente schon die Behauptung 2. erfüllt. Dann ist nichts mehr zu beweisen. Oder es ist

$$aa' + a'a = k \in K; \quad k \neq 0.$$

Dann haben aber die Elemente $b = aa'$, $b' = a'$ die in der Behauptung genannte Eigenschaft; denn

$$bb' + b'b = (aa')a' + a'(aa') = (aa')a' + (a'a)a' = (aa' + a'a)a' = ka'$$

und
$$ka' \notin K;$$

denn wegen $k \neq 0$ existiert k^{-1} — R ist Divisionsring — und da bekanntlich der Kern eines alternativen Divisionsringes selbst ein Divisionsring ist, also insbesondere abgeschlossen ist gegen Multiplikation und Inversenbildung, würde aus $ka' \in K$ folgen

$$k^{-1} \cdot ka' = a' \in K \qquad \text{gegen Voraussetzung.}$$

3. Behauptung: Es gibt in R mindestens ein Element x, für das gilt

$$x^2 \notin K.$$

Beweis: Seien b, b' zwei Elemente aus R mit

$$bb' + b'b \notin K.$$

Entweder ist $b^2 \notin K$ bzw. $b'^2 \notin K$. Dann ist nichts mehr zu beweisen. Oder es ist $b^2 \in K$ *und* $b'^2 \in K$, wegen der Abgeschlossenheit von K gegen Addition also $b^2 + b'^2 \in K$. Dann hat das Element $x = b + b'$ die in der Behauptung genannte Eigenschaft; denn

$$x^2 = (b + b')^2 = (b^2 + b'^2) + (bb' + b'b)$$

und

$$(b^2 + b'^2) + (bb' + b'b) \notin K;$$

denn wegen der Abgeschlossenheit von K gegen Addition und Subtraktion würde aus $x^2 \in K$ wegen $b^2 + b'^2 \in K$ folgen

$$x^2 - (b^2 + b'^2) = (b^2 + b'^2) + (bb' + b'b) - (b^2 + b'^2) = bb' + b'b \in K$$

gegen Voraussetzung.

4. Behauptung: Es gibt in R zwei Elemente u, v mit

$$1 - 2u \neq 0; \quad v \neq 0; \quad uv + vu = v.$$

Beweis: Sei x ein Element von R mit $x^2 \notin K$. Dann existieren Elemente $y, z \in R$, so daß

$$(x^2, y, z) \neq 0. \tag{2.9}$$

Wegen (1.5) ist sicher auch

$$(x, y, z) \neq 0. \tag{2.10}$$

Wegen Hilfssatz 1.6 genügt dann x einer quadratischen Gleichung

$$p x^2 - q x + r = 0, \tag{2.11}$$

wobei $p = (x, y, z)^2 \neq 0$; $q = (x, y, z)\,(x^2, y, z) \neq 0$; $r = (x, xy, z)^2$ zum Zentrum C' des von x, y, z erzeugten Unterringes R' von R gehören. C' ist als Zentrum eines alternativen Ringes bekanntlich selbst ein (assoziativer und kommutativer) Ring. Für jedes $c \neq 0$ aus C' existiert ein $c^{-1} \in R$, da R Divisionsring, und man überzeugt sich, daß auch gilt

$$(c^{-1}, R', R') = (c^{-1}, R') = 0; \tag{2.12}$$

denn sind s, s' beliebige Elemente von R', so folgt aus (1.1)

$$(cc^{-1}, s, s') = f(c, c^{-1}, s, s') + c^{-1}(c, s, s') + (c^{-1}, s, s')\,c$$

Wegen $cc^{-1} = 1$ ist $(cc^{-1}, s, s') = 0$ und mit $(c, s, s') = 0$ folgt

$$(c^{-1}, s, s')\,c = -f(c, c^{-1}, s, s') = -((c, c^{-1}), s, s') - ((s, s'), c, c^{-1}),$$

also bei Beachtung von (1.8) und $(c, c^{-1}) = 0$

$$(c^{-1}, s, s')\,c = 0,$$

demnach wegen $c \neq 0$ $(c^{-1}, s, s') = 0$ oder

$$(c^{-1}, R', R') = 0.$$

Weiter liefert (1.4) für beliebiges $s \in R'$

$$(cc^{-1}, s) = c(c^{-1}, s) + (c, s)\,c^{-1} + 3(c, c^{-1}, s),$$

also bei Beachtung von $(cc^{-1}, s) = (1, s) = 0$, $(c, R') = 0$ und (1.8)

$$c(c^{-1}, s) = 0,$$

also wegen $c \neq 0$ $(c^{-1}, s) = 0$ oder

$$(c^{-1}, R') = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

Entsprechend zeigt man unter Verwendung von $(C', R', R') = (C', R') = 0$ und (2.12), daß für beliebige $c_1, c_2 \neq 0$ aus C' gilt

$$(c_1 c_2^{-1}, R') = (c_1 c_2^{-1}, R', R') = 0. \tag{2.13}$$

Wegen (1.9) ist $(q^{-1})^2 = (q^2)^{-1}$. Beachtet man $q \in C'$, also $q^2 \in C'$, $p \in C'$, also auch $p \in R'$, (2.12), (2.13) und (1.7), so verifiziert man leicht

$$\{p(q^2)^{-1}\}(px^2) = \{p(q^{-1})^2 p\} x^2 = \{(pq^{-1})(q^{-1}p)\} x^2 = (pq^{-1})\{(pq^{-1}) x^2\}$$
$$= (pq^{-1})\{x(pq^{-1}) x\} = (pq^{-1}x)(pq^{-1}x) = (pq^{-1}x)^2,$$

und analog wegen (1.8)

$$\{p(q^2)^{-1}\}(qx) = \{(pq^{-1})(q^{-1}q)\} x = pq^{-1}x$$

schließlich

$$\{p(q^2)^{-1}\} r = (pr)(q^2)^{-1}.$$

Multipliziert man daher (2.11) von links mit $p(q^2)^{-1}$, so erhält man

$$(pq^{-1}x)^2 - (pq^{-1}x) = -(pr)(q^2)^{-1} = \alpha.$$

Man setze

(2.14) $$pq^{-1}x = u.$$

Dann wird wegen $u^2 - u = \alpha$ und wegen (2.13)

$$(u^2 - u, y, z) = -((pr)(q^2)^{-1}, y, z) = 0,$$

also

(2.15) $$(u^2, y, z) = (u, y, z).$$

Nun liefert aber (1.5) sofort

(2.16) $$(u, y, z) = (u^2, y, z) = u(u, y, z) + (u, y, z)u.$$

Wegen (1.1) wird nun

$$(pq^{-1}x, y, z) = f(pq^{-1}, x, y, z) + x(pq^{-1}, y, z) + (x, y, z)(pq^{-1}),$$

also, da nach (2.13) $(pq^{-1}, y, z) = 0$ und nach (1.2) und (2.13) wegen $(y, z) \in R'$ $f(pq^{-1}, x, y, z) = ((pq^{-1}, x), y, z) + ((y, z), pq^{-1}, x) = 0$:

$$(u, y, z) = (pq^{-1}x, y, z) = (x, y, z)(pq^{-1}).$$

Beachtet man $(x, y, z) \neq 0$, $p \neq 0$, $q^{-1} \neq 0$ und die Nullteilerfreiheit von R, so sieht man, daß

(2.17) $$(u, y, z) \neq 0.$$

Gemäß (2.15) ist dann auch

$$(u^2, y, z) \neq 0$$

und daher wegen $(u - u^2, y, z) = 0$

$$(u - u^2, y, z) - (u^2, y, z) = (u - 2u^2, y, z) \neq 0,$$

so daß also

$$u - 2u^2 = u(1 - 2u) \neq 0$$

sein muß. Daraus folgt sofort

(2.18) $$1 - 2u \neq 0.$$

Setzt man

$$(u, y, z) = v,$$

so hat man wegen (2.16), (2.17) und (2.18) 2 Elemente u und v mit

$$1-2u \neq 0; \quad v \neq 0; \quad uv+vu=v,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

5. Behauptung: Es gibt in R ein Element t, für das gilt

$$(u, v, t) \neq 0 \text{[14]}.$$

Beweis: Es ist wegen $-vu = uv - v$

$$\begin{aligned}((u, v), u) &= (2uv-v, u) = 2uvu - vu - 2u^2v + uv\\ &= -2u^2v + 2uv - vu - 2u^2v + uv\\ &= -4\alpha v - 4uv + 3uv - vu = -4\alpha v - (uv+vu)\\ &= -4\alpha v - v = -(1+4\alpha)v\end{aligned}$$

und da $1-2u \neq 0$, also

(2.19) $\quad (1-2u)^2 = 1-4u+4u^2 = 1-4u+4u+4\alpha = 1+4\alpha \neq 0,$

folgt bei Beachtung von $v \neq 0$

(2.20) $$((u, v), u) \neq 0.$$

Wäre nun

$$(u, v, R) = 0,$$

so wäre nach (1.2) für beliebige $s, s' \in R$

$$f(s, s', u, v) = ((u, v), s, s'),$$

also nach (1.1)

$$((u, v), s, s') = (ss', u, v) - s'(s, u, v) - (s', u, v)s = 0,$$

d. h.

(2.21) $$((u, v), R, R) = 0 \text{[15]}.$$

Gemäß (1.3) wird dann aber weiter[16])

(2.22) $\quad (u, y, z)((u, v), u) = u f(y, z, u, (u, v)) - f(y, z, u, u(u, v)).$

Wegen (1.1) und (2.21) ist dann

$$f(y, z, u, (u, v)) = (yz, u, (u, v)) - z(y, u, (u, v)) - (z, u, (u, v))y = 0$$

und

$$f(y, z, u, u(u, v)) = (yz, u, u(u, v)) - z(y, u, u(u, v)) - (z, u, u(u, v))y.$$

Aber nach (1.6) und (2.21) ist für beliebiges $s \in R$

$$(s, u, u(u, v)) = (s, u, (u, v))u = 0,$$

---

[14]) Der Existenzbeweis für t ist nicht konstruktiv. Es wäre noch zu überlegen, ob sich auch dieser Beweis konstruktiv führen läßt.

[15]) Siehe auch [1], Beweis zu Lemma 3.2.

[16]) Hier könnte man natürlich das Theorem 3.1 aus [1] benutzen, um zu zeigen, daß ein t mit $(u,v,t) \neq 0$ existieren muß. Da der Beweis des Theorems 3.1 etwas unbequem ist, wurde hier bewußt darauf verzichtet.

also auch

$$f(y, z, u, u(u, v)) = 0,$$

und demnach gemäß (2.22)

$$(u, y, z)\,((u, v), u) = 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu (2.17) und (2.20). Es gibt also mindestens ein t, für das gilt

$$(u, v, t) \neq 0, \text{ q.e.d.}$$

Nach Hilfssatz 2.1 bilden die Elemente $u, v, (u, v, t)$ aus 4. und 5. ein ausgezeichnetes Tripel. Damit ist der Satz 2.1 bewiesen.

Der folgende Hilfssatz nennt eine Eigenschaft ausgezeichneter Tripel, die beim Beweis der Basiseigenschaft der Elemente $1, u, v, vu, w, \ldots, w(vu)$ wesentlich benutzt wird.

Hilfssatz 2.2: *Sind u, v, w und u, v, d ausgezeichnete Tripel eines nullteilerfreien alternativen Ringes R, so gilt*

$$(w^2, d) = 0.$$[17]

Beweis: Nach (1.3) ist

$$(2.23)\qquad (d, v, u)\,(w^2, d) = f(dw^2, d, v, u) - d f(w^2, d, v, u).$$

Behauptung: Es ist für beliebige $s \in R$

$$(2.24)\qquad (u, w^2, s) = (v, w^2, s) = (vu, w^2, s) = 0.$$

Beweis: Unter Beachtung von (1.5), $u\,w + w\,u = w$ und Hilfssatz 1.2 wird

$$(u, w^2, s) = -(w^2, u, s) = -\{w(w, u, s) + (w, u, s)\,w\} = -(w, w, s) = 0.$$

Ebenso liefert (1.5), $wv + vw = 0$ und Hilfssatz 1.2

$$(v, w^2, s) = -(w^2, v, s) = -\{w(w, v, s) + (w, v, s)\,w\} = -(w, 0, s) = 0.$$

Wegen Hilfssatz 1.3 (i), $wu + uw = w$, $vw = -wv$ und $(wv)u + w(vu) = wv$ wird

$$(2.25)\qquad \begin{aligned}(vu)w + w(vu) &= -(vw)u + vw + w(vu)\\ &= (wv)u + w(vu) - wv = 0.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (1.5), (2.25) und Hilfssatz 1.2 beweist man nun genau wie oben noch

$$(vu, w^2, s) = 0, \text{ q.e.d.}$$

Im Hinblick auf (1.1) wird nach (2.24)

$$\begin{aligned}f(w^2, d, v, u) &= f(v, u, w^2, d)\\ &= (vu, w^2, d) - u(v, w^2, d) - (u, w^2, d)\,v = 0.\end{aligned}$$

Analog erhält man, wenn man noch (1.6) beachtet,

$$\begin{aligned}f(dw^2, d, v, u) &= f(v, u, dw^2, d)\\ &= (vu, dw^2, d) - u(v, dw^2, d) - (u, dw^2, d)\,v\\ &= (vu, w^2, d)\,d - u\{(v, w^2, d)\,d\} - \{(u, w^2, d)\,d\}\,v = 0.\end{aligned}$$

---

[17]) Siehe auch [10], § 4, Lemma 1.

so daß nach (2.23)

$$(d, v, u)\,(w^2, d) = 0 \tag{2.26}$$

wird. Da u, v, d ein ausgezeichnetes Tripel ist, folgt

$$(d, v, u) = (dv)\,u - d(vu) = (dv)\,u + (dv)\,u - dv = (dv)\,(2u - 1),$$

also wegen $1 - 2u \neq 0$, $v \neq 0$, $d \neq 0$ sicher

$$(d, v, u) \neq 0 .$$

Jetzt zeigt (2.26) wegen der Nullteilerfreiheit von R

$$(w^2, d) = 0 .$$

3. Beweis des Hauptsatzes

Sei R im folgenden ein echt alternativer Divisionsring. Sei u, v, w ein gemäß 2. konstruiertes ausgezeichnetes Tripel. Ferner sei T der von den drei Elementen u, v, w erzeugte Unter-Ring von R. Sei schließlich H die Menge aller $h \in R$ mit

$$(h, T) = (h, T, T) = 0 . \tag{3.1}$$

Wegen

$$C \subsetneq H \tag{3.2}$$

— C sei das Zentrum von R — ist H jedenfalls nicht leer.

Im folgenden sei zur Abkürzung die Menge der Elemente u, v, w mit S bezeichnet.

Hilfssatz 3.1: *Ein Element $p \in R$ gehört zu H, wenn*

$$(p, S) = 0$$ [18])

ist.

Beweis: Sei also p ein Element mit

$$(p, S) = 0 . \tag{3.3}$$

Wegen $(p, u) = 0$ folgert man mit Hilfssatz 1.2

$$u\,(p, u, v) = (p, u, v)\,u . \tag{3.4}$$

Bei Beachtung von $uv + vu = v$ liefert Hilfssatz 1.2

$$u\,(p, u, v) + (p, u, v)\,u = (p, u, v).$$

also wegen (3.4)

$$(p, u, v) - 2u\,(p, u, v) = (1 - 2u)\,(p, u, v) = 0,$$

daher wegen $(1 - 2u) \neq 0$ und der Nullteilerfreiheit von R

$$(p, u, v) = 0 . \tag{3.5}$$

Ganz analog beweist man

$$(p, u, w) = 0 . \tag{3.6}$$

Im Hinblick auf $(p, u) = 0$ liefert Hilfssatz 1.2 weiter

$$u\,(p, u, wv) = (p, u, wv)\,u .$$

[18]) Siehe auch [4], Lemma 1.

Wegen $(wv)\,u + u(wv) = wv$ (siehe Gleichung (2.3), S. 21) liefert der gleiche Hilfssatz andererseits

$$u(p, u, wv) + (p, u, wv)\,u = (p, u, wv).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgert man wie oben

$$(p, u, wv) = 0.$$

Da aber $wv = -vw$ ist, muß dann auch $(p, u, vw) = 0$ sein und damit wegen der Linearität des Assoziators

$$((w, v), p, u) = 0.$$

Nun wird nach (1.2) wegen $(p, u) = 0$

$$f(p, u, w, v) = ((p, u), w, v) + ((w, v), p, u) = 0, \tag{3.7}$$

und (1.1) liefert im Hinblick auf (3.6)

$$(uv, p, w) = f(u, v, p, w) + v(u, p, w) + (v, p, w)\,u = (v, p, w)\,u,$$

also

$$(p, uv, w) = (p, v, w)\,u.$$

Analog beweist man

$$(p, vu, w) = u(p, v, w).$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert wegen der Linearität des Assoziators und wegen $uv + vu = v$

$$u(p, v, w) + (p, v, w)\,u = (p, uv + vu, w) = (p, v, w). \tag{3.8}$$

Unter Verwendung von (1.1) zeigt sich bei Berücksichtigung von (3.6) und (3.7) weiter

$$(pv, u, w) = f(p, v, u, w) + v(p, u, w) + (v, u, w)\,p = (v, u, w)\,p,$$

also

$$(u, v, w)\,p = (u, pv, w)$$

und analog

$$p(u, v, w) = (u, vp, w),$$

woraus man wegen $pv = vp$ sofort folgert

$$(u, v, w)\,p = p(u, v, w). \tag{3.9}$$

Schließlich liefert (1.1) bei Beachtung von (3.7) noch

$$(pu, v, w) = u(p, v, w) + (u, v, w)\,p$$
$$(up, v, w) = (p, v, w)\,u + p(u, v, w).$$

Berücksichtigt man $up = pu$ sowie (3.9), so sieht man

$$u(p, v, w) = (p, v, w)\,u. \tag{3.10}$$

Aus (3.8) und (3.10) folgert man wie oben beim Beweis von (3.5) und (3.6) $(1 - 2u)\,(p, v, w) = 0$, also

$$(p, v, w) = 0 \tag{3.11}$$

Wegen (3.5), (3.6) und (3.11) und des Alternativgesetzes ist

$$(p, S, S) = 0. \tag{3.12}$$

Mit (3.3) und (3.12) liefert Hilfssatz 1.5 sofort

$$p \in H, \text{ q.e.d.}$$

Hilfssatz 3.2: *Es gilt für beliebige $h, h' \in H$ und beliebige $t, t' \in T$*

(i) $$(h, h', t) = 0$$

(ii) $$(ht, h', t') = 0.$$

Beweis: Zu (i): Beweis in 2 Schritten

a) Behauptung: Es ist für beliebige $h, h' \in H$

$$(h, h', S) = 0.$$

Beweis: Bei Beachtung von $u, v, uv \in T$, $(H, T) = 0$ und (1.2) erhält man bei Verwendung von (1.3) für beliebige $h, h' \in H$:

$$\begin{aligned}(u, h, h')(v, u) &= f(uv, u, h, h') - uf(v, u, h, h')\\ &= -f(uv, h, u, h') + uf(v, h, u, h')\\ &= -((uv, h), u, h') - ((u, h'), uv, h)\\ &\quad + u((v, h), u, h') + u((u, h'), v, h) = 0.\end{aligned}$$

Aber

$$(v, u) = vu - uv = vu + vu - v = v(2u - 1),$$

und wegen $v \neq 0$, $1 - 2u \neq 0$, also

(3.13) $$(v, u) \neq 0$$

folgt

$$(u, h, h') = 0.$$

Vertauscht man in den obigen Gleichungen u und v und beachtet $(u, v) \neq 0$, so erhält man

$$(v, h, h') = 0.$$

Ersetzt man in denselben Gleichungen schließlich noch u durch w und v durch u und beachtet

$$(u, w) = uw - wu = uw + uw - w = (2u - 1)w \neq 0,$$

so erhält man schließlich noch

$$(w, h, h') = 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

b) Behauptung: Es ist

$$(H, H, T) = 0.$$

Beweis: Sei M die Menge aller $m \in T$ mit

(3.14) $$(H, H, m) = 0$$ [19]).

Nach Definition ist dann $M \subseteq T$ und wegen a) $S \subseteq M$. Anwendung von (1.1) liefert für beliebige $m, m' \in M$ und beliebige $h, h' \in H$ bei Beachtung von (3.14)

[19]) Siehe auch Beweise zu Lemma 3.1 in [1].

und (1.2)

$$(mm', h, h') = f(m, m', h, h') + m'(m, h, h') + (m', h, h')\, m$$
$$= -((m, h), m', h') - ((m', h'), m, h),$$

also wegen $m, m' \in T$ und $(H, T) = 0$

$$(m\, m', h, h') = 0.$$

Wegen $mm' \in T - T$ ist ein Ring — ist also M abgeschlossen gegen Multiplikation. Wegen der Linearität des Assoziators ist M auch abgeschlossen gegen Addition und Subtraktion. Daher ist M ein Ring. Wegen $S \subseteq M$ ist der von S erzeugte Ring T in M enthalten, also muß wegen $M \subseteq T$ (s. o.) $T = M$ sein. Daher ist

$$(H, H, T) = 0,$$

womit (i) bewiesen ist.

Zu (ii): Gemäß (1.1) gilt für beliebige $h, h' \in H$ und beliebige $t, t' \in T$

$$(ht, h', t') = f(h, t, h', t') + t(h, h', t') + (t, h', t')\, h,$$

also wegen $(H, T) = 0$, (1.2) sowie $(H, T, T) = (H, H, T) = 0$

$$(ht, h', t') = 0, \text{ q.e.d.}$$

Hilfssatz 3.3: *Die Menge H ist ein Körper*[20]).

Beweis: Daß H abgeschlossen ist gegen Addition und Subtraktion, folgt sofort aus Hilfssatz 3.1 und der Linearität des Kommutators.

Seien h, h' beliebige Elemente von H, s eines der Elemente von S. Bei Berücksichtigung von $(h, s) = (h', s) = 0$ und Hilfssatz 3.2 (i) liefert (1.4)

$$(hh', s) = h(h', s) + (h, s)\, h' + 3(h, h', s) = 0,$$

d. h. wegen Hilfssatz 3.1

$$hh' \in H.$$

H ist also auch abgeschlossen gegen Multiplikation.

Sei $h \neq 0$ ein beliebiges Element von H, s ein beliebiges der Elemente von S. Da R Divisionsring ist, existiert h^{-1}. (1.4) liefert

$$(hh^{-1}, s) = h(h^{-1}, s) + (h, s)\, h^{-1} + 3(h, h^{-1}, s)\,;$$

wegen $(hh^{-1}, s) = (1, s) = 0$, $(H, T) = 0$ und (1.8) muß also

$$h(h^{-1}, s) = 0$$

sein, d. h. wegen $h \neq 0$

$$(h^{-1}, s) = 0.$$

Hilfssatz 3.1 liefert

$$h^{-1} \in H.$$

H ist also auch abgeschlossen gegen Inversenbildung und daher jedenfalls ein Divisionsring.

Seien wiederum h, h' beliebige Elemente von H. Anwendung von (1.1) liefert bei Berücksichtigung von $(h', v, w) = 0$

$$f(uh, h', v, w) = ((uh)h', v, w) - h'(uh, v, w).$$

[20]) Siehe auch [4], Lemma 2.

Unter Beachtung von Hilfssatz 3.2 (i), $f(uh, h', v, w) = f(v, w, uh, h')$ und (1.1) erhält man

$$\begin{aligned}(u(hh'), v, w) &- h'(uh, v, w)\\ &= (vw, uh, h') - w(v, uh, h') - (w, uh, h')\,v,\end{aligned}$$

also wegen Hilfssatz 3.2 (ii), $vw, u, v, w \in T$ und $uh = hu$

$$(u(hh'), v, w) - h'(uh, v, w) = 0. \tag{3.15}$$

Behauptung: Es gilt für beliebige $h \in H$

$$(uh, v, w) = h(u, v, w). \tag{3.16}$$

Beweis: (1.1) liefert bei Beachtung von (1.2) und (3.1) sowie $(v, w) \in T$

$$\begin{aligned}(uh, v, w) &= f(u, h, v, w) + h(u, v, w) + (h, v, w)\,u\\ &= h(u, v, w) + ((u, h), v, w) + ((v, w), u, h)\\ &= h(u, v, w).\end{aligned}$$

Formt man (3.15) unter Beachtung von (3.16) um, so erhält man

$$(hh')\,(u, v, w) - h'\{h(u, v, w)\} = 0,$$

also wegen $(u, v, w) \in T$ und $(H, H, T) = 0$

$$(hh')\,(u, v, w) - (h'h)\,(u, v, w) = 0$$

oder

$$(h, h')\,(u, v, w) = 0.$$

Daß der Assoziator $(u, v, w) = -(w, v, u)$ aus den Elementen eines ausgezeichneten Tripels von Null verschieden ist, wurde bereits gezeigt (s. Seite 27, oben).
Dann muß aber wegen der Nullteilerfreiheit von R

$$(h, h') = 0$$

sein, d. h. die Multiplikation der Elemente von H ist kommutativ.

Seien schließlich h, h', h'' beliebige Elemente von H. Gemäß (1.1) ist wegen $(H, H, T) = 0$ und $(h, v, u) = 0$

$$\begin{aligned}f(hv, u, h', h'') &= ((hv)\,u, h', h'') - u(hv, h', h'')\\ &= (h(vu), h', h'') - u(hv, h', h'').\end{aligned} \tag{3.17}$$

Weiter ist wegen $(H, T) = 0$

$$f(hv, u, h', h'') = -f(hv, h', u, h'') = -((hv, h'), u, h''),$$

aber gemäß (1.4) ist wegen $(H, T) = 0$, $(h, h') = 0$ und $(H, H, T) = 0$

$$(hv, h') = h(v, h') + (h, h')\,v + 3(h, v, h') = 0,$$

also

$$f(hv, u, h', h'') = 0$$

und daher nach (3.17)

$$(h(vu), h', h'') - u(hv, h', h'') = 0. \tag{3.18}$$

Behauptung: Es gilt für beliebiges $t \in T$

$$(ht, h', h'') = t(h, h', h''). \tag{3.19}$$

Beweis: (1.1) liefert bei Beachtung von $(H, H, T) = (H, T) = 0$, (1.2) und $(h', h'') = 0$

$$\begin{aligned}(ht, h', h'') &= f(h, t, h', h'') + t(h, h', h'') + (t, h', h'')\, h \\ &= t(h, h', h'') + ((h, t), h', h'') + ((h', h''), h, t) \\ &= t(h, h', h'').\end{aligned}$$

Formt man (3.18) gemäß (3.19) um, so erhält man

$$(vu)\,(h, h', h'') - u\{v\,(h, h', h'')\} = 0. \tag{3.20}$$

Wegen der Abgeschlossenheit von H gegen Multiplikation und Subtraktion ist $(h, h', h'') \in H$, und mit $(H, T, T) = 0$ folgt aus (3.20)

$$(vu)\,(h, h', h'') - (uv)\,(h, h', h'') = 0$$

oder

$$(v, u)\,(h, h', h'') = 0,$$

also wegen (3.13)

$$(h, h', h'') = 0,$$

d. h. die Multiplikation der Elemente von H ist assoziativ.

Also ist H ein Körper.

Satz 3.1: *Die Elemente*

$$e_0 = 1;\; e_1 = u;\; e_2 = v;\; e_3 = vu;\; e_4 = w;\; e_5 = wu;\; e_6 = wv;\; e_7 = w(vu)$$[21])

verhalten sich bei der Multiplikation wie die Basiselemente einer Cayley-Dickson-*Algebra. Die Elemente*

$$e_1^2 - e_1 = \alpha;\quad e_2^2 = \beta;\quad e_4^2 = \gamma$$

gehören zu H, und es ist

$$1 + 4\alpha \neq 0;\quad \beta \neq 0;\quad \gamma \neq 0.$$

Beweis: Die Beziehung $1 + 4\alpha \neq 0$ wurde bereits bewiesen (s. (2.19)). Die Beziehungen $\beta \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ sind wegen $v \neq 0$, $w \neq 0$ trivial.

Es soll nun gezeigt werden, daß α, β, γ zu H gehören. Sicherlich ist

$$(\alpha, u) = (u^2 - u, u) = 0.$$

Durch einfache Rechnung findet man

$$\begin{aligned}\alpha v = (u^2 - u)\, v &= u(uv) - uv = u(v - vu) - uv \\ &= -(uv)\, u = (vu - v)\, u = vu^2 - vu = v(u^2 - u) \\ &= v\alpha\end{aligned}$$

also

$$(\alpha, v) = 0$$

[21]) Diese Bezeichnung ist für die folgenden Überlegungen praktisch.

und analog, indem man v durch w ersetzt,

$$(\alpha, w) = 0.$$

Nach Hilfssatz 3.1 ist also

$$e_1^2 - e_1 = \alpha \in H.$$

Ganz analog verifiziert man

$$e_2^2 = \beta \in H; \quad e_4^2 = \gamma \in H.$$

Die Berechnung der Multiplikationstafel der Elemente $e_0, \ldots, e_7$ bereitet prinzipiell keine Schwierigkeiten. Es möge daher genügen, einige Beispiele vorzurechnen.

Nach der obigen Bezeichnung ist

$$e_2e_1 = e_3; \quad e_4e_1 = e_5; \quad e_4e_2 = e_6; \quad e_4e_3 = e_7.$$

Nach der Definition der ausgezeichneten Tripel ist

$$e_1e_2 = e_2 - e_2e_1 = e_2 - e_3; \; e_1e_4 = e_4 - e_4e_1 = e_4 - e_5; \; e_2e_4 = -e_4e_2 = -e_6$$

$$e_6e_1 = (e_4e_2)\,e_1 = e_4e_2 - e_4(e_2e_1) = e_6 - e_7.$$

Wegen des Alternativgesetzes wird

$$e_2e_3 = e_2(e_2e_1) = \beta e_1,$$

und analog behandelt man die Produkte $e_4e_5 = e_4(e_4e_1) = \gamma e_1$; $e_4e_6 = e_4(e_4e_2) = \gamma e_2$; $e_6e_2 = (e_4e_2)\,e_2 = \beta e_4$; $e_4e_7 = e_4(e_4e_3) = \gamma e_3$.

Mit Rücksicht auf $e_1^2 = \alpha + e_1$ folgt

$$e_3e_1 = (e_2e_1)\,e_1 = e_2(\alpha + e_1) = \alpha e_2 + e_3$$

und analog

$$e_5e_1 = \alpha e_4 + e_5.$$

Im Hinblick auf $e_3 = e_2 - e_1e_2$ ergibt sich

$$e_3e_2 = (e_2 - e_1e_2)\,e_2 = \beta - \beta e_1.$$

Wegen (1.7) wird $(e_3, e_2, e_1) = (e_2e_1, e_2, e_1) = 0$
und daher wegen $e_3e_2 = \beta - \beta e_1$

$$e_3^2 = e_3(e_2e_1) = (e_3e_2)\,e_1 = (\beta - \beta e_1)\,e_1 = \beta e_1 - \beta(\alpha + e_1) = -\alpha\beta,$$

und analog folgt $e_5^2 = -\alpha\gamma$ sowie $e_6^2 = -\beta\gamma$.

Wegen $e_2e_4 + e_4e_2 = 0$ ist nach Hilfssatz 1.3 (ii)

$$e_2e_5 = e_2(e_4e_1) = -e_4(e_2e_1) = -e_7$$

und daher

$$e_2e_7 = -e_2(e_2e_5) = -\beta e_5.$$

Mit $e_1e_2 + e_2e_1 = e_2$ liefert Hilfssatz 1.3 (i) bei Beachtung von $e_6e_1 = e_6 - e_7$

$$e_5e_2 = (e_4e_1)\,e_2 = -(e_4e_2)\,e_1 + e_4e_2 = -e_6e_1 + e_6 = e_7.$$

Nach dem gleichen Hilfssatz wegen $e_1e_4 + e_4e_1 = e_4$

$$e_1e_6 = e_1(e_4e_2) = -e_4(e_1e_2) + e_4e_2 = -e_4(e_2 - e_3) + e_4e_2 = e_4e_3 = e_7$$

und somit

$$e_1e_7 = e_1(e_1e_6) = (\alpha + e_1)\,e_6 = \alpha e_6 + e_1e_6 = \alpha e_6 + e_7.$$

Wenn man auf diese Weise alle möglichen Produkte berechnet, erhält man eine Multiplikationstabelle vom Typ der Tabelle 1.

Tabelle 1

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$\alpha + e_1$	$e_2 - e_3$	$-\alpha e_2$	$e_4 - e_5$	$-\alpha e_4$	e_7	$\alpha e_6 + e_7$
e_2	e_2	e_3	β	βe_1	$-e_6$	$-e_7$	$-\beta e_4$	$-\beta e_5$
e_3	e_3	$\alpha e_2 + e_3$	$\beta - \beta e_1$	$-\alpha\beta$	$-e_7$	$-\alpha e_6 - e_7$	$-\beta e_4 + \beta e_5$	$\alpha\beta e_4$
e_4	e_4	e_5	e_6	e_7	γ	γe_1	γe_2	γe_3
e_5	e_5	$\alpha e_4 + e_5$	e_7	$\alpha e_6 + e_7$	$\gamma - \gamma e_1$	$-\alpha\gamma$	$\gamma e_2 - \gamma e_3$	$-\alpha\gamma e_2$
e_6	e_6	$e_6 - e_7$	βe_4	$\beta e_4 - \beta e_5$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_2 + \gamma e_3$	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma + \beta\gamma e_1$
e_7	e_7	$-\alpha e_6$	βe_5	$-\alpha\beta e_4$	$-\gamma e_3$	$\alpha\gamma e_2$	$-\beta\gamma e_1$	$\alpha\beta\gamma$

Das ist die Multiplikationstabelle einer CAYLEY-DICKSON-Algebra[22]). Damit ist der Satz 3.1 bewiesen.

Hilfssatz 3.4: *Jeder Assoziator* (e_1, e_2, t) *mit beliebigem* $t \in R$ *läßt sich darstellen in der Form*

$$(e_1, e_2, t) = \sum_{\nu=4}^{7} \alpha_\nu e_\nu$$

mit gewissen $\alpha_\nu \in H$[23]).

Beweis: Ist $(e_1, e_2, t) = 0$, so ist die Behauptung trivial. Ist dagegen $(e_1, e_2, t) \neq 0$, so bilden nach Hilfssatz 2.1 die Elemente $e_1, e_2, (e_1, e_2, t) = d$ ein ausgezeichnetes Tripel. Also ist $e_1 d + d e_1 = d$. Mit $e_1 e_4 + e_4 e_1 = e_4$ liefert daher Hilfssatz 1.4 (ii)

$$(e_4 d + d e_4, e_1) = (d, e_4) + (e_4, d) = 0.$$

Insbesondere ist auch $e_2 d + d e_2 = 0$. Mit $e_2 e_4 + e_4 e_2 = 0$ liefert derselbe Hilfssatz

$$(e_4 d + d e_4, e_2) = (d, 0) + (e_4, 0) = 0.$$

Wegen Hilfssatz 2.2, also $e_4^2\, d = d e_4^2$ wird

$$(e_4 d + d e_4)\, e_4 = e_4 d e_4 + d e_4^2 = e_4 d e_4 + e_4^2\, d = e_4 (d e_4 + e_4 d),$$

also

$$(e_4 d + d e_4, e_4) = 0.$$

Daher ist nach Hilfssatz 3.1

(3.21) $$e_4 d + d e_4 = h_1 \in H.$$

Man setze

(3.22) $$d_1 = d - h_1\, \gamma^{-1} e_4.$$

---

[22]) Bei der SCHAFERschen Definition dieser Algebren (siehe Fußnote 2) wird keine Multiplikationstabelle für die Basiselemente angegeben. SCHAFER definiert die CAYLEY-DICKSON-Algebren als Biquaternionenalgebren. Man kann jedoch auf Grund dieser Definition leicht eine Basis angeben und ihre Multiplikationstabelle berechnen. Führt man diese Rechnungen in bekannter Weise aus, so erhält man eine Tabelle vom Typ der Tabelle 1.

[23]) Siehe auch [10], § 4, Lemma 2.

Wegen Hilfssatz 3.3 ist dabei

(3.23) $$h_1\,\gamma^{-1} \in H.$$

Unter Berücksichtigung von $(H, T) = (H, T, T) = 0$, $e_1 d + d e_1 = d$, $e_1 e_4 + e_4 e_1 = e_4$ verifiziert man leicht

(3.24) $$d_1 e_1 + e_1 d_1 = d e_1 + e_1 d - h_1\,\gamma^{-1}(e_4 e_1 + e_1 e_4) = d - h_1\,\gamma^{-1} e_4 = d_1,$$

und analog zeigt man

(3.25) $$d_1 e_2 + e_2 d_1 = 0.$$

Schließlich wird wegen $e_4^2 = \gamma$ und (3.21)

$$d_1 e_4 + e_4 d_1 = d e_4 + e_4 d - h_1\,\gamma^{-1} e_4^2 - h_1\,\gamma^{-1} e_4^2 = h_1 - 2 h_1,$$

also

(3.26) $$d_1 e_4 + e_4 d_1 = -h_1.$$

Nach Tabelle 1 ist $e_5 e_1 + e_1 e_5 = e_5$. Mit (3.24) liefert daher Hilfssatz 1.4 (ii)

$$e_5 d_1 + d_1 e_5, e_1) = (d_1, e_5) + (e_5, d_1) = 0.$$

Unter Verwendung von $e_5 e_2 + e_2 e_5 = 0$ und (3.25) folgt analog

$$(e_5 d_1 + d_1 e_5, e_2) = (d_1, 0) + (e_5, 0) = 0.$$

Nach Tabelle 1 ist weiter $e_5 e_4 + e_4 e_5 = \gamma$. Mit (3.26) liefert Hilfssatz 1.4 (ii)

$$(e_5 d_1 + d_1 e_5, e_4) = (d_1, \gamma) + (e_5, -h_1).$$

Wegen $h_1 \in H$ ist $(e_5, -h_1) = 0$. Weiter ist wegen (3.23) und $(H, T) = (H, H, T) = 0$ und Hilfssatz 3.3 nach (1.4)

$$(h_1\,\gamma^{-1} e_4, \gamma) = h_1\,\gamma^{-1}(e_4, \gamma) + (h_1\,\gamma^{-1}, \gamma)\, e_4 + 3(h_1\,\gamma^{-1}, e_4, \gamma) = 0,$$

also wegen $(e_4^2, d) = (\gamma, d) = 0$

$$(d_1, \gamma) = (d, \gamma) - (h_1\,\gamma^{-1} e_4, \gamma) = 0.$$

Also ist

$$(e_5 d_1 + d_1 e_5, e_4) = 0.$$

Hilfssatz 3.1 liefert

(3.27) $$e_5 d_1 + d_1 e_5 = h_2 \in H.$$

Man setze

(3.28) $$d_2 = d_1 + h_2 (\alpha\gamma)^{-1} e_5.$$

Wegen Hilfssatz 3.3 ist dabei

(3.29) $$h_2 (\alpha\,\gamma)^{-1} \in H.$$

Wie oben verifiziert man unter Verwendung von $(H, T) = (H, T, T) = 0$, (3.24), (3.25), (3.26), $e_5 e_1 + e_1 e_5 = e_5$, $e_5 e_2 + e_2 e_5 = 0$, $e_5 e_4 + e_4 e_5 = \gamma$, $e_5^2 = -\alpha\,\gamma$ und (3.27) leicht:

(3.30) $$\begin{gathered} d_2 e_1 + e_1 d_2 = d_2; \quad d_2 e_2 + e_2 d_2 = 0; \\ d_2 e_4 + e_4 d_2 = -h_1 + h_2 \alpha^{-1} = h' \in H; \quad d_2 e_5 + e_5 d_2 = -h_2. \end{gathered}$$

Unter Verwendung von Tabelle 1, (3.30) und Hilfssatz 1.4 (ii) zeigt sich

$$(e_6 d_2 + d_2 e_6, e_1) = (d_2, e_6) + (e_6, d_2) = 0$$
$$(e_6 d_2 + d_2 e_6, e_2) = (d_2, 0) + (e_6, 0) = 0$$
$$(e_6 d_2 + d_2 e_6, e_4) = (d_2, 0) + (e_6, h') = 0,$$

also nach Hilfssatz 3.1

(3.31) $$e_6 d_2 + d_2 e_6 = h_3 \in H.$$

Man setze

(3.32) $$d_3 = d_2 + h_3 (\beta\,\gamma)^{-1} e_6.$$

Dabei ist wegen Hilfssatz 3.3

(3.33) $$h_3 (\beta\,\gamma)^{-1} \in H.$$

Unter Verwendung von $(H, T) = (H, T, T) = 0$, (3.30) und Tab. 1 verifiziert man leicht

(3.34) $$d_3 e_1 + e_1 d_3 = d_3; \quad d_3 e_2 + e_2 d_3 = 0; \quad d_3 e_4 + e_4 d_3 = h';$$

(3.35) $$d_3 e_5 + e_5 d_3 = -h_2; \quad d_3 e_6 + e_6 d_3 = -h_3.$$

Mit Hilfe von Tab. 1, (3.34) und Hilfssatz 1.4 (ii) erhält man:

$$(e_7 d_3 + d_3 e_7, e_1) = (d_3, e_7) + (e_7, d_3) = 0$$
$$(e_7 d_3 + d_3 e_7, e_2) = (d_3, 0) + (e_7, 0) = 0$$
$$(e_7 d_3 + d_3 e_7, e_4) = (d_3, 0) + (e_7, h') = 0,$$

also wegen Hilfssatz 3.1

(3.36) $$e_7 d_3 + d_3 e_7 = h_4 \in H.$$

Man setze

(3.37) $$d_4 = d_3 - h_4 (\alpha\,\beta\,\gamma)^{-1} e_7,$$

wobei

(3.38) $$h_4 (\alpha\,\beta\,\gamma)^{-1} \in H.$$

Im Hinblick auf $(H, T) = (H, T, T) = 0$, (3.34), (3.35) und Tab. 1 zeigt sich

(3.39) $$d_4 e_1 + e_1 d_4 = d_4; \quad d_4 e_2 + e_2 d_4 = 0; \quad d_4 e_4 + e_4 d_4 = h'$$

(3.40) $$d_4 e_5 + e_5 d_4 = -h_2; \quad d_4 e_6 + e_6 d_4 = -h_3 + h_4 \alpha^{-1} = h'' \in H.$$

Wegen $e_7^2 = \alpha\,\beta\,\gamma$ und (3.36) erhält man außerdem

$$d_4 e_7 + e_7 d_4 = -h_4.$$

Bei Beachtung von $e_6 e_1 = e_6 - e_7$ folgt schließlich noch

$$d_4 (e_6 e_1) + (e_6 e_1)\, d_4 = d_4 e_6 + e_6 d_4 - (e_7 d_4 + d_4 e_7) = h'' + h_4,$$

also

(3.41) $$d_4 (e_6 e_1) + (e_6 e_1)\, d_4 = h''' \in H.$$

Setzt man nun aus (3.32), (3.28) und (3.22) in (3.37) ein, so erhält man

$$d_4 = d - \{h_1\, \gamma^{-1} e_4 - h_2 (\alpha\,\gamma)^{-1} e_5 - h_3 (\beta\,\gamma)^{-1} e_6 + h_4 (\alpha\,\beta\,\gamma)^{-1} e_7\},$$

also wegen (3.38), (3.33), (3.29) und (3.23)

$$d_4 = d - \sum_{\nu=4}^{7} \overline{\alpha}_\nu e_\nu \qquad \text{mit gewissen } \overline{\alpha}_\nu \in H. \tag{3.42}$$

Da die Elemente e_1, e_2, d ein ausgezeichnetes Tripel bilden, ist nach Tab. 1 insbesondere (d ist mit e_4 zu identifizieren)

$$e_2(de_1) = -(de_1)e_2. \tag{3.43}$$

Unter Verwendung von (3.42), der Tab. 1; $(H, T, T) = 0$ und (3.43) zeigt man ohne Schwierigkeiten sofort

$$e_2(d_4e_1) = -(d_4e_1)\,e_2. \tag{3.44}$$

Bei Beachtung von (3.39), (3.40), (3.44), der Tab. 1 und Hilfssatz 1.3 zeigt sich

$$\begin{aligned}(e_6, e_1, d_4) &= (e_6e_1)\,d_4 - e_6(e_1d_4) = (e_6 - e_7)\,d_4 + (e_4e_2)\,(d_4e_1) - e_6d_4\\ &= -e_7d_4 - \{e_4(d_4e_1)\}e_2 = -e_7d_4 - \{-d_4(e_4e_1) + h'e_1\}\,e_2\\ &= -e_7d_4 + (d_4e_5)\,e_2 - (h'e_1)\,e_2\\ &= -e_7d_4 + (-e_5d_4 - h_2)\,e_2 - h'(e_1e_2)\\ &= -e_7d_4 - (e_5d_4)\,e_2 - h_2e_2 - h'(e_2 - e_3)\\ &= -e_7d_4 + (e_5e_2)\,d_4 - (h_2 + h')\,e_2 + h'e_3 = -(h_2 + h')\,e_2 + h'e_3.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Andererseits ist nach Hilfssatz 1.4 (i) wegen $d_4e_1 + e_1d_4 = d_4$ und $d_4e_6 + e_6d_4 = h''$

$$(e_6, e_1, d_4) = (d_4, e_6, e_1) = (e_6e_1, d_4) - e_6d_4 + h''e_1.$$

aber nach (3.41) ist

$$(e_6e_1, d_4) = (e_6e_1)\,d_4 - d_4(e_6e_1) = 2(e_6e_1)\,d_4 - h'''$$

und daher

$$(e_6, e_1, d_4) = \{2(e_6e_1) - e_6\}d_4 - h''' + h''e_1. \tag{3.46}$$

Ein Vergleich von (3.45) und (3.46) lehrt

$$\{2(e_6e_1) - e_6\}\,d_4 = h''' - h''e_1 - (h_2 + h')\,e_2 + h'e_3$$

oder wegen $2(e_6e_1) - e_6 = 2(e_6 - e_7) - e_6 = e_6 - 2e_7$

$$(e_6 - 2e_7)\,d_4 = \sum_{\nu=0}^{3} \alpha'_\nu e_\nu \qquad \text{mit gewissem } \alpha'_\nu \in H. \tag{3.47}$$

Wegen $e_6 - 2e_7 = e_6(2e_1 - 1) = (e_4e_2)\,(2e_1 - 1)$ und $1 - 2e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$, $e_4 \neq 0$ ist $e_6 - 2e_7 \neq 0$. Daher existiert $(e_6 - 2e_7)^{-1}$ und nach (1.9) ist

$$\{(e_6 - 2e_7)^{-1}\}^2 = \{(e_6 - 2e_7)^2\}^{-1}.$$

Daher ist

$$(e_6 - 2e_7)^{-1} = \{(e_6 - 2e_7)^2\}^{-1}(e_6 - 2e_7).$$

Aber nach Tab. 1 ist, wie man leicht nachrechnet,

$$\{(e_6 - 2e_7)^2\}^{-1} = \{(1 + 4\alpha)\,(\beta\,\gamma)\}^{-1} = h \in H.$$

so daß also gilt

$$(e_6 - 2e_7)^{-1} = he_6 - 2he_7. \tag{3.48}$$

Multipliziert man (3.47) von links mit $(e_6 - 2e_7)^{-1}$ und beachtet (3.48) sowie (1.8), so folgt

(3.49) $$d_4 = (he_6) \sum_{\nu=0}^{3} \alpha'_\nu e_\nu - (2\,he_7) \sum_{\nu=0}^{3} \alpha'_\nu e_\nu .$$

Nun ist nach Hilfssatz 3.2 wegen $(H, T) = 0$ für beliebige $t, t' \in T$ und beliebige $h, h' \in H$

$$(ht)\,(h't') = (hth')t' = (hh't)\,t'$$

und wegen $(H, T, T) = 0$ und $hh' \in H$

(3.50) $$(ht)\,(h't') = (hh')\,(tt').$$

Formt man (3.49) gemäß dieser Gleichung und unter Beachtung von $(H, H, T) = (H, T) = 0$ um, so erhält man

(3.51) $$d_4 = \sum_{\nu=0}^{3} (h\alpha'_\nu)\,(e_6 e_\nu) - \sum_{\nu=0}^{3} (2\,h\alpha'_\nu)\,(e_7 e_\nu).$$

Im Hinblick auf $h\alpha'_\nu \in H$ sowie $2\alpha'_\nu h \in H$ und Tab. 1 liest man aus dieser Gleichung sofort ab

(3.52) $$d_4 = \sum_{\nu=4}^{7} \alpha^*_\nu e_\nu \qquad \text{mit gewissen } \alpha^*_\nu \in H .$$

Setzt man nun aus (3.52) in (3.42) ein, so folgt

$$d = \sum_{\nu=4}^{7} (\alpha^*_\nu + \overline{\alpha}_\nu)\, e_\nu = \sum_{\nu=4}^{7} \alpha_\nu e_\nu \quad \text{mit gewissen } \alpha_\nu \in H, \text{ q.e.d.}$$

Satz 3.2: *Jedes beliebige Element $d \in R$ läßt sich darstellen in der Form*

$$d = \sum_{\nu=0}^{7} \alpha_\nu e_\nu \qquad \textit{mit gewissen } \alpha_\nu \in H^{24}).$$

Beweis: Für beliebiges $d \in R$ ist nach (1.1)

$$f(d, e_4, e_1, e_2) = (de_4, e_1, e_2) - e_4(d, e_1, e_2) - (e_4, e_1, e_2)\, d,$$

also nach (1.2)

$$\begin{aligned}(de_4, e_1, e_2) - (e_4 d, e_1, e_2) + ((e_1, e_2), d, e_4) \\ = (de_4, e_1, e_2) - e_4(d, e_1, e_2) - (e_4, e_1, e_2)\, d,\end{aligned}$$

also

(3.53) $$((e_1, e_2), d, e_4) + (e_4, e_1, e_2)\, d = (e_1, e_2, e_4 d) - e_4(e_1, e_2, d).$$

Nun ist nach Tab. 1 (wie man leicht nachrechnet)

(3.54) $$(e_4, e_1, e_2) = 2e_7 - e_6$$

und

(3.55) $$((e_1, e_2), d, e_4) = (e_4, e_2, d) - 2(e_4, e_3, d).$$

[24]) Siehe auch [10], § 4, Lemma zu Satz 3 und [4], Lemma 4.

Daher wird, wie man durch Entwicklung der betreffenden Assoziatoren unter Verwendung der Tab. 1 leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned}((e_1, e_2), d, e_4) + (e_4, e_1, e_2)\, d \\ = (e_4, e_2, d) - 2(e_4, e_3, d) + 2e_7 d - e_6 d \\ = e_4\{(2e_3 - e_2)\, d\},\end{aligned}$$

und wenn man dieses Ergebnis in (3.53) einsetzt,

$$e_4\{(2e_3 - e_2)\, d\} = (e_1, e_2, e_4 d) - e_4(e_1, e_2, d). \tag{3.56}$$

Nach Hilfssatz 3.4 ist

$$(e_1, e_2, e_4\, d) = \sum_{\nu=4}^{7} \beta_\nu e_\nu \qquad \text{mit gewissen } \beta_\nu \in H, \tag{3.57}$$

ebenso

$$(e_1, e_2, d) = \sum_{\nu=4}^{7} \beta'_\nu e_\nu \qquad \text{mit gewissen } \beta'_\nu \in H$$

und daher wegen $(H, T) = (H, T, T) = 0$

$$e_4(e_1, e_2, d) = \sum_{\nu=4}^{7} \beta'_\nu (e_4 e_\nu).$$

Da $e_4^2 = \gamma;\ e_4 e_5 = \gamma e_1;\ e_4 e_6 = \gamma e_2;\ e_4 e_7 = \gamma e_3$, folgt

$$e_4(e_1, e_2, d) = -\sum_{\nu=0}^{3} \beta_\nu e_\nu \qquad \text{mit gewissen } \beta_\nu \in H. \tag{3.58}$$

Setzt man aus (3.57) und (3.58) in (3.56) ein, so folgt

$$e_4\{(2e_3 - e_2)\, d\} = \sum_{\nu=0}^{7} \beta_\nu e_\nu \qquad \text{mit gewissen } \beta_\nu \in H. \tag{3.59}$$

Da $e_4 \neq 0$, existiert e_4^{-1}, und wie beim Beweis von Hilfssatz 3.4 zeigt man

$$e_4^{-1} = \gamma^{-1} e_4.$$

Multipliziert man (3.59) von links mit $e_4^{-1} = \gamma^{-1} e_4$ und beachtet (1.8), $(H, T) = 0$, (3.50), Hilfssatz 3.3, Hilfssatz 3.2 und Tab. 1, so erhält man

$$(2e_3 - e_2)\, d = \sum_{\nu=0}^{7} (\gamma^{-1} \beta_\nu)(e_4 e_\nu) = \sum_{\nu=0}^{7} \alpha'_\nu e_\nu \quad \text{mit gewissen } \alpha'_\nu \in H. \tag{3.60}$$

Wegen $2e_3 - e_2 = 2e_2 e_1 - e_2 = e_2(2e_1 - 1)$ und $(1 - 2e_1) \neq 0$, $e_2 \neq 0$ ist $2e_3 - e_2 \neq 0$, und es existiert $(2e_3 - e_2)^{-1}$. Wie oben zeigt man unter Verwendung der Tab. 1

$$(2e_3 - e_2)^{-1} = \{-\beta(1 + 4\alpha)\}^{-1}(2e_3 - e_2). \tag{3.61}$$

Multipliziert man nun (3.60) unter Beachtung von (3.61) von links mit $(2e_3 - e_2)^{-1}$, so erhält man wegen (1.8), $(H, T) = 0$, (3.50), Hilfssatz 3.3, Hilfssatz 3.2 und Tab. 1 durch dieselben Rechnungen wie oben

$$d = \sum_{\nu=0}^{7} (2\{-\beta(1 + 4\alpha)\}^{-1}\alpha'_\nu)(e_3 e_\nu) - \sum_{\nu=0}^{7} (\{-\beta(1 + 4\alpha)\}^{-1}\alpha'_\nu)(e_2 e_\nu) = \sum_{\nu=0}^{7} \alpha_\nu e_\nu$$

mit gewissen $\alpha_\nu \in H$, w.z.b.w.

Satz 3.3: *Der Körper H fällt mit dem Zentrum C von R zusammen. R ist endliche Algebra über seinem Zentrum C.*

Beweis: Mit Hilfe von (1.4), $(H, T) = 0$, Hilfssatz 3.3 sowie $(H, H, T) = 0$ folgt

$$(3.62) \qquad (h\,t, h') = h(t, h') + (h, h')\,t + 3\,(h, t, h') = 0$$

für beliebige $h, h' \in H$ und beliebiges $t \in T$.

Unter Verwendung von (1.1), (1.2), $(H, T) = (H, H, T) = 0$ sowie Hilfssatz 3.3 folgt

$$(3.63) \qquad \begin{aligned}(h\,t, h', h'') &= f(h, t, h', h'') + t(h, h', h'') + (t, h', h'')\,h \\ &= ((h, t), h', h'') + ((h', h''), h, t) = 0\end{aligned}$$

für beliebige $h, h', h'' \in H$ und beliebiges $t \in T$.

Unter Heranziehung von (1.1), (1.2), $(H, T) = 0$, (3.63), (3.62) sowie Hilfssatz 3.2 (ii) zeigt man schließlich noch

$$(3.64) \qquad \begin{aligned}(h\,t, h'\,t', h'') &= f(h, t, h'\,t', h'') + t(h, h'\,t', h'') + (t, h'\,t', h'')\,h \\ &= ((h, t), h'\,t', h'') + ((h'\,t', h''), h, t) = 0\end{aligned}$$

für beliebige $h, h', h'' \in H$ und beliebige $t, t' \in T$.

Unter Berücksichtigung von Satz 3.2 der Linearität des Kommutators, der Kommutativität von H und (3.62) erhält man für ein beliebiges Element $x \in R$ und ein beliebiges Element $h \in H$

$$(h, x) = \left(h, \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{7} \alpha_\nu e_\nu\right) = (h, \alpha_0) + \sum_{\nu=1}^{7} (h, \alpha_\nu e_\nu) = 0,$$

also

$$(h, R) = 0.$$

Im Hinblick auf Satz 3.2, die Linearität des Assoziators, die Assoziativität von H sowie (3.63) und (3.64) zeigt sich, daß für beliebige $x, y \in R$ und beliebiges $h \in H$ gilt

$$(h, x, y) = \left(h, \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{7} \alpha_\nu e_\nu, \beta_0 + \sum_{\lambda=1}^{7} \beta_\lambda e_\lambda\right)$$

$$= (h, \alpha_0, \beta_0) + \sum_{\nu=1}^{7} (h, \alpha_\nu e_\nu, \beta_0) + \sum_{\lambda=1}^{7} (h, \alpha_0, \beta_\lambda e_\lambda) + \sum_{\nu=1}^{7} \sum_{\lambda=1}^{7} (h, \alpha_\nu e_\nu, \beta_\lambda e_\lambda) = 0,$$

also

$$(h, R, R) = 0.$$

Folglich gehört jedes Element von H zum Zentrum C, d. h.

$$H \subseteq C,$$

mit Rücksicht auf (3.2) also

$$C = H.$$

Aus dieser Gleichung und Satz 3.2 folgt aber sofort: R ist endliche Algebra über seinem Zentrum.

Satz 3.4: *Die Elemente $e_0, e_1, \ldots, e_7$ sind linear unabhängig über dem Zentrum C von R.*

Beweis: Sei

$$\sum_{\nu=0}^{7} \alpha_\nu e_\nu = 0 \text{ für gewisse } \alpha_\nu \in H. \tag{3.65}$$

Multipliziert man (3.65) einmal von rechts und einmal von links mit e_1 und addiert die Resultate, so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{7} \alpha_\nu (e_\nu e_1 + e_1 e_\nu) = 0.$$

Daraus folgt wegen $e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1$; $e_\nu e_1 + e_1 e_\nu = e$ für $\nu = 2, \ldots, 7$ und $e_1^2 = \alpha + e_1$

$$2\alpha_0 e_1 + 2\alpha_1 \alpha + 2\alpha_1 e_1 + \sum_{\nu=2}^{7} \alpha_\nu e_\nu = (2\alpha_0 + \alpha_1) e_1 + 2\alpha_1 \alpha + \sum_{\nu=1}^{7} \alpha_\nu e_\nu = 0,$$

aber nach (3.65) ist $\sum_{\nu=1}^{7} \alpha_\nu e_\nu = -\alpha_0$, also

$$(2\alpha_0 + \alpha_1) e_1 + 2\alpha_1 \alpha - \alpha_0 = 0. \tag{3.66}$$

Wegen $(e_1, e_2, e_4) \neq 0$ ist sicher $e_1 \notin C$. Daraus folgt

$$2\alpha_0 + \alpha_1 = 0; \tag{3.67}$$

denn wäre $2\alpha_0 + \alpha_1 \neq 0$, so existierte $(2\alpha_0 + \alpha_1)^{-1}$, und es wäre

$$e_1 = -(2\alpha_0 + \alpha_1)^{-1}(2\alpha_1 \alpha - \alpha_0) \in C.$$

Wegen (3.67) folgt aus (3.66)

$$2\alpha_1 \alpha - \alpha_0 = 0, \tag{3.68}$$

also auch

$$4\alpha_1 \alpha - 2\alpha_0 = 0.$$

Addiert man diese Gleichung zu (3.67), so folgt

$$(1 + 4\alpha)\alpha_1 = 0,$$

also wegen $(1 + 4\alpha) \neq 0$

$$\alpha_1 = 0.$$

Jetzt liefert (3.68)

$$\alpha_0 = 0.$$

Folglich ist gemäß (3.65)

$$\sum_{\nu=2}^{7} \alpha_\nu e_\nu = 0. \tag{3.69}$$

Multipliziert man diese Gleichung einmal von rechts und einmal von links mit e_2 und addiert die Resultate, so folgt

$$\sum_{\nu=2}^{7} \alpha_\nu (e_\nu e_2 + e_2 e_\nu) = 0, \tag{3.70}$$

wegen $e_3 e_2 + e_2 e_3 = \beta$ und $e_\nu e_2 + e_2 e_\nu = 0$ für $\nu = 4, \ldots, 7$ also

$$\beta(2\alpha_2 + \alpha_3) = 0,$$

also wegen $\beta \neq 0$

$$2\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \tag{3.71}$$

Behandelt man (3.69) in entsprechender Weise mit e_3, so folgt analog

$$\beta(\alpha_2 - 2\alpha\alpha_3) = 0,$$

also wegen $\beta \neq 0$

$$\alpha_2 - 2\alpha\alpha_3 = 0, \tag{3.72}$$

demnach auch

$$-2\alpha_2 + 4\alpha\alpha_3 = 0.$$

Addiert man diese Gleichung zu (3.71), so folgt

$$(1 + 4\alpha)\,\alpha_3 = 0,$$

also wegen $(1 + 4\alpha) \neq 0$

$$\alpha_3 = 0$$

und demnach wegen (3.72)

$$\alpha_2 = 0.$$

Ganz analog zeigt man noch

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0.$$

Daher sind die Elemente $e_0, e_1, \ldots, e_7$ linear unabhängig über C.

Nach den Sätzen 3.2, 3.3 und 3.4 bilden die Elemente $e_0, \ldots, e_7$ eine Basis der Algebra R über C. Nach Satz 3.1 ist daher R eine Cayley-Dickson-Algebra über seinem Zentrum[25]).

Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Literatur

[1] Bruck, R. H., u. E. Kleinfeld: The structure of Alternative Division Rings. Proc. Amer. Math. Soc. 2, 878—890 (1951). — [2] Dickson, L. E.: Algebren und ihre Zahlentheorie. Zürich und Leipzig 1927. — [3] Marshall Hall: Math. Rev. 14, Nr. 3, 240—241 (März 1953). — [4] Kleinfeld, E.: Alternative Division Rings of Characteristic 2, Proc. Nat. Acad. Sci 37, 818—820 (1951). — [5] Kleinfeld, E.: Simple Alternative Rings. Ann. of Math. 58, 544—547 (1953). — [6] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955. — [7] Schafer, R. D.: Alternative algebras over an arbitrary field. Bull Amer. Math. Soc. 49, 549—555 (1943). — [8] Smiley: A remark on a theorem of Marshall Hall. Proc. Amer. Math. Soc. 1, 342—343 (1950). — [9] Stöcker, C.: Beweis eines Hilfssatzes von Bruck und Kleinfeld unter Voraussetzung beliebiger Charakteristik. Arch. der Math. 6, 296—302 (1955). — [10] Skornjakov, L. A.: Alternativkörper. Ukrainskij mat. J. 2, 70—85 (1950). — [11] Skornjakov, L. A.: Alternativkörper der Charakteristik 2 und 3. Ukrainskij mat. J. 2, 94—99 (1950).

(Eingegangen am 17. Februar 1956)

[25]) Man kann den Hauptsatz auch schon aus Satz 3.3 mit Hilfe des Satzes von Schafer [7] folgern.

SCHÜTTE, K.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 43—62 (1956)

Gruppentheoretisches Axiomensystem einer verallgemeinerten euklidischen Geometrie

Von
KURT SCHÜTTE in Marburg a. d. Lahn

Einleitung

Zur Begründung der ebenen absoluten Geometrie haben sich die Geradenspiegelungen als brauchbare Grundelemente erwiesen. Die von diesen Spiegelungen erzeugte Bewegungsgruppe konnte durch einfache gruppentheoretische Axiome[1]) gekennzeichnet werden. — Zu der allgemeinsten ebenen Geometrie, die sich in dieser Weise erklären läßt, gelangt man folgendermaßen: Zugrunde liege eine Menge von „*Punkten*" und „*Geraden*", für die zwei Relationen erklärt sind, die „*Inzidenz*" und die „*Orthogonalität*". Es soll außer gewissen *trivialen Inzidenz- und Orthogonalitätsaxiomen* folgendes „*Spiegelungsaxiom*" gelten: „Zu jeder Geraden gibt es mindestens eine involutorische orthogonale Kollineation, welche die betreffende Gerade punktweise festhält." — Hiermit läßt sich beweisen[2]):

1. Zu jeder Geraden gibt es *genau eine* solche Abbildung — wir bezeichnen sie als „*Spiegelung*" an dieser Geraden. Die *Geraden* lassen sich also eindeutig durch ihre Spiegelungen repräsentieren.

2. Ein Produkt von zwei Geradenspiegelungen ist genau dann involutorisch, wenn die betreffenden Geraden aufeinander senkrecht stehen. Die *Orthogonalität* läßt sich also eindeutig durch eine Eigenschaft der Spiegelungsprodukte kennzeichnen.

3. Je zwei Spiegelungen an Geraden, die in einem Punkt P aufeinander senkrecht stehen, haben gleiche Produkte. Die *Punkte* lassen sich also eindeutig durch involutorische Produkte von Geradenspiegelungen repräsentieren — wir nennen sie „*Punktspiegelungen*".

4. Das Produkt aus einer Punktspiegelung und einer Geradenspiegelung ist genau dann involutorisch, wenn der betreffende Punkt mit der betreffenden Geraden inzidiert. Hiermit ist auch die *Inzidenz* gruppentheoretisch gekennzeichnet.

Gemäß 1.—4. kann die betrachtete Ebene gruppentheoretisch erklärt werden. Die trivialen Inzidenz- und Orthogonalitätsaxiome und das Spiegelungsaxiom gehen dabei in die gruppentheoretischen Axiome über, die im folgenden § 1 mit I 1—4 bezeichnet sind. Hierzu ist noch ein Reichhaltigkeitsaxiom (etwa das Axiom 6 von F. BACHMANN[3])) hinzuzunehmen. Die durch diese

[1]) ARNOLD SCHMIDT [14], F. BACHMANN [3], E. SPERNER [18], H. KARZEL [6], [7].

[2]) Beweis für die affine Ebene (mit euklidischer Metrik) in [16] § 3. Der Beweis läßt sich mit entsprechenden Ergänzungen auf die absolute Geometrie ausdehnen.

[3]) Literaturverzeichnis [3].

Axiome abgegrenzte Geometrie kann man als „*absolute Spiegelungsgeometrie*“ im allgemeinsten Sinne ansehen. Das Axiomensystem unterscheidet sich von dem Axiomensystem von ARNOLD SCHMIDT[4]) bzw. F. BACHMANN[3]) nur dadurch, daß hier nicht der „Satz von den drei Spiegelungen“ gefordert wird. D. h. es braucht nicht jedes Spiegelungsprodukt von drei Geraden, die einen Schnittpunkt oder ein gemeinsames Lot haben, eine Geradenspiegelung zu sein. Stattdessen tritt hier das wesentlich schwächere Axiom I 4 auf, das aus dem vorgenannten Spiegelungsaxiom entspringt.

Eine algebraische Kennzeichnung der absoluten Spiegelungsgeometrie durch entsprechende Koordinatensysteme ist schwer zu gewinnen. Einfacher werden die Verhältnisse, wenn man sich auf eine *euklidische* Spiegelungsgeometrie beschränkt, indem man eine affine Ebene zugrunde legt und die Invarianz der Orthogonalität gegenüber der Parallelität fordert. Die allgemeinste *euklidische Spiegelungsgeometrie* erhält man bei Hinzunahme der Axiome II 1,2 (§ 1)[5]). Als Reichhaltigkeitsaxiom genügt dann die Forderung, daß es drei nichtkollineare Punkte gibt (Ax. I 5). Die Ebene erweist sich nun als eine *Translationsebene*[6]). Daher lassen sich Koordinaten einführen, die einen *Quasikörper*[7]) bilden. Die Orthogonalität verlangt, daß eine gewisse involutorische Abbildung des Quasikörpers auf sich existiert. (Die genauen Eigenschaften dieser Abbildung sind durch die gruppentheoretischen Axiome I, II festgelegt.) Indem die Existenz einer solchen Abbildung gefordert wird, kommen nicht alle Quasikörper als Koordinatenbereiche von euklidischen Spiegelungsgeometrien in Betracht.

Um das algebraische Äquivalent einer euklidischen Spiegelungsgeometrie genau angeben zu können, wird man den sehr weit gesteckten Rahmen der allgemeinen euklidischen Spiegelungsgeometrie zunächst etwas enger zu fassen haben, indem man einige Zusatzaxiome hinzunimmt. — Eine besondere Bedeutung hat offenbar die ternäre Relation von drei Geraden, ein Spiegelungsprodukt zu besitzen, das selbst eine Geradespiegelung ist. Hiermit ließ sich in der bisher untersuchten absoluten Geometrie die Büschelung von drei Geraden kennzeichnen. In einer allgemeineren Geometrie braucht jedoch das Produkt der Spiegelungen an drei gebüschelten Geraden keine Geradenspiegelung zu sein. Wir werden nur eine gewisse *Transitivität* der ternären Relation fordern. Dies geschieht im folgenden durch das Axiom III 1[8]). Die ternäre Relation führt dann — ähnlich wie eine binäre Äquivalenzrelation zu einer Klasseneinteilung führt — zu einer Abgrenzung gewisser *Scharen*

[4]) Literaturverzeichnis [14].

[5]) Ax. II 1 ist äquivalent mit der Forderung, daß jedes Viereck mit drei rechten Winkeln ein Rechteck ist. Ax. II 2 liefert zusammen mit II 1 das Parallelenaxiom.

[6]) Dabei ist unter einer „Translation“ eine Kollineation zu verstehen, bei der jede Gerade in sich oder in eine Parallele übergeht und alle Geraden einer bestimmten Parallelenschar fest bleiben. Eine „Translationsebene“ besitzt zu je zwei Punkten eine Translation, die den einen Punkt auf den anderen abbildet.

[7]) Vergl. MARSHALL HALL [5], J. ANDRÉ [1] oder G. PICKERT [12].

[8]) Dieses Axiom ergab sich in [16] mit gewissen Forderungen zur Einführung einer Winkelmetrik.

von Geraden (§ 2). Jede solche Geradenschar ist Teil eines Büschels. — Um uns hier auf etwas einfache Verhältnisse zu beschränken, fordern wir in einem zweiten einschränkenden Axiom III 2, daß je zwei Scharen, die zum gleichen Büschel gehören, einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.

Durch die Axiome I—III wird eine euklidische Spiegelungsgeometrie abgegrenzt, die zwar gegenüber der allgemeinsten derartigen Geometrie durch die Axiome III 1,2 eingeschränkt ist, aber doch noch über die gewöhnliche euklidische Spiegelungsgeometrie hinausgeht. Die Drehungen um einen Punkt bilden hier einen *kinematischen Raum*[9]) (§ 3), der im Falle der gewöhnlichen euklidischen Geometrie (mit dem Satz von den drei Spiegelungen) auf eine Gerade zusammenschrumpft. In den anderen Fällen handelt es sich entweder um eine *ausgeartete Raumstruktur*, bei der alle R-Punkte auf zwei windschiefen R-Geraden liegen, oder um einen dreidimensionalen *projektiven Raum*. Zur ausgearteten Raumstruktur gehört eine ebene Geometrie, die sich algebraisch leicht beschreiben läßt (§ 4). Im letzten (allgemeinen) Falle wird die Struktur der *Drehungsgruppe* durch *Quaternionen* gekennzeichnet (§ 5). Für den Koordinaten-Quasikörper der euklidischen Ebene erhält man besondere Eigenschaften (§ 6), nach denen sich die betrachtete Geometrie mit einem weiteren Zusatzaxiom (V) als eine *unitäre Geometrie* über dem Erweiterungskörper $P(i)$ eines Pythagoräischen Körpers P mit $i^2 = -1$ erweist (§ 7).

§ 1. Grundlegende Axiome und Folgerungen

Zugrunde liege eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die von einem System $\mathfrak{J}$ involutorischer Elemente erzeugt wird. Die Elemente von $\mathfrak{J}$ nennen wir „*Geraden*". Ein involutorisches Produkt von zwei Geraden gilt als „*Punkt*". Geraden bzw. Punkte werden mit kleinen bzw. großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Das Einheitselement der Gruppe sei „1".

Die Relationen „$a \perp b$" bzw. „P/g" sollen bedeuten, daß das Produkt ab bzw. Pg involutorisch ist. Wir sagen dafür auch: „*a steht senkrecht auf b*" bzw. „*P inzidiert mit g*". Die Schreibweise $a_1, \ldots, a_m \perp b_1, \ldots, b_n$ bzw. $P_1, \ldots, P_m/g_1, \ldots, g_n$ soll die Relationen $a_i \perp b_k$ bzw. P_i/g_k für alle $i = 1, \ldots, m$ und $k = 1, \ldots, n$ zusammenfassen.

I. Axiome der absoluten Spiegelungsgeometrie:

1. Bei $P, Q/g, h$ ist $P = Q$ oder $g = h$.
2. Zu P, Q gibt es g mit $P, Q/g$.
3. Zu P, g gibt es h mit P/h und $g \perp h$.
4. aga ist eine Gerade. (Wir bezeichnen sie mit g^a.)
5. Es gibt drei nichtkollineare Punkte.

II. Allgemeine Axiome der euklidischen Geometrie:

1. Jedes Produkt von drei Punkten ist ein Punkt.
2. Je zwei Geraden haben einen Schnittpunkt oder ein gemeinsames Lot.

[9]) Mit dem Satz von drei Spiegelungen (der in unserem Axiomensystem nicht gefordert wird) erhält man einen kinematischen Raum für die *volle* Bewegungsgruppe. Dieser wurde von E. Podehl u. K. Reidemeister [13] und von F. Bachmann [2] zur Begründung der absoluten Geometrie herangezogen.

III. Einschränkende Axiome für Dreierprodukte:

1. Sind die Produkte abc und abd Geraden und ist $ab \neq ba$, so ist auch das Produkt bcd eine Gerade.

2. Zu je vier Geraden a, b, c, d, die mit demselben Punkt inzidieren, gibt es eine Gerade u, so daß die Produkte abu und cdu Geraden sind.

Aus den Definitionen und den Axiomen I lassen sich leicht die Folgerungen ziehen:

1.1. $a \perp b$ äquivalent $b \perp a$.

1.2. $a \perp b$ genau dann, wenn $ab = ba$ und $a \neq b$.

1.3. P/g genau dann, wenn $Pg = gP$ und $P \neq g$.

1.4. aPa ist ein Punkt. (Wir bezeichnen ihn mit P^a.)

1.5. $g^a = g$ genau dann, wenn $g \perp a$ oder $g = a$.

1.6. $P^a = P$ genau dann, wenn P/a oder $P = a$.

1.7. Bei $P/a,b$ und $a \perp b$ ist $P = ab$.

1.8. Bei $a \perp b$ ist ab ein Punkt.

1.9. Bei P/g ist Pg eine Gerade.

1.10. $g^a \perp h^a$ äquivalent $g \perp h$.

1.11. P^a/g^a äquivalent P/g.

1.12. Mit jeder Geraden inzidieren mindestens zwei verschiedene Punkte.

1.13. Mit jedem Punkt inzidieren mindestens zwei verschiedene Geraden.

1.14. Es gibt drei nichtkopunktale Geraden.

Aus Axiom I 4 und 1.4 folgt: Bei $\alpha = a_1 \ldots a_n$ ist $g^\alpha = a_n \ldots a_1 g a_1 \ldots a_n$ eine Gerade und $P^\alpha = a_n \ldots a_1 P a_1 \ldots a_n$ ein Punkt. Insbesondere ist g^P eine Gerade und P^Q ein Punkt.

Nimmt man das Axiom II 1 hinzu, so erhält man die weiteren Sätze:

2.1. Es gibt keine drei Geraden, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. — Wären nämlich a, b, c solche Geraden, so hätte man drei Punkte ab, bc, ca, deren Produkt im Widerspruch zu Axiom II 1 gleich 1 wäre.

2.2. Kein Punkt ist gleich einer Geraden. — Dies folgt aus 2.1, da bei $c = P = ab$ die Geraden a, b, c paarweise aufeinander senkrecht stehen würden.

2.3. Bei $P/a,b$ und $g \perp a,b$ ist $a = b$. — Man hat nämlich eine Gerade $c = Pa$ und Punkte $Q = ag$, $R = gb$ mit $PQR = cb$. Nach Axiom II 1 ist cb ein Punkt S. Aus $P, S/b,c$ und $b \neq c$ folgt $P = S$, also $ca = cb$, $a = b$.

2.4. Bei $PQ = QP$ ist $P = Q$. — Zum Beweise nehme man c mit $P, Q/c$ und $a = Pc$, $b = Qc$. Dann ist $ab = PQ = QP = ba$. Wäre $a \neq b$, so würden a, b, c paarweise aufeinander senkrecht stehen. Nach 2.1 ist also $a = b$ und somit auch $P = Q$.

2.5. Bei $a \perp b$, $b \perp c$, $c \perp d$ ist $a \perp d$. — Das Produkt ad der drei Punkte ab, bc, cd ist nämlich nach Axiom II 1 ein Punkt, also $a \perp d$.

2.6. Bei $g \perp a,b,c$ ist abc eine Gerade. — Das Produkt der drei Punkte ag, bg, cg ist nämlich ein Punkt P mit $Pg = gP$. Aus 1.3 und 2.2 folgt P/g. Daher ist Pg eine Gerade $h = abc$.

2.7. Mit jeder Geraden inzidieren mindestens drei verschiedene Punkte. — Nach 1.12 inzidieren mit einer Geraden g zwei verschiedene Punkte P, Q. Es gibt eine Gerade $a = Pg$ und einen Punkt Q^a. Man erhält Q^a/g. Die drei Punkte P, Q, Q^a sind paarweise voneinander verschieden, wie aus $P \neq Q$ folgt.

2.8. Mit jedem Punkt inzidieren mindestens drei verschiedene Geraden. — Gemäß 1.14 gibt es nämlich eine Gerade g, die nicht mit dem Punkt P inzidiert. Nach 2.7 inzidieren drei verschiedene Punkte mit g. Die Verbindungen dieser Punkte mit P sind paarweise verschieden.

2.9. Bei $abc = d$, $P/a,b$ und $a \neq b$ gilt P/c. — Zum Beweise nehme man g, h, g', h' mit $P/g, g'$, $g \perp c$, $g' \perp d$ (nach Axiom I 3) und $h = Pg$, $h' = Pg'$ (nach 1.9). Man erhält $P^c = gh^c$, $P^d = g'h'^d$, $P^c = cPbad = cbaPd = P^d$ und somit $P, P^c/g, g'$. Wäre $P \neq P^c$, so $g = g'$ und weiterhin $h = h'$, $h^c = h^d$, $g \perp c, d, h$. Da dann cdh nach 2.6 eine Gerade ist, so $cdh = hdc = dh^dc = dh^cc = dch$, also $cd = dc$. Wegen $a \neq b$ ist $c \neq d$. Man erhielte $c \perp d$, was mit $g \perp c, d$ gegen 2.1 verstößt. Hiermit ist $P \neq P^c$ widerlegt. $P = P^c$ liefert P/c.

2.10. Bei $abc = d$, $g \perp a, b$ und $a \neq b$ ist $g \perp c$. — Der Beweis kann hier wie in [3] (Satz 11) geführt werden.

Ein Produkt von zwei Punkten bezeichnen wir als eine „*Translation*".

Mit Hilfe aller Axiome I und II beweist man nun leicht:

3.1. Die Punkte und Geraden bilden eine *affine Ebene*.

3.2. Die affine Ebene ist eine *Translationsebene*, d. h. zu je zwei Punkten P, Q gibt es eine Translation AB mit $P^{AB} = Q$. (Die als Punktprodukte definierten Translationen haben die bekannten Translationseigenschaften.)

Demgemäß lassen sich Koordinaten einführen, die einen *Quasikörper* bilden.

Mit den Axiomen I, II und III 2 erhalten wir die Sätze:

4.1. Jedes Produkt von vier Geraden ist gleich einem Produkt von zwei Geraden.

Zum Beweise sind für die vier Geraden a, b, c, d folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $a \perp b$ und $c \perp d$. Dann hat man Punkte $P = ab$, $Q = cd$ und Geraden g, a', b' mit $P, Q/g$, $a' = Pg$, $b' = Qg$. Es ist $abcd = PQ = a'b'$.

2) $c \perp d$ und a sind nicht senkrecht b. Dann hat das Lot g von $Q = cd$ auf b einen Schnittpunkt S mit der Geraden a. Man hat Punkte $R = bg$, $T = RSQ$ und Geraden $a' = aS$, $h = Tg$. Es ist $abcd = abQ = aRgQ = aRThQ = aSQhQ = a'h^Q$.

3) Es gibt $g \perp a, b$ und $h \perp c, d$. Dann ist $abcd = (ag)(gb)(ch)(hd)$ ein Produkt von vier Punkten. Dieses ist nach Axiom II 1 gleich einem Produkt von zwei Punkten, also nach 1) gleich einem Produkt von zwei Geraden.

4) Es gibt P mit $P/a, b, c, d$. Nach Axiom III 2 gibt es eine Gerade u, so daß abu und dcu Geraden g, h sind. Dann ist $abcd = (abu)(ucd) = gh$.

5) Es gibt P mit $P/a, b$. Sind c', d' die Lote von P auf c, d und $C = cc'$, $D = dd'$, so ist $abcd = abc'Cd'D = abc'd'C^{d'}D$. Nach Axiom II 1 gibt es $Q = PC^{d'}D$. Ferner ist $d'P$ eine Gerade e. Wegen $P/a, b, c', e$ gibt es nach 4) Geraden u, v mit $abc'e = uv$. Hiermit erhält man $abcd = uvQ$, was nach 1) bzw. 2) gleich einem Produkt von zwei Geraden ist.

6) Es gibt P mit $P/c, d$. Nach 5) ist $dcba$ gleich einem Produkt von zwei Geraden, also auch $abcd$.

Mit 3), 5) und 6) sind nach Axiom II 2 alle Fälle erfaßt.

4.2. Bei $P/a, b, c, d$ gibt es u, v mit $abcd = uv$ und $P/u, v$.

Beweis. Ist $abcd = 1$, so kann $u = v$ mit P/u beliebig genommen werden. Es sei $abcd \neq 1$. Nach 4.1 gibt es u, v mit $abcd = uv$. Wir beweisen $P/u, v$. Es sei $P/g, g'$, $g \perp u$, $g' \perp v$ (nach Axiom I 3) und $Pg = h$, $Pg' = h'$ (nach 1.9). Man erhält $P^u = gh^u$, $P^v = g'h'^v$. $P^u = vdbcaPabcdv = P^v$, also $P, P^u/g, g'$. Wäre $P \neq P^u$, so $g = g'$ und weiterhin $h = h'$, $h^u = h^v$, $g \perp u, v, h$. Dann wäre uvh nach 2.6 eine Gerade, folglich $uvh = hvu = vh^v u = vh^u u = vuh$, $uv = vu$. Wegen $uv \neq 1$ hätte man $u \perp v$, was mit $g \perp u, v$ gegen 2.1 verstößt. Somit gilt $P = P^u = P^v$, woraus $P/u, v$ folgt.

4.3. Die Produkte ab und abc mit $P/a, b, c$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{G}_P$ in der Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Geradenprodukte. — Dies folgt unmittelbar aus 4.2.

4.4 Eine Gruppe $\mathfrak{G}_P$ enthält keine Translation außer 1.

Beweis. Bei $AB \in \mathfrak{G}_P$ gibt es nach 4.2 Geraden u, v mit $AB = uv$ und $P/u, v$. Man hat $w = Pu$ mit P/w. Dann ist $PAB = Puv = wv$ ein Punkt, also $w \perp v$. Hieraus folgt $u = v$ und $AB = 1$.

4.5. Die Translationen bilden einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{T}$ in der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Beweis. Die Gruppeneigenschaft folgt aus Axiom II 1 und $1 = PP$, $(PQ)^{-1} = QP$. Für eine Translation PQ und ein Geradenprodukt α ist $\alpha^{-1} PQ \alpha = P^\alpha Q^\alpha$ eine Translation. Daher ist $\mathfrak{T}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Gemäß Axiom II 1 gilt $PQR = RQP$ für beliebige Punkte P, Q, R. Daraus folgt die Kommutativität $(PQ)(RS) = RQPS = (RS)(PQ)$.

4.6. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ ist isomorph $\mathfrak{G}_P$ für jeden Punkt P. — Hierzu ist zu beweisen:

1) Zu jedem Geradenprodukt α gibt es A, B mit $AB\alpha \in \mathfrak{G}_P$.

2) Ist α ein Geradenprodukt mit $AB\alpha \in \mathfrak{G}_P$, $CD\alpha \in \mathfrak{G}_P$, so $AB = CD$.

Beweis von 1). Es kann $\alpha = ab$ bzw. $\alpha = abc$ angenommen werden. Es gibt u, v, w mit $P/u, v, w$, $a \perp u$, $b \perp v$, $c \perp w$ und $U = ua$, $V = vb$, $W = wc$, $AB = PW^{vu} V^u U$. Dann ist $V^u Uab = uv \in \mathfrak{G}_P$ und $ABabc = PW^{vu} V^u Uabc$ $= Puvw \in \mathfrak{G}_P$. Das gesuchte Punktprodukt ist $V^u U$ bzw. AB.

Beweis von 2). Aus den Voraussetzungen folgt $(AB\alpha)(CD\alpha)^{-1} = ABDC$. Mit Axiom II 1 und 4.4 erhält man $ABDC = 1$, also $AB = CD$.

Aus 4.6 folgt $\mathfrak{G}_P \cong \mathfrak{G}_Q$ für beliebige Punkte P, Q.

4.7. Die beiden Elemente 1 und P bilden einen Normalteiler in der Gruppe $\mathfrak{G}_P$. — Diese Elemente liegen nämlich im Zentrum von $\mathfrak{G}_P$ und bilden selbst eine Gruppe.

4.8. Bei $P^{abc} = P$, $Q^{abc} = Q$, $P, Q/g$ und $P \neq Q$ ist $abc = g$.

Beweis. Nach 4.1 gibt es u, v mit $abcg = uv$. Man erhält $P^{uv} = P^g = P$, woraus (nach dem Beweise von 4.2) $u = v$ oder $P/u, v$ folgt. Ebenso erhält man $u = v$ oder $Q/u, v$. Mit $P \neq Q$ folgt $u = v$, also $abc = g$.

4.9. Sind a, b, c drei verschiedene Geraden, die mit einem Punkt P inzidieren, so ist das Produkt abc genau dann eine Gerade, wenn in jedem Dreieck mit Seiten a, b', c, wo $b' \perp b$ ist, der Höhenschnittpunktsatz gilt.

Beweis. 1) Es sei $abc = d$ und Q/d mit $Q \neq P$. Die Fußpunkte der Lote von Q auf a, c seien A, C. Dann ist $Q^A = Q^a = Q^{cb} = Q^{Cb}$. Bei $Q^A, Q^C/g$ und

$H = bg$ folgt $Q^{QA} = Q^{A} = Q^{CH}$. Hiermit ergibt sich auf Grund der Translationseigenschaften der Punktprodukte, daß $QA = CH$ ist und daß die Punkte P, A, C ein Dreieck mit Seiten $a, c, b' \perp b$ und dem Höhenschnittpunkt H bilden. Durch geeignete Wahl von Q kann jede Gerade $b' \perp b$ erfaßt werden.

2) Umgekehrt ergibt sich mit dem Höhenschnittpunktsatz ein Punkt $Q \neq P$ mit $Q^{abc} = Q$. Aus 4.8 folgt, da auch $P^{abc} = P$ ist, daß abc gleich der Verbindungsgeraden von P und Q ist.

Eine euklidische Geometrie über einem kommutativen Körper mit symmetrischer bilinearer Orthogonalitätsrelation ergibt sich bekanntlich mit den Axiomen I, II und dem Satz von den drei Spiegelungen:

IV 1*. Bei $P/a, b, c$ ist das Produkt abc eine Gerade.

Die Axiome III sind dann herleitbar. (Der hierzu benötigte Satz 2.6 wurde mittels der Axiome I und II 1 gewonnen.)

Wir schließen diesen bekannten Fall hier aus, indem wir das Axiom hinzufügen:

IV 1. Es gibt drei kopunktale Geraden, deren Produkt keine Gerade ist.

Auf Grund der Isomorphie $\mathfrak{G}_P \cong \mathfrak{G}_Q$ inzidieren dann mit jedem Punkt drei Geraden, deren Produkt keine Gerade ist.

§ 2. Einführung von Geradenscharen

$x \in [a, b]$ bedeute, daß $ab \neq ba$ und abx eine Gerade ist. $[a, b]$ ist also nur für den Fall $ab \neq ba$ definiert und bezeichnet dann eine durch a und b bestimmte Schar von Geraden.

Mit den Axiomen I und III 1 erhält man die Sätze:

5.1. Bei $ab \neq ba$ gilt $a, b \in [a, b]$ (da $aba = b^a$ und $abb = a$ Geraden sind).

5.2. Bei $ab \neq ba$ ist $[a, b] = [b, a]$. — Mit $abx = g$ ist nämlich auch $bax = g^x$ eine Gerade.

5.3. Bei $c \in [a,b]$ und $ac \neq ca$ ist $[a,b] = [a,c]$.

Beweis. Es sei $x \in [a,b]$. Dann sind abx und abc Geraden. Hiermit sind auch bac und bax Geraden. Nach Axiom III 1 ist acx eine Gerade, also $x \in [a,c]$. Umgekehrt folgt aus $x \in [a,c]$, daß cax eine Gerade ist. Dann ist mit cab nach Axiom III 1 auch abx eine Gerade, also $x \in [a,b]$.

5.4. Bei $c \in [a,b]$ und $ac = ca$ ist $[a,b] = [b,c]$.

Beweis. Da abc eine Gerade ist, so $abc = cba$, folglich $bc = acba = caba \neq cb$. 5.2 und 5.3 ergeben nun $[a,b] = [b,a] = [b,c]$.

5.5. Bei $c,d \in [a,b]$ und $cd \neq dc$ ist $[a,b] = [c,d]$.

Beweis. Ist $ac \neq ca$, so nach 5.3 $[a,b] = [a,c]$, somit (nach 5.2) $d \in [c,a]$ und nach 5.3 $[c,a] = [c,d]$. Im Falle $ac = ca$ liefern 5.4, 5.2, 5.3 der Reihe nach $[a,b] = [b,c]$, $d \in [c,b]$ und $[c,b] = [c,d]$. In beiden Fällen folgt $[a,b] = [c,d]$.

Die Sätze 5.1 und 5.5 zeigen, daß jede der hier eingeführten Scharen durch je zwei zu ihr gehörende Geraden, die voneinander verschieden sind und nicht aufeinander senkrecht stehen, eindeutig bestimmt ist. Mehrere Geraden können nur dann zu zwei verschiedenen Scharen gehören, wenn sie aufeinander

senkrecht stehen. Da es nach 2.1 keine drei Geraden gibt, die paarweise aufeinander senkrecht stehen, haben also zwei verschiedene Scharen höchstens zwei Geraden gemeinsam.

5.6. $x \in [a,b]$ äquivalent $x^c \in [a^c,b^c]$. — Aus $ab \neq ba$, $abx = g$ folgt nämlich $a^c b^c \neq b^c a^c$, $a^c b^c x^c = g^c$ und umgekehrt.

Die Abbildung $x \to x^c$ (mit festem c), die nach 1.4, 1.10 und 1.11 eine orthogonale Kollineation ist, bildet also Geradenscharen auf Geradenscharen ab. Das Bild $[a^c,b^c]$ der Schar $[a,b]$ bezeichnen wir auch mit $[a,b]^c$.

Unter Hinzunahme des Axioms II 1 erhalten wir die weiteren Sätze:

6.1. Enthält eine Schar $[a,b]$ zwei verschiedene Geraden u,v mit $P/u,v$, so inzidiert jede Gerade der Schar mit P.

Beweis. 1) Ist $uv \neq vu$, so nach 5.5 $[a,b] = [u,v]$. Dann folgt P/x aus $x \in [u,v]$ nach 2.9. 2) Ist $uv = vu$, so $P = uv$. Nach Voraussetzung gibt es $g = abu$ und $h = abv$. Man erhält $gh = (uba)(abv) = P$. Wegen $a \neq b$ ist $g \neq u$. Mit $gub = a$, $gua = b^a$ und $P/g,u$ folgt (nach 2.9) $P/a,b$, womit wir auf 1) zurückgekommen sind.

6.2. Mit $P/a,b$, $u \in [a,b]$ und $Pu = v$ gilt auch $v \in [a,b]$. — Bei $abu = g$ ist nämlich $abg = u^g$, also $g \in [a,b]$ und nach 6.1 auch P/g. Somit ist $abv = gP$ eine Gerade, also $v \in [a,b]$.

Nach 5.5, 6.1 und 6.2 haben je zwei verschiedene Scharen mit einer gemeinsamen Geraden genau dann zwei Geraden (die aufeinander senkrecht stehen) gemeinsam, wenn alle Geraden der beiden Scharen mit demselben Punkt inzidieren.

6.3. Enthält eine Schar $[a,b]$ zwei verschiedene Geraden u,v mit $g \perp u,v$, so ist $x \in [a,b]$ äquivalent $x \perp g$.

Beweis. Nach 2.1 kann u nicht auf v senkrecht stehen. Mit $u \neq v$ folgt $uv \neq vu$, so daß $[a,b] = [u,v]$ ist. Die Behauptung folgt nun aus 2.6 und 2.10.

Gemäß 6.3 bildet das Büschel aller Geraden, die auf einer festen Geraden senkrecht stehen, genau eine Schar. Dagegen füllt eine Schar $[a,b]$ mit $P/a,b$ bei Gültigkeit von IV 1 nicht das volle Büschel aller mit P inzidenten Geraden aus. Gemäß 6.1 ist ein solches Büschel die Vereinigung entsprechender Scharen.

Das Axiom III 2 verlangt, daß je zwei Scharen von Geraden, die mit demselben Punkt P inzidieren, eine gemeinsame Gerade besitzen.

§ 3. Kinematischer Raum der Drehungen

Wir halten einen Punkt P fest. Auf Grund der Axiome I—III lassen sich die Elemente der Faktorgruppe $\mathfrak{G}_P/\{1, P\}$ als Punkte bzw. Ebenen eines Raumes darstellen. Zur Erklärung dieses „*kinematischen Raumes*" gebrauchen wir folgende Bezeichnungen:

Kleine gotische Buchstaben bezeichnen Produkte $\mathfrak{ab}$ mit $P/a,b$. Wir nennen diese Produkte auch „Drehungen um P".

Kleine griechische Buchstaben bezeichnen Produkte abc mit $P/a,b,c$. (Hierzu gehören insbesondere die Geraden, da $g = ggg$ ist.)

Große griechische Buchstaben bezeichnen Scharen $[a,b]$ mit $P/a,b$.

$\Phi\, g$, Φ^2 bzw. $\Phi^2\mathfrak{p}$ bezeichnet die Menge aller xg, xy bzw. $xy\mathfrak{p}$ mit $x,y \in \Phi$.

Der Übergang von der Gruppe $\mathfrak{G}_P$ zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}_P/\{1,P\}$ erfolgt durch die Äquivalenzrelationen

$$\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{q} \text{ mit der Bedeutung: } \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \text{ oder } \mathfrak{p} = P\,\mathfrak{q},$$

$$\alpha \equiv \beta \text{ mit der Bedeutung: } \alpha = \beta \text{ oder } \alpha = P\,\beta.$$

Definition der Elemente des kinematischen Raumes. „*R-Punkte*" sind die mit kleinen gotischen Buchstaben bezeichneten Drehungen um P unter Identifizierung von $\mathfrak{p},\mathfrak{q}$ bei $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{q}$. „*R-Geraden*" sind die Mengen $\Phi\, g$, $\Psi\, h, \ldots$ „*R-Ebenen*" sind die mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichneten Dreierprodukte unter Identifizierung von α, β bei $\alpha \equiv \beta$.

Inzidenzdefinitionen des kinematischen Raumes.

$\mathfrak{p}/\alpha$ bedeutet: $\mathfrak{p}\,\alpha^{-1}$ ist eine Gerade.

$\mathfrak{p}/\Phi g$ bedeutet: $\mathfrak{p} \in \Phi\, g$.

$\Phi g/\alpha$ bedeutet: $\alpha\, g \in \Phi^2$.

Diese Inzidenzen sind mit den Äquivalenzrelationen $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{q}$, $\alpha \equiv \beta$ verträglich. Die Geradeneigenschaft von $\mathfrak{p}\,\alpha^{-1}$ bleibt nämlich bei Multiplikation mit P erhalten. Außerdem gilt nach 6.2 mit $x \in \Phi$ auch $Px \in \Phi$, so daß die Relationen $\mathfrak{p} \in \Phi\, g$, $\alpha\, g \in \Phi^2$ erhalten bleiben, wenn $\mathfrak{p}$, α durch $P\,\mathfrak{p}$, $P\,\alpha$ ersetzt werden.

Mit den Axiomen I—III ergeben sich nun die folgenden Sätze des kinematischen Raumes:

7.1. Bei $\mathfrak{p}/\Phi g$ und $\Phi g/\alpha$ gilt auch $\mathfrak{p}/\alpha$.

Beweis. Die Voraussetzungen liefern $\mathfrak{p}\, g \in \Phi$, $\alpha\, g \in \Phi^2$. Hiernach ist $\mathfrak{p}\,\alpha^{-1} = (\mathfrak{p}\, g)\,(\alpha\, g)^{-1}$ eine Gerade aus Φ, also $\mathfrak{p}/\alpha$.

7.2. Mit zwei verschiedenen R-Punkten inzidiert genau eine R-Gerade.

Beweis. 1) Gegeben seien zwei R-Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Da $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^{-1}$ gleich einem Produkt von zwei Geraden ist, gibt es Φ mit $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^{-1} \in \Phi^2$. Ebenso hat man Ψ mit $\mathfrak{q} \in \Psi^2$. Gemäß Axiom III 2 gibt es $h \in \Phi \cap \Psi$. $h\,\mathfrak{q}$ ist eine Gerade g (aus Ψ). Nun ist $\mathfrak{q} = hg \in \Phi\, g$ und mit $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^{-1} \in \Phi^2$ auch $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^{-1})\,\mathfrak{q} \in \Phi\, g$, also $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}/\Phi\, g$.

2) Es sei $\mathfrak{p},\mathfrak{q}/\Phi\, g$, $\Psi\, h$ und $\mathfrak{p} \not\equiv \mathfrak{q}$. Dann hat man $\mathfrak{p}\, g$, $\mathfrak{q}\, g \in \Phi$ und $\mathfrak{p}\, h$, $\mathfrak{q}\, h \in \Psi$. Daraus folgt $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^{-1} \in \Phi^2 \cap \Psi^2$. Bei $\mathfrak{p} \not\equiv \mathfrak{q}$ ist Φ durch $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^{-1} \in \Phi^2$ eindeutig bestimmt, also $\Phi = \Psi$. Dann ist $gh = (\mathfrak{p}\, g)^{-1}(\mathfrak{p}\, h) \in \Phi^2$ und $\Phi\, g = \Phi\, h = \Psi\, h$.

7.3. Mit einer R-Geraden und einer R-Ebene, die nicht miteinander inzidieren, inzidiert genau ein R-Punkt.

Beweis. 1) Gegeben seien $\Phi\, g$ und α. Da $g\,\alpha^{-1}$ gleich einem Produkt von zwei Geraden ist, gibt es Ψ mit $g\,\alpha^{-1} \in \Psi^2$. Nach Axiom III 2 gibt es $h \in \Phi \cap \Psi$. $hg\,\alpha^{-1}$ ist eine Gerade k (aus Ψ). Für $\mathfrak{p} = hg$ gilt $\mathfrak{p} \in \Phi g$ und $\mathfrak{p}\,\alpha^{-1} = k$, also $\mathfrak{p}/\Phi\, g$, α.

2) Es sei $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}/\Phi g$, α und $\mathfrak{p} \not\equiv \mathfrak{q}$. Dann schließen wir folgendermaßen auf $\Phi g/\alpha$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{p}\, g$, $\mathfrak{q}\, g \in \Phi$, und es gibt Geraden $x = \mathfrak{p}\,\alpha^{-1}$, $y = \mathfrak{q}\,\alpha^{-1}$. Daraus folgt $xy = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^{-1} \in \Phi^2$. Bei $\mathfrak{p} \not\equiv \mathfrak{q}$ ist Φ die einzige Schar mit $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^{-1} \in \Phi^2$, somit $x \in \Phi$ und $\alpha\, g = x\,\mathfrak{p}\, g \in \Phi^2$, also $\Phi\, g/\alpha$.

7.4. Je zwei komplanare R-Geraden haben einen Schnittpunkt.

Beweis. Gemäß der Voraussetzung $\Phi\, g$, $\Psi\, h/\alpha$ gilt $\alpha\, g \in \Phi^2$, $\alpha\, h \in \Psi^2$. Für $k \in \Phi \cap \Psi$ folgt $k\, \alpha\, g \in \Phi$, $k\, \alpha\, h \in \Psi$. Mit $\mathfrak{p} = k\, \alpha$ ergibt sich $\mathfrak{p} \in \Phi\, g$, $\mathfrak{p} \in \Psi h$, also $\mathfrak{p}/\Phi\, g$, $\Psi\, h$.

7.5. Mit einer beliebigen festgehaltenen Geraden c erhält man die Polarkorrelation

$$\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}\, c, \quad (\Phi\, g)^* = \Phi^2 gc, \quad \alpha^* = \alpha\, c.$$

Beweis. 1) Die Abbildung $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$, $\alpha \to \alpha^*$ ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung der R-Punkte auf die R-Ebenen und der R-Ebenen auf die R-Punkte. Um auch $\Phi\, g \to (\Phi\, g)^*$ als umkehrbar eindeutige Abbildung der R-Geraden auf sich zu erkennen, ist festzustellen, daß $\Phi^2 gc$ eine R-Gerade ist und daß es zu Φ, k, c ein g mit $\Phi\, k = \Phi^2 gc$ gibt[10]). Zu gegebenen Φ, g, c wählen wir Ψ, h, k so, daß $gc \in \Psi^2$, $h \in \Phi \cap \Psi$ und $k = hgc \in \Psi$ ist. Dann ist $\Phi^2 gc = \Phi^2 hk = \Phi\, k$ eine R-Gerade. Umgekehrt gibt es zu Φ, k, c ein Ψ und h, g mit $kc \in \Psi^2$, $h \in \Phi \cap \Psi$, $g = hkc \in \Psi$. Hiermit wird $\Phi\, k = \Phi\, hgc = \Phi^2 gc$.

2) Die Inzidenztreue ergibt sich folgendermaßen: $\alpha^*/\mathfrak{p}^*$ bedeutet, daß $\alpha^* \mathfrak{p}^{*-1} = \alpha\, \mathfrak{p}^{-1}$ eine Gerade ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{p}\, \alpha^{-1}$ eine Gerade ist, also $\mathfrak{p}/\alpha$ gilt. $\alpha^*/(\Phi g)^*$ bedeutet $\alpha\, c \in \Phi^2 gc$. Dies ist äquivalent mit $\alpha\, g \in \Phi^2$, d. h. $\Phi g/\alpha$. Setzen wir $\Phi^2 gc = \Phi\, k$, so erhält $(\Phi\, g)^*/\mathfrak{p}^*$ die Bedeutung $\mathfrak{p}\, ck \in \Phi^2$. Dies ist wegen $\Phi^2 kc = \Phi g$ äquivalent mit $\mathfrak{p} \in \Phi g$, d. h. $\mathfrak{p}/\Phi\, g$.

3) Man erhält unmittelbar $\mathfrak{p}^{**} = \mathfrak{p}$, $\alpha^{**} = \alpha$. Bei $\Phi^2 gc = \Phi k$ ist $(\Phi g)^{**} = (\Phi^2 gc)^* = (\Phi\, k)^* = \Phi^2 kc = \Phi\, g$. Die Abbildung ist also involutorisch.

7.6. Jeder R-Punkt $\mathfrak{p}$ inzidiert mit seiner Polarebene $\mathfrak{p}^*$. — Das Produkt $\mathfrak{p}\, \mathfrak{p}^{*-1} = \mathfrak{p}\, c\, \mathfrak{p}^{-1}$ ist nämlich gemäß Axiom I 4 eine Gerade.

Auf Grund 7.5 erhält man zu 7.2—7.4 auch die dualen Sätze:

7.7. Mit je zwei verschiedenen R-Ebenen inzidiert genau eine R-Gerade.

7.8. Mit einem R-Punkt und einer R-Geraden, die nicht miteinander inzidieren, inzidiert genau eine R-Ebene.

7.9. Je zwei sich schneidende R-Geraden sind komplanar.

Mit Axiom IV 1 erhält man:

8.1. Es gibt vier nichtkomplanare R-Punkte.

Beweis. Nach Axiom IV 1 hat man $P/a, b, c$, wo abc keine Gerade ist. Die vier R-Punkte 1, ab, ac, bc sind nicht komplanar. Bei $1/\alpha$ müßte nämlich α eine Gerade g sein. ab/g erfordert $g \in [a, b]$. Mit ac/g folgt $g = a$. Dann kann aber g nicht mit bc inzidieren.

Es ist nun eine weitere Gabelung der Geometrie (neben der durch IV 1*, IV 1 gegebenen Gabelung) zu beachten. Wir unterscheiden:

IV 2. Jede Schar $[a, b]$ mit $P/a, b$ enthält mehr als vier Geraden.

IV 2*. Es gibt eine Schar $[u, v]$, zu der *nur* die vier Geraden u, v, Pu, Pv gehören.

Mit IV 2 ergibt sich:

8.2. Mit jeder R-Geraden inzidieren mindestens drei verschiedene R-Punkte.

---

[10]) Hiernach sind die R-Geraden Φg, $\Phi h, \ldots$ genau die Rechtsnebenklassen $\Phi^2\, \mathfrak{p}$ der Gruppe aller Drehungen um P nach der Untergruppe Φ^2.

Die Sätze 7.1—7.4, 7.7—7.9, 8.1, 8.2 zeigen:

Bei Gültigkeit der Axiome I—III, IV 1, IV 2 bilden die Elemente von $\mathfrak{G}_P/\{1, P\}$ einen *dreidimensionalen projektiven kinematischen Raum*.

Gilt dagegen IV 2* statt IV 2, so hat der kinematische Raum eine ausgeartete Raumstruktur.

Wir bezeichnen eine Schar als „*singulär*", wenn sie nur vier Geraden enthält. Mit den Axiomen IV 1, IV 2* ergibt sich:

8*.1. Es gibt drei Scharen, von denen mindestens zwei singulär sind, so daß jede mit P inzidente Gerade zu einer dieser Scharen gehört.

Beweis: Nach IV 2* gibt es eine singuläre Schar $[u,v]$. Gemäß Axiom IV 1 gibt es eine mit P inzidente Gerade $w \notin [u,v]$. Dann sind $[u,v]$, $[u,w]$, $[v,w]$ drei verschiedene Scharen. g sei eine beliebige Gerade mit P/g, $g \not\equiv u$, $g \not\equiv v$, $g \not\equiv w$. Da $[u,v] \cap [g,w]$ nach Axiom III 2 nicht leer und $[u,v]$ singulär ist, gehört u oder v zu $[g,w]$. Daraus folgt $g \in [u,w]$ oder $g \in [v,w]$. Die drei Scharen enthalten also alle Geraden, die mit P inzidieren. Angenommen, $[u,w]$ und $[v,w]$ seien beide nicht singulär. Dann hat man $g \in [u,w]$, $h \in [v,w]$ mit $g \not\equiv u$, $g \not\equiv w$, $h \not\equiv v$, $h \not\equiv w$. Wäre $g = h$, so auch $g \in [v,w]$, also $g,w \in$ $\in [u,w] \cap [v,w]$, was mit $g \not\equiv w$ gegen $[u,w] \neq [v,w]$ verstößt. Bei $g \not\equiv h$ hätte man eine Schar $[g,h]$. Da $[u,v] \cap [g,h]$ nicht leer und $[u,v]$ singulär ist, müßte u oder v zu $[g,h]$ gehören. Bei $u \in [g,h]$ wäre $h \in [u,g] = [u,w]$, also $h,w \in [u,v] \cap [u,w]$, was gegen $h \not\equiv w$ verstößt. Bei $v \in [g,h]$ wäre $g \in [v,h]$ $= [v,w]$, also $g,w \in [u,w] \cap [v,w]$, im Widerspruch zu $g \not\equiv w$. Somit ist außer $[u,v]$ auch noch mindestens eine der Scharen $[u,w]$, $[v,w]$ singulär.

Die ausgeartete kinematische Raumstruktur bei Gültigkeit der Axiome I—III, IV 1, IV 2* wird nun durch die Sätze 7.1—7.4, 7.7—7.9, 8.1 und den folgenden Satz gekennzeichnet:

8*.2. Es gibt zwei windschiefe R-Geraden, mit denen alle R-Punkte inzidieren.

Beweis: Nach 8*.1 gibt es zwei singuläre Scharen $[u,v]$, $[u,w]$ und eine weitere Schar $\Phi = [v,w]$ mit $g \in \Phi$ für alle g mit P/g, $g \not\equiv u$. Es gibt drei Arten von R-Punkten, nämlich gu, uh und gh mit $g,h \in \Phi$. Jeder dieser R-Punkte inzidiert mit einer der beiden R-Geraden $\Phi\, u$, $\Phi\, v$. Es gilt nämlich $gu \in \Phi\, u$, ferner $uh = h^u u \in \Phi\, u$ (da $h^u \not\equiv u$ und somit $h^u \in \Phi$ ist) und schließlich $gh = (ghv)v \in \Phi\, v$ (da ghv eine Gerade aus Φ ist). $\Phi\, u$, $\Phi\, v$ sind windschief, da $gu = hv$ mit $g,h \in \Phi$ unmöglich ist.

§ 4. Sonderfall der euklidischen Ebenen

Wir behandeln zunächst den durch IV 1, IV 2* gekennzeichneten Sonderfall. — Aus 8*.1 lassen sich für das Büschel aller Geraden durch P die Folgerungen ziehen:

8*.3. Es gibt eine Gerade u mit P/u, so daß alle Scharen $[u,g]$ mit P/g singulär sind.

Beweis: Nach 8*.1 gibt es eine Gerade u und eine Schar Φ mit $u \notin \Phi$ und $g \in \Phi$ für alle Geraden g mit P/g und $g \not\equiv u$. Wäre $h \not\equiv u$, $g \not\equiv h$ und $h \in [u,g]$, so $[u,g] = [g,h] = \Phi$, also $u \in \Phi$. Da dies ausgeschlossen ist, muß $[u,g]$ singulär sein.

8*.4. Für die gemäß 8*.3 existierende Gerade u gilt $g^u \perp g$ für alle $g \not\equiv u$ mit P/g.

Beweis: $g^u = ugu$ gehört zu der nach 8*.3 singulären Schar $[u,g]$. Wegen $u \not\equiv g$ ist g^u von g, u und Pu verschieden. Daher ist $g^u = Pg$, also $g^u \perp g$.

Nun kann man in bekannter Weise ein Koordinatensystem mit folgenden Eigenschaften einführen:

1) Die Koordinaten bilden einen Quasikörper.

2) Punkte werden durch Koordinatenpaare (x, y) dargestellt.

3) Geraden erhalten Gleichungen $y = ax + b$ bzw. $x = c$. Dabei möge die gemäß 8*.3 im Büschel der Geraden durch den Ursprung existierende Gerade u die Gleichung $y = 0$ erhalten.

4) $x = c \perp y = b$ für alle b, c.

Die Spiegelung $g \to g^u$ ergibt sich dann folgendermaßen: Ist F der Fußpunkt des Lotes s von einem Punkt Q auf die Gerade u, so $QF = Qsu = sQu = FQ^u$. Folglich ist Q^u das Bild von F bei der Translation, die Q in F überführt. Bei $Q = (x, y)$ erhält man $F = (x, 0)$ und $Q^u = (x, -y)$. Daher wird durch Spiegelung an u die Gerade $y = ax$ auf die Gerade $y = -ax$ abgebildet. — Mit 8*.4 folgt $y = ax \perp y = -ax$ für $a \neq 0$. Auf Grund der Euklidizität der Metrik gilt allgemein:

5) $y = ax + b \perp y = -ax + c$ für $a \neq 0$.

Da die Gerade $y = x$ auf $y = -x$, aber nicht auf sich selbst senkrecht steht, folgt:

6) Die Charakteristik des Koordinaten-Quasikörpers ist $\neq 2$.

Die Spiegelung $Q \to Q^g$ an einer Geraden $y = ax$ mit $a \neq 0$ läßt sich nun folgendermaßen bestimmen: Das Lot s vom Punkt $Q = (x_1, y_1)$ auf die Gerade g (mit der Gleichung $y = ax$) hat die Gleichung $y = -ax + ax_1 + y_1$. Für den Schnittpunkt $F = (x_0, ax_0)$ mit g gilt $2ax_0 = ax_1 + y_1$. Wegen $QF = FQ^g$ ergibt sich $Q^g = (2x_0 - x_1, 2ax_0 - y_1) = (x_2, ax_1)$ mit $ax_2 = y_1$. Die Abbildung $Q \to Q^g$ wird also durch $(x, ay) \to (y, ax)$ dargestellt.

Die Spiegelung an der Geraden $y = x$ bildet insbesondere (x, y) auf (y, x) ab. Hierdurch geht eine Gerade $y = bx$ in $x = by$ über. Im Falle $b \neq 0$ gibt es im Quasikörper eindeutig b^{-1} mit $bb^{-1} = 1$. Da das Spiegelbild einer Geraden eine Gerade ist, folgt: Alle Punkte (bc, c) liegen auf der Geraden $y = b^{-1}x$, d. h. es gilt $b^{-1}(bc) = c$.

Die Spiegelung an der Geraden $y = ax$ mit $a \neq 0$ kann nun $(x, y) \to (a^{-1}y, ax)$ geschrieben werden. Das Produkt der Spiegelungen an den Geraden $y = ax$, $y = x$ und $y = bx$ mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ ist $(x, y) \to (b^{-1}(a^{-1}y), b(ax))$. Da die drei angegebenen Geraden nach 8*.1 zu einer einzigen Schar gehören, ist das Spiegelungsprodukt gleich einer Geradenspiegelung. Hiermit ergibt sich die Assoziativität $b(ax) = (ba)x$ und mit $(ba)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ auch die Kommutativität $ab = ba$. Die Koordinaten bilden also einen Körper.

Axiom IV 1 erfordert, daß der Koordinatenkörper mehr als drei Elemente enthält.

Unser Ergebnis lautet:

8*.5. *Zu jeder Geometrie, die den Axiomen I—III, IV 1, IV 2* genügt, gibt es einen kommutativen Koordinatenkörper mit mehr als drei Elementen und einer Charakteristik $\neq 2$, so daß die Orthogonalität durch 4) und 5) festgelegt ist.*

Man erkennt leicht, daß auch umgekehrt jede Ebene über einem kommutativen Körper mit mehr als drei Elementen und Charakteristik $\neq 2$ bei entsprechender Orthogonalitätsdefinition den genannten Axiomen genügt. (Für den Körper mit drei Elementen werden die Axiome I—III und IV 2*, aber nicht IV 1 erfüllt.)

§ 5. Die Drehungsgruppe im allgemeinen Falle

Im allgemeinen Falle, in dem die Axiome IV 1 und IV 2 gelten, haben wir einen *projektiven kinematischen Raum* für die Gruppe $\mathfrak{G}_P/\{1, P\}$ erhalten. In diesem projektiven Raum lassen sich in bekannter Weise homogene Koordinaten einführen, die einen Schiefkörper bilden. Aus der Existenz von Polarkorrelationen, bei denen jeder R-Punkt mit seiner Polarebene inzidiert (7.6), folgt die *Kommutativität des Koordinatenkörpers*[11]).

Die betreffenden Polarkorrelationen werden durch lineare Transformationen (zwischen Punkt- und Ebenenkoordinaten) dargestellt. Das Produkt von zwei solchen Polarkorrelationen ist eine Kollineation, die einen beliebigen R-Punkt $\mathfrak{p}$ auf den R-Punkt $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ abbildet, wo $\mathfrak{q}$ ein fester R-Punkt ist. Wir bezeichnen diese Kollineationen als „*Rechtsschiebungen*". Da die Polarkorrelationen linear sind, werden die Rechtsschiebungen durch lineare Transformationen der homogenen Punktkoordinaten dargestellt.

Die Drehungen um P (Geradenprodukte ab mit $P/a,b$) bilden eine Gruppe $\mathfrak{D}_P$. Die R-Punkte sind die Elemente der Faktorgruppe $\mathfrak{D}_P/\{1, P\}$. Zu dieser Faktorgruppe ist die Gruppe der Rechtsschiebungen isomorph.

Jede R-Gerade Ψg läßt sich auch in der Gestalt $g\,\Psi^g$ schreiben. Die R-Geraden werden also auch durch die Mengen $g\,\Phi$ gegeben. Die R-Geraden $x\,\Phi$ mit festem Φ bilden eine *R-Geradenkongruenz*, d. h. eine Schar windschiefer R-Geraden, die den Raum vollständig überdeckt. Bei jeder echten Rechtsschiebung, die durch Rechtsmultiplikation mit einem festen R-Punkt $\mathfrak{p} \neq 1$ gegeben ist, bleiben alle R-Geraden derjenigen R-Geradenkongruenz, die zu Φ mit $\mathfrak{p} \in \Phi^2$ gehört, fest. Hieraus folgt:

Ist $\mathfrak{x}$ der homogene Koordinatenvektor eines R-Punktes und $\mathfrak{A}$ die Transformationsmatrix einer Rechtsschiebung, so liegen die R-Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{A}^2\mathfrak{x}$ auf einer Fixgeraden der zu $\mathfrak{A}$ gehörenden Kongruenz. Daher sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{A}^2\mathfrak{x}$ linear abhängig. Indem man dieses Ergebnis auf R-Punkte verschiedener Fixgeraden anwendet, erhält man eine lineare Abhängigkeit zwischen der Einheitsmatrix und den Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^2$. *Die Matrizen der Rechtsschiebungen genügen also quadratischen Gleichungen mit Koeffizienten aus dem Koordinatenkörper.*

Die Matrizen der Rechtsschiebungen bilden zusammen mit der Nullmatrix eine Divisionsalgebra über dem Koordinatenkörper des kinematischen Raumes.

[11]) Vgl. R. Baer [4] S. 106, H. Lenz [9], [10] oder K. Schütte [15].

Beweis: Das Produkt zweier Schiebungsmatrizen ist offenbar eine Schiebungsmatrix. Ist $\mathfrak{A}$ eine Schiebungsmatrix und c ein Element des Koordinatenkörpers, so ist $c\,\mathfrak{A}$ entweder die Nullmatrix oder eine Schiebungsmatrix, die zur gleichen Rechtsschiebung wie $\mathfrak{A}$ gehört (da die Koordinaten homogen sind). Es ist nur noch zu zeigen, daß auch die Summe von zwei linear unabhängigen Schiebungsmatrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ eine Schiebungsmatrix ist. $\mathfrak{e}$ sei der Koordinatenvektor des R-Punktes 1. Durch $\mathfrak{A}\,\mathfrak{e}$, $\mathfrak{B}\,\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{e} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{e}$ werden kollineare R-Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ dargestellt. Zu den Schiebungen, die durch Rechtsmultiplikation mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ bzw. $\mathfrak{p}_3$ gegeben sind, gehören die Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und eine Schiebungsmatrix $\mathfrak{C}$. Aus der Kollinearität von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ folgt die lineare Abhängigkeit der Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Mit $\mathfrak{A}\,\mathfrak{e} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{e} = \mathfrak{C}\,\mathfrak{e}$ und der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ erhält man $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = c\,\mathfrak{C}$ mit $c \neq 0$. Daher ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ eine Schiebungsmatrix.

Beachten wir nun, daß der Vektorraum des homogenen Koordinatensystems den Rang 4 hat und die lineare Abhängigkeit der Koordinatenvektoren von R-Punkten äquivalent mit der linearen Abhängigkeit der zugehörigen Schiebungsmatrizen ist, so sehen wir: *Die Divisionsalgebra Q der Schiebungsmatrizen hat den Rang 4 über dem Koordinatenkörper K.*

Die Rechtsschiebungen werden durch die multiplikative Gruppe $\mathsf{Q}^\times$ von Q gegeben. Auf Grund der Homogenität des Koordinatensystems ist also

$$\mathfrak{D}_P/\{1, P\} \cong \mathsf{Q}^\times/\mathsf{K}^\times,$$

wo $\mathsf{K}^\times$ die multiplikative Gruppe von K ist.

Wir beweisen noch, daß K *nicht die Charakteristik 2* hat. Da Q quadratisch und vom Rang 4 über K ist, findet man in jedem Falle (auch bei Charakteristik 2) Elemente $i, j \in \mathsf{Q}$ mit $i^2, j^2, ij + ji \in \mathsf{K}$, so daß $1, i, j$ linear unabhängig über K sind. Angenommen, die Charakteristik sei 2. Dann ist $\mathfrak{M} = \mathsf{K} + i\,\mathsf{K} + j\,\mathsf{K}$ ein Modul vom Rang 3 über K mit $a^2 \in \mathsf{K}$ für alle $a \in \mathfrak{M}$. Diesem Modul entspricht im kinematischen Raum eine R-Ebene g mit $\mathfrak{p}^2 \equiv 1$ für alle $\mathfrak{p}/g$. Man hat also eine Gerade g mit $(gu)^2 \equiv 1$ für jede Gerade u, also $u = g$, $u \perp g$ oder $u^g \perp u$. Dann ist 8*.4 für g erfüllt, womit sich wie im § 4 der Sonderfall mit singulären Scharen ergibt. Mit IV 2 wird also für K die Charakteristik 2 ausgeschlossen. Q ist dann als quadratische Algebra vom Rang 4 über K eine Quaternionenalgebra. Hiermit haben wir das Ergebnis:

8.3. *Bei Gültigkeit der Axiome I–III, IV 1, IV 2 ist $\mathfrak{D}_P/\{1, P\}$ isomorph $\mathsf{Q}^\times/\mathsf{K}^\times$, wo Q eine Quaternionen-Divisionsalgebra über einem kommutativen Körper K mit Charakteristik $\neq 2$ ist und $\mathsf{Q}^\times, \mathsf{K}^\times$ die multiplikativen Gruppen von Q, K sind.*

§ 6. Eigenschaften des Koordinatensystems

Aus Satz 8.3 ziehen wir einige Folgerungen für das Koordinatensystem einer Ebene, die den Axiomen I–III, IV 1, IV 2 genügt.

Die Quaternionenalgebra Q besitzt Basiselemente $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, wo ε_0 das Einselement, $\varepsilon_j^2 \in \mathsf{K}$, $\varepsilon_j\varepsilon_k = -\varepsilon_k\varepsilon_j$ (für $0 \neq j \neq k \neq 0$) und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_3$ ist. Diesen Basiselementen entsprechen im kinematischen Raum nichtkomplanare R-Punkte 1, $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ mit $\mathfrak{e}_k^2 \equiv 1$ und $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3$. Es gibt Scharen $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$ mit

$\mathfrak{e}_k^2 \in \mathsf{E}_k^2$ und Geraden

$$e_1 \in \mathsf{E}_2 \cap \mathsf{E}_3,\ e_2 = e_1 e_3 \in \mathsf{E}_3,\ e_3 = e_2 e_1 \in \mathsf{E}_2.$$

Hiermit hat man $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 = e_3 e_2$, $\mathfrak{e}_2 = e_3 e_1$, $\mathfrak{e}_3 = e_1 e_2$ und

$$\mathsf{E}_1 = [e_2, e_3],\ \mathsf{E}_2 = [e_3, e_1],\ \mathsf{E}_3 = [e_1, e_2].$$

Aus $\mathfrak{e}_2 = e_3 e_1 \in \mathsf{E}_1 e_1$ und $\mathfrak{e}_3 = e_1 e_2 \equiv e_2 e_1 \in \mathsf{E}_1 e_1$ folgt $\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3 / \mathsf{E}_1 e_1$.

Auf Grund der Quaternionenzuordnung gilt $\mathfrak{p}^2 \equiv 1$ für alle R-Punkte $\mathfrak{p}$, die mit $\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ kollinear sind, also mit der R-Geraden $\mathsf{E}_1 e_1$ inzidieren. Somit ist $(ge_1)^2 \equiv 1$ für alle $g \in \mathsf{E}_1$. Da $e_3 \in \mathsf{E}_1 \cap \mathsf{E}_2$, $e_1 \in \mathsf{E}_2$, $\mathsf{E}_1 \neq \mathsf{E}_2$ und $e_1 \not\equiv e_3$, so $e_1 \notin \mathsf{E}_1$. Für $g \in \mathsf{E}_1$ ist daher $ge_1 \neq e_1 g$, somit $ge_1 = Pe_1 g$, $g^{e_1} = Pg$, $g^{e_1} \perp g$. Entsprechend ergibt sich allgemein:

9.1. $g^{e_k} \perp g$ für alle $g \in \mathsf{E}_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

Aus der Quaternionenzuordnung folgt auch umgekehrt: Ist $\mathfrak{p}$ ein R-Punkt, der mit $1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ komplanar ist, so gilt $\mathfrak{p}^2 \equiv 1$ nur bei $\mathfrak{p} \equiv 1$ und bei Kollinearität von $\mathfrak{p}, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$. Durch $1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ wird die R-Ebene e_1 aufgespannt. Somit gilt $(ge_1)^2 \equiv 1$ nur bei $g = e_1$, $g \perp e_1$ oder $g \in \mathsf{E}_1$. Nur im letzten Falle ist $g^{e_1} \perp g$. Entsprechend erhalten wir allgemein:

9.2. $g^{e_k} \perp g$ *nur* bei $g \in \mathsf{E}_k$.

Wir wählen das Koordinatensystem so, daß die Geraden e_2, e_3, Pe_3 der Reihe nach die Gleichungen

$$y = x, \quad y = 0, \quad x = 0$$

erhalten. Dann ist stets

9.3. $x = a \perp y = b$.

Die Gerade e_1 erhält in diesem Koordinatensystem eine Gleichung

$$y = i\,x.$$

Dabei ist i ein Element des Koordinaten-Quasikörpers, das jedenfalls von 0 und von 1 verschieden ist. Es wird noch näher bestimmt werden.

$\mathfrak{M}_k$ sei die Menge der Elemente a, für die $y = ax$ eine Gerade aus der Schar E_k ist. Man hat $0, 1 \in \mathfrak{M}_1$, $0, i \in \mathfrak{M}_2$ und $1, i \in \mathfrak{M}_3$.

Bei Spiegelung an der Geraden e_3 (mit der Gleichung $y = 0$) geht der Punkt (x, y) in den Punkt $(x, -y)$ und die Gerade $y = ax$ in die Gerade $y = -ax$ über. Mit 9.1 und 9.2 folgt:

9.4 $y = ax \perp y = -ax$ genau für $a \in \mathfrak{M}_3$ (insbesondere für $a = 1$ und für $a = i$).

Da das Axiomensystem isotrope Geraden ausschließt, folgt:

9.5. Die Charakteristik des Koordinaten-Quasikörpers ist $\neq 2$.

Das Lot von einem Punkt (x_1, y_1) auf die Gerade $y = x$ hat nun die Gleichung $y = -x + x_1 + y_1$. Der Fußpunkt dieses Lotes hat die Koordinaten $(\frac{1}{2}(x_1 + y_1), \frac{1}{2}(x_1 + y_1))$. Als Bild des Punktes (x_1, y_1) bei Spiegelung an e_2 ergibt sich hiermit der Punkt (y_1, x_1). Da diese Abbildung eine Kollineation sein soll, folgt (wie in § 4) das Linkskürzungsgesetz

9.6. $a^{-1}(ab) = b$ für alle $a \neq 0$.

Aus 9.1 und 9.2 folgt außerdem:

9.7. Bei $a \neq 0$ gilt $y = ax \perp y = a^{-1}x$ genau für $a \in \mathfrak{M}_2$.

Nach 9.4 und 9.7 stellen $y = -ix$ und $y = i^{-1}x$ dieselbe Gerade dar. Daraus folgt:

9.8. $i^2 = -1$.

Gemäß 9.6 läßt sich für jede Gerade $y = ax$ mit $a \neq 0$ auch eine Gleichung $x = by$ angeben. Daher können wir $\bar{a}$ so definieren, daß stets

$$y = ax \perp x = -\bar{a}y$$

ist. Dann ist $\bar{0} = 0$ und $\bar{a} \neq 0$ für $a \neq 0$.
Aus der definierten Orthogonalität folgt durch Spiegelung an e_2

$$x = ay \perp y = -\bar{a}x$$

und weiter durch Spiegelung an e_3

$$x = -ay \perp y = \bar{a}x.$$

Die Symmetrie der Orthogonalität liefert nun:

9.9. $\bar{\bar{a}} = a$.

Aus 9.4 bzw. 9.7 folgt:

9.10. $\bar{a} = a^{-1}$ genau für $a \in \mathfrak{M}_3$ (insbesondere $\bar{1} = 1$ und $\bar{i} = -i$).

9.11. $\bar{a} = -a$ genau für $a \in \mathfrak{M}_2$.

Nach 4.9 gehören drei Geraden $y = 0$, $y = ax$, $y = bx$ genau dann zu einer Schar, wenn in jedem Dreieck mit Seiten $y = 0$, $y = ax$, $x = -\bar{b}y + c$ (wo $c \neq 0$ ist) der Höhenschnittpunktsatz gilt. Die Höhen eines solchen Dreiecks haben die Gleichungen $x = u$, $x = -\bar{a}y + c$, $y = bx$, wo $u = -\bar{b}(au) + c$ ist. Ein Höhenschnittpunkt liegt genau dann vor, wenn $\bar{a}(bu) = \bar{b}(au)$ ist. Hieraus ersieht man: Die drei Geraden gehören genau dann zu einer Schar, wenn $\bar{a}(bu) = \bar{b}(au)$ für alle u gilt. Die Anwendung auf $\mathfrak{E}_1$ mit $b = 1$ liefert:

9.12. $\bar{a} = a$ genau für $a \in \mathfrak{M}_1$.

Hiermit und mit 9.11 folgt weiterhin

9.13. $ab = ba$ für $a, b \in \mathfrak{M}_1$.

9.14. $ab = ba$ für $a, b \in \mathfrak{M}_2$.

Außerdem erhält man:

9.15. Zu jedem Element a gibt es $c \in \mathfrak{M}_3$ mit $\bar{a} = c(ac)$.

Beweis: Die Geraden $y = 0$, $y = \bar{a}x$ gehören zu einer Schar $\Phi \neq \mathfrak{E}_3$. Diese hat mit $\mathfrak{E}_3$ eine Gerade $y = cx$ gemeinsam. Man hat also $c \in \mathfrak{M}_3$, so daß $y = 0$, $y = \bar{a}x$, $y = cx$ zu einer Schar gehören. Daher ist $\bar{\bar{a}}c = \bar{c}\bar{a}$. Da $\bar{\bar{a}} = a$ und $\bar{c} = c^{-1}$ ist, folgt $\bar{a} = c(ac)$.

Das Lot von einem Punkt (x_1, y_1) auf eine Gerade $y = ax$ aus $\mathfrak{E}_3$ hat die Gleichung $y = -ax + ax_1 + y_1$. Der Fußpunkt dieses Lotes hat die Koordinaten $(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}a^{-1}y_1, \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}y_1)$. Hiermit ergeben sich für das Bild von (x_1, y_1) bei Spiegelung an $y = ax$ die Koordinaten $(a^{-1}y_1, ax_1)$. Das Produkt der Spiegelungen an den Geraden $y = bx$, $y = x$, $y = ax$ aus $\mathfrak{E}_3$ bildet demnach (x_1, y_1) auf $(a^{-1}(b^{-1}y_1), a(bx_1))$ ab. Da dieses Produkt gleich einer Spiegelung an einer Geraden aus $\mathfrak{E}_3$ ist, folgt

9.16. $a(bx) = (ab)x$ für alle $a, b \in \mathfrak{M}_3$ und beliebige x.

Außerdem muß mit a und b auch ab zu $\mathfrak{M}_3$ gehören und $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ sein. Mit 9.16 folgt $ab = ba$. Da nach 9.10 mit a auch a^{-1} zu $\mathfrak{M}_3$ gehört, gilt:

9.17. $\mathfrak{M}_3$ ist eine multiplikative abelsche Gruppe.

Bei Spiegelung an $y = ix$ geht eine Gerade $y = ax$ in $x = (i(ai))\,y$ über. Nach 9.1 folgt $i(ai) = -a$ für $a \in \mathfrak{M}_1$. Mit 9.8 und 9.12 erhält man:

9.18. $ai = ia$ für alle $a \in \mathfrak{M}_1$.

(Nach 9.14 und 9.16 gilt dasselbe für $a \in \mathfrak{M}_2$ und für $a \in \mathfrak{M}_3$.)

§ 7. Zusatzaxiom für die unitäre Ebene

Aus den Axiomen I—III konnte die Struktur der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}_P/\{1,P\}$ erschlossen werden, und es ergaben sich gewisse grundlegende Eigenschaften des Koordinaten-Quasikörpers. Die Frage, wie sich dieser Quasikörper allein mit den Axiomen I—III im Falle der Gültigkeit von IV 1 und IV 2 genau bestimmen läßt, lassen wir offen. Es soll nur noch gezeigt werden, daß sich in diesem Falle mit einem Zusatzaxiom eine ebene unitäre Geometrie ergibt.

Als Zusatzaxiom verwenden wir den „*Trapezsatz*":

V. *Stehen fünf entsprechende Seiten zweier Trapeze* (vollständiger Vierecke mit je einem Paar paralleler Seiten) *aufeinander senkrecht, so stehen auch die sechsten Seiten aufeinander senkrecht.*

Dieser Trapezsatz ist ein gemeinsamer Spezialfall des Schließungssatzes, der mit der Existenz einer Hermiteschen Orthogonalitätsbedingung äquivalent ist[12]) („Satz von den anti-orthologen Vierecken"), und eines Schließungssatzes von K. Reidemeister[13]) (der als „Satz von den orthologen Vierecken" bezeichnet werden kann). Jeder dieser beiden Schließungssätze liefert den allgemeinen Satz von Desargues. Aus beiden zusammen folgt der Satz von Pappus-Pascal. Der gemeinsame Spezialfall V liefert nur den kleinen Satz von Desargues. Wir werden aber sehen, daß er zusammen mit den anderen hier verwendeten Axiomen sogar den allgemeinen Satz von Pappus-Pascal nach sich zieht, indem er zu einem kommutativen Koordinatenkörper führt. — Ein Spezialfall des Trapezsatzes, der „Rechtecksatz", charakterisiert zusammen mit dem affinen kleinen Satz von Desargues die allgemeine euklidische Spiegelungsgeometrie[14]).

Durch zweimalige Anwendung des Trapezsatzes erhält man den kleinen Satz von Desargues: „Haben die Verbindungen AA', BB', CC' der entsprechenden Ecken zweier Dreiecke ABC, $A'B'C'$ einen Schnittpunkt, ist $AA' \parallel BC \parallel B'C'$ und $AB \parallel A'B'$, so auch $AC \parallel A'C'$." Hieraus folgt bekanntlich das distributive Gesetz[15])

$$(a + b)\,c = ac + bc.$$

(Das andere Distributivgesetz gehört zu den Gesetzen des Quasikörpers.) Mit dem Linkskürzungsgesetz 9.6 und Charakteristik $\neq 2$ (9.5) folgt nach Skorniakow[16]):

10.1 Die Koordinaten bilden einen Alternativkörper.

---

[12]) Literaturverzeichnis [15].

[13]) Literaturverzeichnis [11].

[14]) Vgl. [16] § 3.

[15]) Vgl. z. B. [5] oder [12].

[16]) Literaturverzeichnis [17]. Vgl. auch [8] oder [12].

Unmittelbar aus dem Trapezsatz folgt[17]):

10.2. $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$.

Man hat diesen Satz nur auf die Trapeze mit den Ecken (0,0), (0,b), (1,b), (1,$a+b$) bzw. (0,0), ($-\bar{b}$,0), ($-\bar{b}$,1), ($-\bar{a}-\bar{b}$,1) anzuwenden. Fünf Paare entsprechender Seiten stehen aufeinander senkrecht, nämlich $x = 0 \perp y = 0$, $y = bx \perp x = -\bar{b}y$, $y = b \perp x = -\bar{b}$, $y = ax + b \perp x = -\bar{a}y - b$ und $x = 1 \perp$ $\perp y = 1$. Nach V folgt für die sechsten Seiten $y = (a+b)x \perp x = -(\bar{a}+\bar{b})y$, d. h. $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$.

Nach 10.2. 9.11 und 9.12 sind $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ Moduln. Mit 9.9 folgt auch

$$\overline{\tfrac{1}{2}(a+\bar{a})} = \tfrac{1}{2}(a+\bar{a}) \in \mathfrak{M}_1 \text{ und } -\overline{\tfrac{1}{2}(a-\bar{a})} = \tfrac{1}{2}(a-\bar{a}) \in \mathfrak{M}_2.$$

Jedes Koordinatenelement a ist daher eindeutig als Summe von Elementen aus $\mathfrak{M}_1$ und aus $\mathfrak{M}_2$ darstellbar. Nach 9.13 und 9.14 sind die Elemente desselben Moduls $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$ multiplikativ vertauschbar. Daraus folgt:

10.3. Die Koordinaten bilden einen kommutativen Körper $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$.

Beweis: Wäre $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ ein echter Schiefkörper oder echter Alternativkörper mit dem Zentrum Z, so würde $\mathfrak{K}$ einen Modul $Z + u_1 Z + u_2 Z +$ $+ u_3 Z$ enthalten, wo u_1, u_2, u_3 paarweise nicht kommutieren. Dann kann höchstens einer der Moduln $\mathfrak{M}_1 \cap u_k Z (k = 1,2,3)$ Elemente $\neq 0$ enthalten (da alle Elemente aus $\mathfrak{M}_1$ kommutieren). Dasselbe gilt für $\mathfrak{M}_2 \cap u_k Z$. Dann ist aber $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$.

10.4. Bei $a \in \mathfrak{M}_1$ und $a \neq 0$ ist auch $a^{-1} \in \mathfrak{M}_1$.

Beweis: Bei $a \in \mathfrak{M}_1$ ist $y = ax \perp x = -ay$. Dann ist auch $y = -a^{-1}x$ eine Gerade aus E_1, also $-a^{-1} \in \mathfrak{M}_1$. Mit der Moduleigenschaft von $\mathfrak{M}_1$ folgt $a^{-1} \in \mathfrak{M}_1$.

10.5. $a^2 \in \mathfrak{M}_1$ für alle $a \in \mathfrak{M}_1$.

Beweis: Es genügt, $a \neq 1$ und $a \neq -1$ anzunehmen. Mit a gehören auch $2(a+1)$ und $2(a-1)$ zu $\mathfrak{M}_1$. Nach 10.4 folgt

$$(a^2 - 1)^{-1} = \tfrac{1}{2}(a-1)^{-1} - \tfrac{1}{2}(a+1)^{-1} \in \mathfrak{M}_1,$$

also auch $a^2 - 1 \in \mathfrak{M}_1$ und $a^2 \in \mathfrak{M}_1$.

10.6. $\mathfrak{M}_1$ ist ein kommutativer Körper.

Beweis: Hierzu ist nur noch festzustellen, daß mit a und b auch ab zu $\mathfrak{M}_1$ gehört. Das folgt aber wegen $ab = (\tfrac{1}{2}(a+b))^2 - (\tfrac{1}{2}(a-b))^2$ aus 10.5.

10.7. $b^2 \in \mathfrak{M}_1$ für alle $b \in \mathfrak{M}_2$.

Beweis: Bei $b \in \mathfrak{M}_2$ ist $\overline{1+b} = 1 - b$, also $y = (1+b)x \perp x = (b-1)y$. Die Symmetrie der Orthogonalität liefert $y = (b-1)^{-1}x \perp x = (1+b)^{-1}y$, also $\overline{(b-1)^{-1}} = -(1+b)^{-1}$. Daraus folgt

$$(b-1)^{-1} + \overline{(b-1)^{-1}} = \frac{2}{b^2-1} \in \mathfrak{M}_1.$$

Da $\mathfrak{M}_1$ ein Körper ist, so ist dann auch $b^2 \in \mathfrak{M}_1$.

10.8. $b_1 b_2 \in \mathfrak{M}_1$ für alle $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}_2$.

Beweis: Da $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ Moduln sind, folgt nach 10.7 $4 b_1 b_2 = (b_1 + b_2)^2 -$ $- (b_1 - b_2)^2 \in \mathfrak{M}_1$, also auch $b_1 b_2 \in \mathfrak{M}_1$.

[17]) H. Naumann und K. Reidemeister [11].

10.9. $ab \in \mathfrak{M}_2$ für $a \in \mathfrak{M}_1$, $b \in \mathfrak{M}_2$.

Beweis: Nach 10.3 gibt es $u \in \mathfrak{M}_1$, $v \in \mathfrak{M}_2$ mit $ab = u + v$. Mit 10.6, 10.8 folgt $ub = ab^2 - vb \in \mathfrak{M}_1$. Wäre $u \neq 0$, so auch $b \in \mathfrak{M}_1$, also $b = 0$. In jedem Falle hat man $ab \in \mathfrak{M}_2$.

Aus 10.8 und 10.9 folgt, da i in $\mathfrak{M}_2$ liegt, $\mathfrak{M}_2 = i\,\mathfrak{M}_1$. Hiermit hat man:

10.10. Der Koordinatenkörper ist algebraischer Erweiterungskörper $\mathfrak{M}_1(i)$ des Körpers $\mathfrak{M}_1$.

10.11. $\mathfrak{M}_1$ ist ein *Pythagoräischer Körper*, d. h. in $\mathfrak{M}_1$ ist jede Summe von zwei Quadraten ein Quadrat und -1 kein Quadrat.

Beweis: Wegen $i \notin \mathfrak{M}_1$ ist -1 kein Quadrat in $\mathfrak{M}_1$. Es sei $u, v \in \mathfrak{M}_1$ und $a = u + iv$. Nach 9.15 gibt es $c \in \mathfrak{M}_3$ mit $\bar{a} = ac^2$. Bei $ac = x + iy$ folgt $u^2 + v^2 = a\bar{a} = a^2c^2 = x^2 - y^2 + 2\,ixy$. Wegen $c\bar{c} = 1$ ist andererseits $a\bar{a} = ac\overline{ac} = x^2 + y^2$. Hiermit erhält man $u^2 + v^2 = x^2$ mit $x \in \mathfrak{M}_1$.

Wir fassen zusammen (indem wir P statt $\mathfrak{M}_1$ schreiben):

10.12. *Mit den Axiomen I–III, IV 1, IV 2 und V ergibt sich eine ebene unitäre Geometrie über dem algebraischen Erweiterungskörper $P(i)$ eines Pythagoräischen Körpers P mit $i^2 = -1$. Dabei ist $y = ax \perp x = -\bar{a}y$ für konjugierte Elemente $a, \bar{a}$.*

Umgekehrt genügt die unitäre Ebene über dem Erweiterungskörper $P(i)$ eines Pythagoräischen Körpers P den genannten Axiomen. Das ist für die Axiome I und II leicht einzusehen.

Zum Nachweis der Axiome III und IV bemerken wir: Die Spiegelungen an den Geraden durch den Koordinatenursprung werden dargestellt durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \text{ mit } x, y, z \in P \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Man findet, daß solche Matrizen genau dann zu einer Schar gehören, wenn die entsprechenden Vektoren (x, y, z) im dreidimensionalen Vektorraum über P komplanar sind. Hiermit ersieht man leicht, daß die Axiome III, IV 1, IV 2 erfüllt sind. Wesentlich für die Gültigkeit des Axioms III 2 ist die Eigenschaft von P, ein *Pythagoräischer* Körper zu sein, da nur unter dieser Voraussetzung je zwei Ebenen des dreidimensionalen Vektorraumes über P einen Einheitsvektor gemeinsam haben, was gerade von III 2 verlangt wird.

Axiom V erhält man schließlich mit $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ und den Körpereigenschaften.

Die Drehungen um den Ursprung werden dargestellt durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda\bar{\lambda} + \mu\bar{\mu} = 1.$$

Der Ring aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

liefert eine Quaternionen-Divisionsalgebra $\mathfrak{Q}$ über P. Die Faktorgruppe der Gruppe aller Drehungsmatrizen nach dem Normalteiler der beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist als isomorph zu $\mathfrak{Q}^\times/P^\times$ zu erkennen. Der reelle Grundkörper P des komplexen Koordinatenkörpers der Ebene ist also isomorph zum Koordinatenkörper des kinematischen Raumes der Drehungen um einen Punkt.

Literatur

[1] André, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954). — [2] Bachmann, F.: Die Begründung der absoluten Geometrie in der Ebene. Math. Ann. **113**, 424—451 (1937). — [3] Bachmann, F.: Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Math. Ann. **123**, 341—344 (1951). — [4] Baer, R.: Linear algebra and projective geometry. New York 1952. — [5] Marshall Hall: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [6] Karzel, H.: Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie. Arch. d. Math. **6**, 66—76 (1955). — [7] Karzel, H.: Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien. Arch. d. Math. **6**, 284—295 (1955). — [8] Kleinfeld, E.: Right alternative rings. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 939—944 (1953). — [9] Lenz, H.: Zur Begründung der analytischen Geometrie. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. **1954**, 17—72. — [10] Lenz, H.: Über die Einführung einer absoluten Polarität in die projektive und affine Geometrie des Raumes. Math. Ann. **128**, 363—372 (1954). — [11] Naumann, H., u. K. Reidemeister: Über Schließungssätze der Rechtwinkelgeometrie. Erscheint in Abh. math. Sem. Univ. Hamburg. — [12] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955. — [13] Podehl, E., u. K. Reidemeister: Eine Begründung der elliptischen Geometrie. Hamburg. Abh. **10**, 231—255 (1934). — [14] Schmidt, Arnold: Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. **118**, 609—625 (1943). — [15] Schütte, K.: Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität. Math. Ann. **129**, 424—430 (1955). — [16] Schütte, K.: Die Winkelmetrik in der affin-orthogonalen Ebene. Math. Ann. **130**, 183—195 (1955). — [17] Skorniakow, L. A.: Rechtsalternativkörper. Izvestija Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **15**, 177—184 (1951). — [18] Sperner, E.: Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik. Arch. d. Math. **5**, 458—468 (1954).

(Eingegangen am 21. Februar 1956)

Stein, K.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 63—93 (1956)

Analytische Zerlegungen komplexer Räume

Von

Karl Stein in München

Es sei G_z^1 ein Gebiet in der komplexen z-Ebene und $f(z)$ eine in G_z^1 definierte nichtkonstante holomorphe Funktion. Durch $z \to w = f(z)$ wird dann eine Abbildung von G_z^1 in die komplexe w-Ebene C_w^1 gegeben, und zugleich ist eine Abbildung Φ von G_z^1 auf die Riemannsche Fläche Y_w^1 der Umkehrfunktion von $w = f(z)$ bestimmt. Y_w^1 liegt im allgemeinen verzweigt über dem Gebiet $f(G_z^1) = G_w^1$ in C_w^1; bezeichnet φ die Projektion von Y_w^1 in C_w^1, so gilt $f = \varphi \circ \Phi$. Die Eigenschaften von Y_w^1 spielen bei vielen Untersuchungen, z. B. der Wertverteilungslehre, eine wesentliche Rolle.

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher ist gelegentlich die Frage gestellt worden, ob auch zu einer holomorphen Funktion $w = f(z_1, \ldots, z_n)$, die in einem Gebiete G_z^n des Raumes C_z^n der n komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ gegeben und dort nicht konstant ist, eine Riemannsche Fläche Y_w^1 und eine Abbildung Φ auf sinnvolle Art erklärt werden können. H. Behnke und E. Peschl haben schon 1935 auf die Wichtigkeit dieser Frage hingewiesen[1]). Es ist nun in der Tat möglich, zu brauchbaren Definitionen zu gelangen. Als erster hat K. Koch in seiner Dissertation[2]) gezeigt, wie sich jedem $f(z_1, \ldots, z_n)$ ein Y_w^1, die sog. analytische Projektion von G_z^n vermöge f, zuordnen läßt. In einer früheren Arbeit habe ich die Kochsche Definition vereinfacht und einige Aussagen bewiesen, aus denen die Anwendungsfähigkeit dieser Begriffsbildung hervorgeht[3]).

Bei der Definition von Y_w^1 und Φ zu vorgegebenem $f(z_1, \ldots, z_n)$ muß für $n > 1$, da eine Umkehrfunktion nicht existiert, anders als oben im Falle $n = 1$ verfahren werden. Es wird jetzt außer der Forderung, daß wiederum $f = \varphi \circ \Phi$ gelten soll, noch verlangt: Ist g irgendeine von f in G_z^n abhängige holomorphe Funktion[4]), so soll es auf Y_w^1 stets eine holomorphe Funktion ψ geben, so daß

---

[1]) Vgl. W. Rothstein, Zur Theorie der analytischen Abbildungen im Raum zweier komplexer Veränderlichen. Dissertation Münster 1935.

[2]) K. Koch, Die analytische Projektion, Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Münster, Heft 6 (1953).

[3]) K. Stein, Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Brüssel 1953, 97—107. — Siehe auch K. H. Hedtfeld, Starre einfach zusammenhängende Holomorphiegebiete, Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Münster, Heft 8 (1954).

[4]) g heißt von f abhängig, wenn in jedem Punkte von G_z^n der Rang der Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial f}{\partial z_\nu}, \frac{\partial g}{\partial z_\mu}\right)$ kleiner als zwei ist. — Zum Begriff der Abhängigkeit von holomorphen Funktionen und holomorphen Abbildungen vgl. auch den Abschnitt 6 dieser Arbeit.

$g = \psi \circ \Phi$ gilt. Es ist leicht zu sehen, daß hierdurch Y^1_w und Φ, falls vorhanden, bis auf analytische Äquivalenz eindeutig bestimmt sind, und daß für $n = 1$ die oben erklärten Y^1_w und Φ die geforderte Eigenschaft haben. Zum Nachweis der Existenz von Y^1_w und Φ kann man wie folgt vorgehen: Die Funktion f bestimmt zwei Zerlegungen $Z(f)$ und Z' von G^n_z, deren Elemente die Fasermengen von f — d. h. die durch $f = \text{const}$ in G^n_z gegebenen (nicht notwendig zusammenhängenden) analytischen Mengen — bzw. die zusammenhängenden Komponenten dieser Fasermengen sind[5]). Z' ist im allgemeinen eine echte Verfeinerung von $Z(f)$. Jede von f in G^n_z abhängige holomorphe nichtkonstante Funktion g führt zu einer Zerlegung $Z(g)$ von G^n_z, die im allgemeinen von $Z(f)$ verschieden ist, jedoch zur gleichen Zerlegung Z'. Sei nun $\tilde{Z}$ diejenige Zerlegung von G^n_z, die sich als Durchschnitt aller $Z(g)$ ergibt, wenn g die Menge der in G^n_z von f abhängigen nichtkonstanten holomorphen Funktionen durchläuft. Dann läßt sich zeigen, daß der Quotientenraum $G^n_z/\tilde{Z}$ durch Aufprägung einer komplexen Struktur zu einer Riemannschen Fläche Y^1 gemacht werden kann, derart, daß die natürliche Abbildung Φ von G^n_z auf $G^n_z/\tilde{Z}$ zu einer holomorphen Abbildung von G^n_z auf Y^1 wird. Jede von f in G^n_z abhängige holomorphe Funktion g ist auf den Elementen von $\tilde{Z}$ konstant; sie gibt Veranlassung zu einer auf Y^1 holomorphen Funktion ψ, für welche $g = \psi \circ \Phi$ gilt. Insbesondere bestimmt so f eine auf Y^1 holomorphe Funktion $w = \varphi(\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ durchlaufe Y^1). Vermöge φ wird dann Y^1 zu einer konkreten Riemannschen Fläche Y^1_w, die dem Gebiete $f(G^n_z) = G^1_w \subset C^1_w$ überlagert ist und die zusammen mit Φ den obigen Bedingungen genügt.

Die betrachtete Funktion $w = f(z_1, \ldots, z_n)$ stellt eine holomorphe Abbildung spezieller Art dar, nämlich eine holomorphe Abbildung des n-dimensionalen Gebietes G^n_z in die eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit C^1_w. Es fragt sich, ob die skizzierte Konstruktion — geeignet modifiziert — durchführbar bleibt, wenn statt von einem Gebiete des C^n_z von einem beliebigen komplexen Raum X ausgegangen wird und an die Stelle der Funktion f eine holomorphe Abbildung F von X in einen weiteren komplexen Raum X_1 tritt. Falls dies möglich ist, wird man erwarten dürfen, auch neue Einsichten insbesondere über dimensionserniedrigende holomorphe Abbildungen zu gewinnen.

Es ist zweckmäßig, hierzu den Begriff der *analytischen Zerlegung* einzuführen. Sei Z eine Zerlegung des komplexen Raumes X. Z heißt analytisch, wenn in der Menge M der Elemente von Z die Struktur eines komplexen Raumes so eingeführt werden kann, daß die natürliche Abbildung von X auf M eine holomorphe Abbildung wird. Ist nun eine holomorphe Abbildung F von X in den komplexen Raum X_1 gegeben, so werde mit $Z(F)$ bzw. $Z'(F)$ die Zerlegung von X in die Fasermengen von F bzw. in die zusammenhängenden Komponenten dieser Fasermengen bezeichnet; $Z(F)$ heißt die durch F bestimmte Zerlegung und $Z'(F)$ die durch F bestimmte einfache Zerlegung

[5]) Über Zerlegungen und Äquivalenzrelationen in topologischen Räumen siehe N. Bourbaki, Topologie générale, Paris 1951, Chap. I; ferner P. Alexandroff u. H. Hopf, Topologie, Berlin 1935, Kap. I, § 5 u. Kap. II, § 2.

von X. Es stellt sich dann das Problem: Gibt es zwischen $Z'(F)$ und $Z(F)$ eine feinste analytische Zerlegung $\tilde{Z}$ von X[5a])? Wann ist insbesondere $Z'(F)$ selbst analytisch? Wenn dies eintritt, wäre $Z'(F)$ die gesuchte Zerlegung $\tilde{Z}$.

In der vorliegenden Arbeit wird das Studium der analytischen Zerlegungen komplexer Räume in Angriff genommen. Wir beschäftigen uns vor allem mit der zweiten der eben angeschnittenen Fragen.

In den ersten beiden Abschnitten sind zunächst Definitionen und Aussagen zusammengestellt, die mit dem Begriff des komplexen Raumes in Beziehung stehen. Dieser Begriff ist von verschiedenen Autoren auf verschiedene Weise eingeführt worden. Wir legen hier eine Definition zugrunde, die sich an eine früher von H. Behnke und dem Verfasser gegebene anschließt[6]). Sie führt zu einer Klasse von Räumen, welche die Klasse der komplexen Räume im Sinne der von H. Cartan stammenden Definition[7]) umfaßt. Ob beide Klassen nicht sogar übereinstimmen, ist noch ungeklärt. — Abschnitt 3 enthält Aussagen über holomorphe Abbildungen, die im folgenden benutzt werden. Von wesentlicher Bedeutung ist ein von R. Remmert herrührender Satz[8]), der eine Bedingung dafür liefert, daß eine analytische Menge vermöge einer holomorphen Abbildung auf eine analytische Menge im Bildraum abgebildet wird.

Abschnitt 4 beschäftigt sich mit allgemeinen Eigenschaften von Zerlegungen topologischer und komplexer Räume. Es wird u. a. der Begriff der normalen analytischen Zerlegung eingeführt: Eine analytische Zerlegung Z des komplexen Raumes X heißt normal, wenn es auf dem Quotientenraum X/Z genau eine Z zugeordnete komplexe Struktur gibt. Daß nichtnormale analytische Zerlegungen möglich sind, zeigen einfache Beispiele; es kann z. B. vorkommen, daß X/Z keine Z zugeordnete komplexe Struktur gestattet, während dies für einen zu Z konjugierten Raum mit gröberer Topologie als X/Z zutrifft. Einer normalen analytischen Zerlegung ist ein komplexer Zerlegungsraum, der wieder mit X/Z bezeichnet werde, eindeutig zugeordnet.

Abschnitt 5 enthält die Hauptresultate der Arbeit. Es wird u. a. bewiesen: *Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und F eine holomorphe Abbildung von X in den komplexen Raum X_1. Die zusammenhängenden Komponenten der Fasermengen von F seien sämtlich kompakt. Dann ist die durch F bestimmte einfache Zerlegung $Z'(F)$ von X eine normale analytische Zerlegung. Die natürliche Abbildung von X auf den komplexen Zerlegungsraum $X/Z'(F)$ ist eine eigentliche holomorphe Abbildung.* — Diese Aussage bleibt richtig, wenn X ein zusammenhängender n-dimensionaler komplexer Raum im Sinne

[5a]) *$\tilde{Z}$ liegt zwischen $Z'(F)$ und $Z(F)$* heißt, daß $Z'(F)$ eine (echte oder unechte) Verfeinerung von $\tilde{Z}$ ist und $\tilde{Z}$ eine solche von $Z(F)$.

[6]) H. Behnke u. K. Stein, Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1—16 (1951).

[7]) H. Cartan, Séminaire 1951/52, Exp. XIII, 1953/54, Exp. VI.

[8]) R. Remmert, Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. **130**, 410-441 (1956). Vgl. auch K. Stein, Analytische Abbildungen allgemeiner analytischer Räume. Colloque de Topologie de Strasbourg 1954.

von H. CARTAN ist und F als holomorphe Abbildung vom globalen Range n oder $n-1$ vorausgesetzt wird. Es wird ferner eine Bedingung angegeben, unter welcher der Zerlegungsraum $X/Z'(F)$ ein komplexer Raum im Sinne von H. CARTAN ist. Ob entsprechende Aussagen für beliebige komplexe Räume X und ohne die Rangvoraussetzung über F gelten, muß offenbleiben. Sie werden falsch, wenn die Voraussetzung, daß die zusammenhängenden Komponenten der Fasermengen von F kompakt sein sollen, fallen gelassen wird.

Im Abschnitt 6 wird der dem Begriff der analytischen Projektion entsprechende allgemeinere Begriff präzisiert; wir führen für ihn, abweichend von der bisherigen Terminologie, die Bezeichnung „komplexer Basisraum zu einer holomorphen Abbildung F" ein. Im Falle der Existenz ist ein komplexer Basisraum zu F bis auf analytische Homöomorphie eindeutig bestimmt. Hinreichende Bedingungen für die Existenz ergeben sich unmittelbar aus den Resultaten des Abschnitts 5. — Die Frage, ob ein komplexer Basisraum auch dann existiert, wenn die durch die Abbildung F bestimmte einfache Zerlegung $Z'(F)$ des zugrunde liegenden komplexen Raumes X nicht analytisch ist, soll in einer späteren Arbeit behandelt werden.

1. Verzweigte Überlagerungen

Die im folgenden zugrunde liegende Definition des komplexen Raumes stützt sich auf den Begriff der analytisch verzweigten Überlagerung eines Polyzylinders. Wir behandeln in diesem Abschnitt den allgemeineren Begriff der verzweigten Überlagerung eines lokal-kompakten Raumes[9]).

Es seien R, $\tilde{R}$ lokal-kompakte Räume und φ eine stetige Abbildung von $\tilde{R}$ in R. φ heißt nach N. BOURBAKI *eigentlich*, wenn das Urbild vermöge φ jeder kompakten Menge in R eine kompakte Menge in $\tilde{R}$ ist[10]). Eine abgeschlossene Teilmenge M_0 eines lokal-zusammenhängenden topologischen Raumes R_0 heiße *nirgends zerlegend* in R_0, wenn für jede nichtleere zusammenhängende offene Menge U_0 in R_0 die Menge $U_0-(U_0\cap M_0)$ stets nichtleer und zusammenhängend ist.

R, $\tilde{R}$ seien nun zusätzlich als zusammenhängend und lokal-zusammenhängend, φ als eigentliche Abbildung von $\tilde{R}$ *auf* R vorausgesetzt. Wir nennen das Tripel $(\tilde{R}, \varphi, R) = \tilde{\mathfrak{R}}$ eine *s-fache Überlagerung von R durch $\tilde{R}$* (s eine natürliche Zahl), wenn es eine in R nirgends zerlegende Teilmenge M von R gibt, derart, daß gilt: a) die Menge $\overset{-1}{\varphi}(M) = \tilde{M}$ ist in $\tilde{R}$ nirgends zerlegend. b) Die Abbildung φ ist in jedem Punkte von $\tilde{R}-\tilde{M}$ lokal-topologisch (d. h.: zu jedem Punkte von $\tilde{R}-\tilde{M}$ gibt es eine Umgebung, die durch φ topologisch auf eine Umgebung des Bildpunktes abgebildet wird). c) Jeder Punkt von $R-M$ besitzt vermöge φ genau s verschiedene Urbildpunkte in $\tilde{R}-\tilde{M}$.

---

[9]) Zu den topologischen Grundbegriffen siehe N. BOURBAKI, Topologie générale, 2 éd., Chap. I (im folgenden zitiert als T.g.I).

[10]) N. BOURBAKI, T.g.I, § 10, Nr. 9.

d) Jeder Punkt von M besitzt vermöge φ höchstens endlich viele Urbildpunkte in $\tilde{M}$[11]). — Wir sagen, ein Punkt $\tilde{p} \in \tilde{R}$ liege über $p \in R$, wenn $p = \varphi(\tilde{p})$ ist; p ist der Grundpunkt von $\tilde{p}$. Ein Punkt $\tilde{p}$ von $\tilde{R}$, in welchem φ nicht lokal-topologisch ist, heißt Verzweigungspunkt von $\tilde{\mathfrak{R}}$. Die Abbildung φ heißt Projektionsabbildung.

Als Verzweigungspunkte von $\tilde{\mathfrak{R}}$ kommen nur Punkte von $\tilde{R}$ in Betracht, die in $\tilde{M}$, also über Punkten von M, liegen. Wir bringen dies im folgenden häufig durch die Schreibweise $\tilde{\mathfrak{R}} = (\tilde{R}, \varphi, R, M)$ zum Ausdruck und nennen $\tilde{\mathfrak{R}}$ auch eine *s-fache Überlagerung von R durch $\tilde{R}$ mit Verzweigungspunkten höchstens über M*. Ist $^*\tilde{M}$ die Menge der Verzweigungspunkte von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und $\varphi(^*\tilde{M}) = {}^*M$ ihre Bildmenge in R, so kann $^*M$ echt in M enthalten sein. $^*M$ ist die kleinste unter allen zu $\tilde{\mathfrak{R}}$ im Sinne der obigen Definition gehörigen Mengen M. Insbesondere kann $^*M$ leer sein. Ist dies der Fall, so heißt $\tilde{\mathfrak{R}}$ eine *s-fache unverzweigte Überlagerung von R*. Die obigen Bedingungen b) und c) besagen, daß $(\tilde{R} - \tilde{M}, '\varphi, R - M) = '\tilde{\mathfrak{R}}$, wo $'\varphi$ die durch Beschränkung von φ bestimmte Abbildung von $\tilde{R} - \tilde{M}$ auf $R - M$ bezeichnet, eine s-fache unverzweigte Überlagerung von $R - M$ sein soll.

Zwei s-fache Überlagerungen $(\tilde{R}, \varphi, R)$ und $(\tilde{R}^*, \varphi^*, R)$ heißen *topologisch äquivalent*, wenn es eine topologische Abbildung Φ von $\tilde{R}^*$ auf $\tilde{R}$ gibt, so daß $\varphi^* = \varphi \circ \Phi$ gilt.

Es liegt die Frage nahe, ob man, wenn eine s-fache unverzweigte Überlagerung von $R - M$ vorgegeben ist, stets zu einer s-fachen Überlagerung von R übergehen kann. Daß dies immer möglich ist, sagt aus

Satz 1. *Es sei R ein lokal-kompakter, zusammenhängender und lokal-zusammenhängender Raum, M eine nirgends zerlegende abgeschlossene Teilmenge von R. Vorgegeben sei eine s-fache unverzweigte Überlagerung $('\tilde{R}, '\varphi, R - M) = '\tilde{\mathfrak{R}}$ von $R - M$. Dann gibt es einen lokal-kompakten, zusammenhängenden und lokal-zusammenhängenden Raum $\tilde{R}$, der $'\tilde{R}$ als Teilraum enthält, und eine s-fache Überlagerung $(\tilde{R}, \varphi, R, M) = \tilde{\mathfrak{R}}$ von R durch $\tilde{R}$ mit Verzweigungspunkten höchstens über M, derart, daß φ und $'\varphi$ auf $'\tilde{R}$ übereinstimmen. $\tilde{\mathfrak{R}}$ ist bis auf topologische Äquivalenz eindeutig bestimmt, und zwar gilt genauer: Ist $(\tilde{R}^*, \varphi^*, R, M) = \tilde{\mathfrak{R}}^*$ eine weitere s-fache Überlagerung von R durch einen Raum $\tilde{R}^*$ mit entsprechenden Eigenschaften, so gibt es eine topologische Abbildung Φ von $\tilde{R}^*$ auf $\tilde{R}$, welche sich in $'\tilde{R}$ auf die Identität reduziert, derart, daß $\varphi^* = \varphi \circ \Phi$ ist.*

Es ist zweckmäßig, dem Beweise zwei auch später zu verwendende Hilfssätze voranzustellen.

Hilfssatz 1. *Es seien: R, R_1 lokal-kompakte Räume, F eine eigentliche Abbildung von R in R_1, K_1 eine kompakte Menge in R_1. Ist dann U eine Umgebung*

[11]) Zu dieser Definition vgl. H. Grauert u. R. Remmert, Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. **129**, 274—296 (1955), insbesondere § 1.

von $\overset{-1}{F}(K_1)$ in R, so gibt es eine Umgebung U_1 von K_1, derart, daß $\overset{-1}{F}(U_1)$ in U enthalten ist.

Zum Beweise werde U als offen vorausgesetzt. Dann ist $R - U = L$ abgeschlossen in R, also ist $F(L) = L_1$ abgeschlossen in R_1[12]). L_1 und K_1 sind punktfremd; demnach ist $R_1 - L_1 = U_1$ eine offene Umgebung von K_1 mit der geforderten Eigenschaft.

Hilfssatz 2. Voraussetzung: *Gegeben seien ein lokal-zusammenhängender topologischer Raum R_0 sowie zwei lokal-kompakte Räume R_1, R_2. M_0 sei eine nirgends zerlegende Teilmenge von R_0 und $'F_{01}$ eine stetige Abbildung von $R_0 - M_0$ in R_1. Es existiere eine eigentliche Abbildung F_{12} von R_1 in R_2, derart, daß $\overset{-1}{F}_{12}(q_2)$ für jeden Punkt $q_2 \in R_2$ eine endliche Menge (oder leer) ist und daß die Abbildung $F_{12} \circ {'F_{01}} = {'F_{02}}$ von $R_0 - M_0$ in R_2 zu einer stetigen Abbildung F_{02} von R_0 in R_2 fortgesetzt werden kann.*

Behauptung: *$'F_{01}$ ist zu einer stetigen Abbildung F_{01} von R_0 in R_1 fortsetzbar; F_{01} ist eindeutig bestimmt.*

$R_0 - M_0$ liegt in R_0 dicht. Da R_1 als lokal-kompakter Raum insbesondere regulär ist, gestattet $'F_{01}$ eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung F_{01} von R_0 in R_1, die dann eindeutig bestimmt ist, genau dann, wenn für jeden Punkt $p_0 \in M_0$ gilt: Strebt $q_0 \in R_0 - M_0$ gegen p_0, so strebt stets $'F_{01}(q_0)$ gegen einen Punkt von R_1[13]).

Es sei $F_{02}(p_0) = p_2$, K_2 eine kompakte Umgebung von p_2, ferner $\overset{-1}{F}_{02}(K_2) = V_0$. Wir betrachten eine Basis $\mathfrak{B}_0$ des Filters $\mathfrak{U}_{p_0}$ der Umgebungen von p_0, bestehend aus offenen zusammenhängenden Mengen U_0, die sämtlich in V_0 enthalten sind. Die Mengen $B_0 = U_0 - (U_0 \cap M_0)$ bilden dann eine Basis $'\mathfrak{B}_0$ eines Filters auf $R_0 - M_0$ (des Spurfilters von $\mathfrak{U}_{p_0}$), und $'F_{01}('\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{B}_1$ ist eine Filterbasis auf R_1. Alle Mengen von $\mathfrak{B}_1$ sind in der Menge $\overset{-1}{F}_{12}(K_2) = K_1$ enthalten, die wegen der Eigentlichkeit von F_{12} kompakt ist. Daher besitzt $\mathfrak{B}_1$ wenigstens einen Berührungspunkt. Ist $p_1^{(1)}$ ein solcher Punkt, so gilt sicher $F_{12}(p_1^{(1)}) = p_2$. Es seien $p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(m)}$ die sämtlichen Urbildpunkte von p_2 vermöge F_{12}. Wir wählen paarweise punktfremde offene Umgebungen $U_1(p_1^{(1)}), \ldots, U_1(p_1^{(m)})$. Es gibt dann nach Hilfssatz 1 eine in K_2 enthaltene offene Umgebung $U_2(p_2)$, so daß $\overset{-1}{F}_{12}(U_2(p_2))$ in $\bigcup_{\mu=1}^{m} U_1(p_1^{(\mu)})$ enthalten ist. Jede Menge B_0 der Filterbasis $'\mathfrak{B}_0$ ist zusammenhängend. Liegt ein solches B_0 insbesondere in $\overset{-1}{F}_{02}(U_2(p_2))$, so muß $'F_{01}(B_0) = B_1$ notwendig in $U_1(p_1^{(1)})$ liegen, da mit B_0 auch B_1 zusammenhängend ist und B_1 sicher in $\bigcup_{\mu=1}^{m} U_1(p_1^{(\mu)})$ liegt. Demnach konvergiert $\mathfrak{B}_1$ gegen $p_1^{(1)}$, und dies besagt, daß $'F_{01}(q_0)$ gegen $p_1^{(1)}$ strebt, wenn $q_0 \in R_0 - M_0$ gegen p_0 strebt, w.z.b.w.

---

[12]) Vgl. N. BOURBAKI, T.g.I, § 10, Nr. 9, Prop. 16.

[13]) Vgl. N. BOURBAKI, T.g.I, § 6, Nr. 7, Théorème 1, Corollaire.

Nun zum Beweise von Satz 1! — Ist p ein Punkt von M und $U(p)$ eine offene zusammenhängende Umgebung von p, so heiße $U(p) - (U(p) \cap M) = B(p)$ eine p zugeordnete ausgezeichnete Menge. $B(p)$ ist nicht leer, offen und zusammenhängend. Die Menge $'\overset{-1}{\varphi}(B(p)) \subset '\tilde{R}$ ist durch $'\varphi$ lokal-topologisch auf $B(p)$ bezogen; jede zusammenhängende Komponente von $'\overset{-1}{\varphi}(B(p))$ werde als ausgezeichnete Menge $\tilde{B}(p)$ in $'\tilde{R}$ bezeichnet.

Der Filter $\mathfrak{U}_p$ der Umgebungen von p besitzt eine aus offenen zusammenhängenden Umgebungen $U(p)$ bestehende Basis. Die Spur von $\mathfrak{U}_p$ auf $R - M$ ist ein Filter $\mathfrak{F}_p$ auf $R - M$, für welchen die ausgezeichneten Mengen $B(p)$ eine Basis bilden. Wir betrachten nun Filter $\tilde{\mathfrak{F}}_p$ auf $'\tilde{R}$, die jeweils eine aus ausgezeichneten Mengen $\tilde{B}(p)$ bestehende Basis besitzen und deren Bild vermöge $'\varphi$ in $R - M$ jeweils $\mathfrak{F}_p$ ist. Ein solcher Filter $\tilde{\mathfrak{F}}_p$ heiße ein *über p liegender Punkt* $\tilde{p}$. Zwei über Punkten $p_1, p_2 \in M$ liegende Punkte $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ sollen genau dann identisch sein, wenn die sie repräsentierenden Filter $\tilde{\mathfrak{F}}_{p_1}, \tilde{\mathfrak{F}}_{p_2}$ identisch sind. — Es ist klar, daß über jedem Punkt von M mindestens ein Punkt und höchstens s Punkte liegen.

Die Erweiterung von $'\tilde{R}$ zum Raum $\tilde{R}$ erfolgt jetzt so, daß wir zur Menge der Punkte von $'\tilde{R}$ die Menge $\tilde{M}$ aller über Punkten von M gelegenen Punkte hinzufügen. Die Abbildung $'\varphi$ wird zur Abbildung φ von $\tilde{R}$ auf R fortgesetzt, indem jedem Punkte $\tilde{p} \in \tilde{M}$ derjenige Punkt p, über welchem $\tilde{p}$ liegt (sein „Grundpunkt"), zugeordnet wird; diese Zuordnung ist eindeutig. Zur Festlegung der Topologie in $\tilde{R}$ erklären wir *ausgezeichnete Umgebungen* $\tilde{U}(\tilde{p})$ eines Punktes $\tilde{p} \in \tilde{M}$ wie folgt: Sei $\tilde{B}(p)$ eine der ausgezeichneten Mengen, die zu dem $\tilde{p}$ repräsentierenden Filter gehören. Wir betrachten die Menge S derjenigen Punkte $\tilde{p}' \in \tilde{M}$, für welche jeweils der $\tilde{p}'$ repräsentierende Filter $\tilde{\mathfrak{F}}_{p'}$ die Menge $\tilde{B}(p)$ enthält. Die Vereinigung $\tilde{B}(p) \cup S$ heiße dann eine ausgezeichnete Umgebung $\tilde{U}(\tilde{p})$. Als offene Mengen in $\tilde{R}$ werden nun die offenen Mengen in $'\tilde{R}$, die ausgezeichneten Umgebungen von Punkten von $\tilde{M}$, sowie Vereinigungen beliebig vieler solcher Mengen erklärt. Damit ist eine Topologie T in $\tilde{R}$ definiert.

$\tilde{R}$ und φ haben (nach Einführung der Topologie T) die notwendigen Eigenschaften, damit $(\tilde{R}, \varphi, R, M) = \mathfrak{R}$ eine Überlagerung von R von der in unserem Satz angegebenen Art ist. Fast unmittelbar ist zu sehen, daß $\tilde{R}$ ein zusammenhängender und lokal-zusammenhängender Hausdorffscher Raum und φ eine stetige und sogar offene Abbildung[14]) von $\tilde{R}$ auf R ist; daß für jeden Punkt $p \in M$ $\overset{-1}{\varphi}(p)$ aus höchstens s Punkten besteht, wurde schon oben festgestellt. Ferner ist $\tilde{M} = \overset{-1}{\varphi}(M)$ offenbar nirgends zerlegend in $\tilde{R}$. Daß $\tilde{R}$ lokal-kompakt und φ eine eigentliche Abbildung ist, ergibt sich wie folgt:

---

[14]) Eine Abbildung eines topologischen Raumes in einen topologischen Raum heißt offen, wenn sie offene Mengen in offene Mengen überführt.

Sei K eine kompakte Menge in R und $\overset{-1}{\varphi}(K) = \tilde{K}$ ihre Urbildmenge vermöge φ in $\tilde{R}$. Jedem Punkte $\tilde{q} \in \tilde{K}$ sei eine offene Umgebung $\tilde{V}(q) \subset \tilde{R}$ zugeordnet. Ist q irgendein Punkt von K, sind weiter $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_t (t \leq s)$ die über q liegenden Punkte von $\tilde{R}$ und $\tilde{V}(\tilde{q}_1), \ldots, \tilde{V}(\tilde{q}_t)$ die ihnen zugeordneten Umgebungen, so ist der Durchschnitt $\bigcap_{\tau=1}^{t} \varphi(\tilde{V}(q_\tau)) = V(q)$ eine offene Umgebung von q, K läßt sich mit endlich vielen solcher $V(q)$, etwa mit $V(q^{(1)}), \ldots, V(q^{(r)})$, überdecken. Dann aber wird $\tilde{K}$ sicher durch die zugehörigen $\tilde{V}(q^{(\varrho)}_{\tau_\varrho})$ ($\varrho = 1, \ldots, r$; $\tau_\varrho = 1, \ldots, t_\varrho$) überdeckt; also ist $\tilde{K}$ kompakt. Ist $\tilde{p}_0$ ein beliebig vorgegebener Punkt von $\tilde{R}$ und wird in der eben durchgeführten Überlegung speziell K als kompakte Umgebung des Punktes $\varphi(\tilde{p}_0) = p_0$ gewählt, so wird $\overset{-1}{\varphi}(K) = \tilde{K}$ eine kompakte Umgebung von $\tilde{p}_0$. Demnach ist $\tilde{R}$ lokal-kompakt, φ eine eigentliche Abbildung und mithin $(\tilde{R}, \varphi, R, M) = \tilde{\mathfrak{R}}$ eine Überlagerung von R, wie behauptet.

Sei $(\tilde{R}^*, \varphi^*, R, M) = \tilde{\mathfrak{R}}^*$ eine zweite Überlagerung von R mit den gleichen Eigenschaften wie $\tilde{\mathfrak{R}}$. Wir bezeichnen die stetige Abbildung von $\tilde{R} - \tilde{M} = '\tilde{R}$ in $\tilde{R}^*$, die durch die identische Abbildung von $'\tilde{R}$ auf sich gegeben ist, mit $'\Phi$; es gilt $'\varphi = \varphi^* \circ {'\Phi}$. Nach Hilfssatz 2 läßt sich $'\Phi$ zu einer stetigen Abbildung Φ von $\tilde{R}$ in $\tilde{R}^*$ fortsetzen, so daß dann $\varphi = \varphi^* \circ \Phi$ gilt. Die Abbildung $'\Phi^{-1} = '\Psi$ von $\tilde{R}^* - \tilde{M}^* = '\tilde{R}$ in $\tilde{R}$ ($\tilde{M}^* = \overset{-1}{\varphi}{}^*(M)$) ist ebenso zu einer stetigen Abbildung Ψ von $\tilde{R}^*$ in $\tilde{R}$ fortsetzbar, und es müssen $\Psi \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Psi$ die identischen Abbildungen von $\tilde{R}$ bzw. $\tilde{R}^*$ auf sich sein. Also ist Φ eine topologische Abbildung von $\tilde{R}$ auf $\tilde{R}^*$; $\tilde{\mathfrak{R}}$ und $\tilde{\mathfrak{R}}^*$ sind demnach in dem oben angegebenen Sinne topologisch äquivalent.

Satz 1 ist bewiesen.

Aus dem Beweise ergibt sich noch der

Zusatz. *Die Projektionsabbildung φ von $\tilde{R}$ auf R ist eine offene Abbildung. Über jedem Punkte von M liegen höchstens s Punkte von $\tilde{R}$.*

Bemerkung. *Ist $s = 1$, so stimmt natürlich $\tilde{R}$ bis auf topologische Äquivalenz mit R überein.*

2. Komplexe Räume

Wir wiederholen hier den Begriff des komplexen Raumes und damit in Beziehung stehende Begriffe und Aussagen[15]).

Sei E^n ein Polyzylinder $\{|z_1 - z_1^{(0)}| < \varrho_1, \ldots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varrho_n\}$ im Raume C^n_z der n komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n (n \geq 1)$; ferner M eine von E^n verschiedene analytische Menge in E^n. Eine s-fache Überlagerung (W, φ,

[15]) Vgl. hierzu [6]), [7]), die in [11]) zitierte Arbeit von H. GRAUERT u. R. REMMERT, ferner H. GRAUERT, Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. **129**, 233—259 (1955); H. BEHNKE, Die analytischen Gebilde von holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Arch. d. Math. **6**, 353—368 (1955), sowie die dort angegebene weitere Literatur.

$E^n, M) = \mathfrak{W}$ von E^n durch einen lokal-kompakten, zusammenhängenden und lokal-zusammenhängenden Raum W mit Verzweigungspunkten höchstens über M heiße eine *s-fache analytisch-verzweigte Überlagerung von* E^n.

Auf dem zur Überlagerung $\mathfrak{W}$ gehörenden Raum W wird der Begriff der Holomorphie von Funktionen und Abbildungen wie folgt erklärt. Eine in einer offenen Menge $B \subset W$ definierte komplexwertige Funktion f heißt *holomorph bezüglich* $\mathfrak{W}$, wenn sie stetig ist und wenn für jeden Punkt $q \in B - (B \cap \tilde{M})$ (es ist $\tilde{M} = \overset{-1}{\varphi}(M)$) gilt: Ist $\tilde{U}(\tilde{q})$ eine in $B-(B \cap \tilde{M})$ enthaltene offene Umgebung von q, die durch φ topologisch auf eine Umgebung $U(q)$ des Grundpunktes q von $\tilde{q}$ abgebildet wird, und bezeichnet $'\varphi$ die durch Beschränkung von φ bestimmte Abbildung von $\tilde{U}(\tilde{q})$ auf $U(q)$, so ist stets $f \circ {'\varphi}^{-1}$ eine in $U(q)$ holomorphe Funktion. — Sei $(W_1, \varphi_1, E_1^{n_1}, M_1) = \mathfrak{W}_1$ eine weitere analytisch verzweigte Überlagerung eines Polyzylinders $E_1^{n_1}$. Eine stetige Abbildung F von $B \subset W$ in W_1 heißt *holomorph bezüglich* $\mathfrak{W}$ *und* $\mathfrak{W}_1$, wenn gilt: Ist p_1 ein Punkt von $F(B) \subset W_1$ und f_1 eine in einer offenen Umgebung $U_1(p_1) \subset W_1$ definierte und bezüglich $\mathfrak{W}_1$ holomorphe Funktion, so ist stets $f_1 \circ F$ eine in $\overset{-1}{F}(U_1(p_1))$ bezüglich $\mathfrak{W}$ holomorphe Funktion.

Wir sagen, $(W, \varphi, E^n, M) = \mathfrak{W}$ genüge der *C-Bedingung*[16]), wenn es eine in W bezüglich $\mathfrak{W}$ holomorphe Funktion f gibt und dazu einen Punkt $p \in E^n - M$, derart, daß f in den s über p gelegenen Punkten von W untereinander verschiedene Werte annimmt. — Das Erfülltsein der C-Bedingung bedeutet, daß $\mathfrak{W}$ „Riemannsches Gebiet" einer über E^n algebroiden Funktion ist. Ob jede analytisch verzweigte Überlagerung eines Polyzylinders der C-Bedingung genügt, ist noch unbekannt.

Sei R ein lokal-zusammenhängender Hausdorffscher Raum ohne einpunktige zusammenhängende Komponenten. Es existiere auf R eine offene Teilmenge U, die durch eine topologische Abbildung ψ auf den zu einer analytisch verzweigten Überlagerung $(W, \varphi, E^n, M) = \mathfrak{W}$ gehörenden Raum W bezogen ist. Wir nennen das System $(U, \psi, W, \varphi, E^n, M) = \mathfrak{P}$ ein *lokales komplexes Parametersystem* in R; kürzer schreiben wir auch $\mathfrak{P} = (U, \psi)$. Eine Menge $\{\mathfrak{P}_i\} = \{(U_i, \psi_i, W_i, \varphi_i, E_i^{n_i}, M_i)\} = \{(U_i, \psi_i)\} = \mathfrak{R}$ (i durchlaufe eine Indexmenge I) von lokalen komplexen Parametersystemen in R heiße eine *komplexe Struktur auf* R, wenn sie folgende Eigenschaften hat: 1. Die U_i bilden eine Überdeckung von R. 2. Je zwei lokale komplexe Parametersysteme (U_{i_1}, ψ_{i_1}), (U_{i_2}, ψ_{i_2}) aus $\mathfrak{R}$ hängen holomorph zusammen, d. h.: Ist $U_{i_1} \cap U_{i_2}$ nicht leer, so sind die durch $\psi_{i_2} \circ \psi_{i_1}^{-1}$ bzw. $\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}^{-1}$ bestimmten topologischen Abbildungen von $\psi_{i_1}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$ auf $\psi_{i_2}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$ bzw. von $\psi_{i_2}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$ auf $\psi_{i_1}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$ holomorphe Abbildungen (bezüglich der zugehörigen analytisch verzweigten Überlagerungen). 3. Hängt ein lokales komplexes Parametersystem (U, ψ) mit allen $(U_i, \psi_i) \in \mathfrak{R}$ holomorph zusammen, so gehört (U, ψ) zu $\mathfrak{R}$. — Eine Menge von lokalen komplexen Parametersystemen in R, die den Forderungen 1. und 2. genügt, bestimmt stets eindeutig eine komplexe Struktur auf R. — Auf dem zur Überlagerung

[16]) Vgl. H. Grauert, a. a. O.[15]).

$(W, \varphi, E^n, M) = \mathfrak{W}$ gehörenden Raume W wird durch das komplexe Parametersystem $(W, \chi, W, \varphi, E^n, M)$ (χ bezeichnet die identische Abbildung von W auf sich) eine komplexe Struktur festgelegt; diese heiße die durch $\mathfrak{W}$ bestimmte komplexe Struktur auf W.

Besitzt der lokal-zusammenhängende Hausdorffsche Raum R einpunktige zusammenhängende Komponenten, so wird unter einer *komplexen Struktur auf* R eine Menge $\mathfrak{K}' \cup \mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}$ verstanden, wo $\mathfrak{K}'$ die Menge der einpunktigen zusammenhängenden Komponenten von R bezeichnet und $\mathfrak{K}''$ entweder die leere Menge, falls R diskret ist, oder eine komplexe Struktur auf der Vereinigung der nicht einpunktigen zusammenhängenden Komponenten von R.

Ein lokal-zusammenhängender Hausdorffscher Raum mit einer fest vorgegebenen komplexen Struktur heißt ein *komplexer Raum*. Jede offene Teilmenge B eines komplexen Raumes X läßt sich in natürlicher Weise wieder als ein komplexer Raum auffassen.

Jede zusammenhängende Komponente $X^{(j)}$ eines komplexen Raumes X hat eine eindeutig bestimmte „komplexe" Dimension d_j. Diese ist Null für einpunktige $X^{(j)}$. Ist $X^{(j)}$ nicht einpunktig und $(U, \psi, W, \varphi, E^n, M)$ ein lokales komplexes Parametersystem in $X^{(j)}$, so ist $d_j = n$. Falls die Menge der d_j beschränkt und d ihr Maximum ist, heißt d die Dimension von X.

Ein Punkt p des komplexen Raumes X heißt *uniformisierbar*, wenn entweder p ein isolierter Punkt von X ist oder wenn es ein lokales komplexes Parametersystem $(U, \psi, E^n, \chi, E^n, M)$ mit $p \in U$ auf X gibt, wobei χ die identische Abbildung des Polyzylinders E^n auf sich bezeichnet. Wir nennen im zweiten Falle U eine *Koordinatenumgebung* von p und die in E^n laufenden komplexen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ *lokale komplexe Koordinaten* in U. Besitzt X nur uniformisierbare Punkte, so ist X eine *komplexe Mannigfaltigkeit*. Die nicht uniformisierbaren Punkte eines komplexen Raumes bilden eine in X nirgends zerlegende Menge, ihr Komplement in X ist eine in X dichtliegende komplexe Mannigfaltigkeit $\mathring{X}$.

Wir sagen, der komplexe Raum X genüge im Punkte $p \in X$ der C-Bedingung, wenn entweder p ein isolierter Punkt von X ist oder wenn es ein lokales komplexes Parametersystem $(U, \psi, W, \varphi, E^n, M)$ mit $p \in U$ auf X gibt, derart, daß $(W, \varphi, E^n, M) = \mathfrak{W}$ der C-Bedingung genügt. Ein komplexer Raum, der in allen seinen Punkten der C-Bedingung genügt, heiße ein *komplexer C-Raum*. (Es bleibt offen, ob jeder komplexe Raum ein C-Raum ist[16a]).

Es seien X, X_1 komplexe Räume, F eine stetige Abbildung von X in X_1. F heißt eine *holomorphe Abbildung*, wenn für jeden Punkt $p \in X$, der kein isolierter Punkt von X und dessen Bildpunkt $F(p) = p_1$ kein isolierter Punkt von X_1 ist, gilt: Sind $(U, \psi, W, \varphi, E^n, M) = \mathfrak{P}$, $(U_1, \psi_1, W_1, \varphi_1, E_1^{n_1}, M_1) = \mathfrak{P}_1$ mit $p \in U$, $p_1 \in U_1$ lokale komplexe Parametersysteme auf X bzw. X_1, derart, daß $U \subset \overset{-1}{F}(U_1)$ ist, so ist $\psi_1 \circ F \circ \psi^{-1}$ eine holomorphe Abbildung von W

[16a]) Komplexe C-Räume sind dasselbe wie allgemeine analytische Räume (espaces analytiques généraux) im Sinne von H. Cartan, vgl. [7]).

in W_1. — Damit ist auch der Begriff der holomorphen Funktion auf X erklärt (man wähle als Raum X_1 die komplexe Ebene C^1).

Unter einer *analytischen Menge* im komplexen Raume X wird in dieser Arbeit eine Menge $A \subset X$ mit folgenden Eigenschaften verstanden: a) A ist in X abgeschlossen; b) zu jedem Punkte $p \in A$ gibt es eine Umgebung $U(p)$, derart, daß $U(p) \cap A$ genau mit der Menge der gemeinsamen Nullstellen von endlich vielen in $U(p)$ holomorphen Funktionen übereinstimmt[17]).

Jede nichtleere analytische Menge $A \subset X$ läßt sich als Bild eines komplexen Raumes vermöge einer holomorphen Abbildung darstellen. Genauer: Zu A gibt es stets einen komplexen Raum $\tilde{A}$ und eine holomorphe Abbildung Φ von $\tilde{A}$ in X mit folgenden Eigenschaften: a) Es ist $\Phi(\tilde{A}) = A$. b) Φ ist eine eigentliche Abbildung; für jeden Punkt $\tilde{p} \in \tilde{A}$ ist die Menge $\overset{-1}{\Phi}(\Phi(\tilde{p}))$ endlich. c) Es existiert eine „analytisch dünne" Teilmenge $\tilde{N}$ von $\tilde{A}$ mit $\tilde{N} = \overset{-1}{\Phi}(\Phi(\tilde{N}))$, derart, daß $\tilde{A} - \tilde{N}$ durch Φ topologisch auf $A - \Phi(\tilde{N})$ bezogen ist. Dabei heißt $\tilde{N}$ analytisch dünn in $\tilde{A}$, wenn es zu jedem Punkt $\tilde{q} \in \tilde{N}$ eine Umgebung $U(\tilde{q})$ in X und eine in $U(\tilde{q})$ analytische, dort nirgends dichte Menge gibt, die $\tilde{N} \cap U(\tilde{q})$ enthält. ($\tilde{N}$ ist auch in dem oben erklärten Sinne nirgends zerlegend in $\tilde{A}$.) — Wir nennen $(\tilde{A}, \Phi, A) = \tilde{\mathfrak{A}}$ eine *kanonische komplexe Überlagerung von* A. Mittels Hilfssatz 2 ist ersichtlich, daß $\tilde{\mathfrak{A}}$ (in einem naheliegenden Sinne) bis auf analytische Homöomorphie eindeutig bestimmt ist. Ist der Raum X, in welchem A liegt, ein komplexer C-Raum, so ist auch $\tilde{A}$ ein komplexer C-Raum.

Man gewinnt eine kanonische komplexe Überlagerung von A für den Fall, daß X ein C-Raum ist, bekanntlich dadurch, daß man in der Menge aller Paare $(p, \mathfrak{a}_p)$, wo $p \in A$ ist und $\mathfrak{a}_p$ einen durch A bestimmten „analytischen Primkeim" in p bezeichnet, in geeigneter Weise eine Topologie und eine komplexe Struktur einführt, so daß die Abbildung $(p, \mathfrak{a}_p) \to p$ eine holomorphe Abbildung wird. Sodann läßt sich auch, falls X nicht überall der C-Bedingung genügt, die Existenz von $\tilde{\mathfrak{A}}$ einsehen[18]).

Ist der zur kanonischen komplexen Überlagerung $(\tilde{A}, \Phi, A) = \tilde{\mathfrak{A}}$ gehörige Raum $\tilde{A}$ zusammenhängend, so heißt A *irreduzibel*, anderenfalls *reduzibel*. Das Bild $\Phi(\tilde{A}_j) = A_j$ einer zusammenhängenden Komponente $\tilde{A}_j$ von $\tilde{A}$ heißt eine *irreduzible Komponente* von A; ihre Dimension ist gleich der Dimension von $\tilde{A}_j$. Unter der Dimension von A in einem Punkte $p \in A$ wird die größte der Dimensionen der (endlich vielen) durch p hindurchgehenden irreduziblen Komponenten von A verstanden.

---

[17]) Vgl. hierzu die weiterreichende Definition des Begriffes der analytischen Menge bei H. Grauert u. R. Remmert, a. a. O.[11]), S. 279. — Die von uns benutzte Definition reicht für die vorliegende Arbeit aus.

[18]) Vgl. hierzu H. Cartan, a. a. O.[7]), ferner: H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **61**, 179—197, Appendice II; R. Remmert u. K. Stein, Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **125**, 263—305 (1953), sowie die in [15]) zitierten Arbeiten.

Sei wieder F eine holomorphe Abbildung des komplexen Raumes X in den komplexen Raum X_1. Für jeden Punkt $p \in X$ ist dann $\overset{-1}{F}(F(p)) = L$ eine analytische Menge in X; sie heißt eine *Fasermenge* von F. Unter einer *Niveaumenge* von F werde eine zusammenhängende (nicht notwendig irreduzible) Komponente einer Fasermenge von F verstanden. Ist d die Dimension von $L = \overset{-1}{F}(F(p))$ im Punkte p und n die Dimension der zusammenhängenden Komponente von X, in welcher p liegt, so wird $n - d$ als *lokaler Rang* r_f von F in p bezeichnet. Besitzt r_f in X ein Maximum, so heißt es der *globale Rang* r von F (r existiert sicher, wenn X zusammenhängend ist). — Als globaler Rang von F auf einer in einer zusammenhängenden Komponente von X enthaltenen analytischen Menge A mit der kanonischen komplexen Überlagerung $(\tilde{A}, \Phi, A) = \tilde{\mathfrak{A}}$ wird der globale Rang der Abbildung $F \circ \Phi$ von $\tilde{A}$ in X_1 erklärt.

Sind X und X_1 komplexe Mannigfaltigkeiten ohne einpunktige zusammenhängende Komponenten, so läßt sich die holomorphe Abbildung F lokal durch $(z_1, \ldots, z_n) \to (w_1, \ldots, w_{n_1}) = (f_1, \ldots, f_{n_1})$ beschreiben; dabei sind jeweils $z_1, \ldots, z_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_{n_1}$ lokale komplexe Koordinaten, die in Koordinatenumgebungen U in X bzw. U_1 in X_1 erklärt sind (es ist $F(U) \subset U_1$ vorausgesetzt), und $f_1, \ldots, f_{n_1}$ sind holomorphe Funktionen von $z_1, \ldots, z_n$. Unter dem Rang von F in einem Punkte $p_0 = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}) \in U$ wird sonst üblicherweise der Rang r_d der Matrix $\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right)$ in p_0 verstanden. r_d braucht aber nicht gleich dem oben definierten lokalen Rang r_f in p_0 sein; daher muß zwischen dem als Rang einer Matrix erklärten lokalen Rang r_d und dem mit Benutzung der Dimension einer Fasermenge erklärten lokalen Rang r_f unterschieden werden. Indessen stimmen r_d und r_f fast überall auf X überein, und ihre Maxima auf jeder zusammenhängenden Komponente von X sind gleich. Es kommt demnach nicht darauf an, ob der globale Rang von F mit Hilfe des lokalen Ranges r_f oder des lokalen Ranges r_d definiert wird.

3. Sätze über holomorphe Abbildungen komplexer Räume

In diesem Abschnitt werden Aussagen über holomorphe Abbildungen angegeben, die im folgenden von Bedeutung sind.

Satz 2. — **Voraussetzung:** *X_0, X_1, X_2 seien komplexe Räume; X_0 sei Vereinigung von höchstens abzählbar vielen kompakten Teilmengen. Gegeben sei eine Abbildung F_{01} von X_0 auf X_1, sowie eine Abbildung F_{12} von X_1 in X_2. Die Abbildungen F_{01} und $F_{12} \circ F_{01} = F_{02}$ seien holomorph, die Abbildung F_{12} sei stetig.*

Behauptung: *Die Abbildung F_{12} ist eine holomorphe Abbildung.*

Es bedeutet zum Beweise keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn X_1 und X_2 im folgenden als zusammenhängend vorausgesetzt werden. X_0 kann in verschiedene, aber höchstens abzählbar viele, Komponenten verschiedener Dimension zerfallen. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

a) Einer der Räume X_0, X_1 ist nulldimensional. — Die Behauptung ist trivialerweise richtig.

b) Die Dimensionen von X_0 und X_1 sind gleich eins. — Es seien mit $'X_0^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots)$ diejenigen Komponenten von X_0 bezeichnet, in denen die Abbildung F_{01} nicht konstant ist (wenigstens eine solche Komponente existiert), und mit $''X_0^{(\nu)}$ die übrigen Komponenten von X_0. Sei $\bigcup\limits_{\mu} {'X_0^{(\mu)}} = {'X_0}$ und $\bigcup\limits_{\nu} {''X_0^{(\nu)}} = {''X}$. Alle Komponenten von $'X_0$ sind eindimensional, und die Abbildung F_{01} ist dort außer in einer höchstens abzählbaren Menge $'A_0$ isolierter Punkte lokal-topologisch. Sei p_0 ein Punkt von $'X_0 - {'A_0}$ und $U_0(p_0)$ eine offene Umgebung von p_0, die durch F_{01} topologisch auf $F_{01}(U_0(p_0)) = U_1$ abgebildet wird. Bezeichnet $'F_{01}$ die durch Beschränkung von F_{01} bestimmte Abbildung von $U_0(p_0)$ auf U_1 und $'F_{10}$ die inverse Abbildung von $'F_{01}$, so gilt $F_{02} \circ {'F_{10}} = F_{12}$ in U_1; da $'F_{10}$ und F_{02} holomorph sind, trifft gleiches für F_{12} in U_1 zu. Die Abbildung F_{12} ist mithin in der X_1 enthaltenen offenen Menge $F_{01}({'X_0} - {'A_0}) = {'X_1}$ holomorph. Wäre F_{12} nicht in ganz X_1 holomorph, so wäre, da F_{12} stetig ist, die Menge S_1 der Punkte nichtholomorphen Verhaltens von F_{12} eine nichtleere perfekte, also insbesondere überabzählbare Teilmenge von X_1. Dem widerspräche aber, daß S_1 in der höchstens abzählbaren Menge $F_{01}({'A_0} \cup {''X_0}) = {''X_1}$ enthalten sein müßte.

c) Die Dimension von X_0 unterliege keiner Einschränkung (es ist zugelassen, daß X_0 Komponenten beliebig großer Dimension besitzt); X_1 sei eindimensional. — Seien wiederum $'X_0$ bzw. $''X_0$ die Vereinigungen derjenigen Komponenten von X_0, in denen F_{01} nicht konstant bzw. konstant ist; $'X_0$ ist nicht leer. Zu jedem Punkt $p_0 \in {'X_0}$ gibt es, wie leicht zu zeigen, eine offene Umgebung $V_0(p_0)$ und eine durch p_0 laufende, in $V_0(p_0)$ analytische Menge A_0 der Dimension 1, auf der F_{01} nicht konstant ist. Wir betrachten eine kanonische komplexe Überlagerung $(\tilde{A}_0, \Phi_0, A_0) = \tilde{\mathfrak{A}}_0$ von A_0. Dann ist $F_{01} \circ \Phi_0 = \Phi_{01}$ eine holomorphe Abbildung von $\tilde{A}_0$ in X_1, die $\tilde{A}_0$ auf eine Umgebung von $F_{01}(p_0) = p_1$ in X_1 abbildet. Aus b) folgt die Holomorphie von F_{12} in p_1. Mithin ist auch F_{12} in der in X_1 enthaltenen offenen Menge $F_{01}({'X_0}) = {'X_1}$ holomorph. Da die Menge $F_{01}({''X_0}) = {''X_1}$ höchstens abzählbar ist, ergibt sich wie in b) die Holomorphie von F_{12} in ganz X_1.

d) Die Dimensionen der betrachteten komplexen Räume unterliegen keiner Einschränkung (in X_0 dürfen wieder Komponenten beliebig großer Dimension auftreten). — Wir haben zu zeigen, daß für jeden Punkt $p_1 \in X_1$ gilt: Ist $U_2(p_2)$ irgendeine offene Umgebung des Bildpunktes $F_{12}(p_1) = p_2 \in X_2$, ferner f_2 eine in $U_2(p_2)$ holomorphe Funktion, so ist stets $f_2 \circ F_{12} = f_1$ in einer Umgebung von p_1 holomorph. Es braucht nur der Fall, daß p_1 ein uniformisierbarer Punkt von X_1 und daß die Dimension von X_1 in p_1 größer als 1 ist, betrachtet werden. Sei $U_1(p_1)$ eine Koordinatenumgebung von p_1 und $z_1, \ldots, z_n$ ein dort definiertes System lokaler komplexer Koordinaten; die Umgebung $U_1(p_1)$ sei so klein gewählt, daß sie in $\overset{-1}{F_{12}}(U_2(p_2))$ enthalten, daß also f_1 in ihr definiert ist. Sei E_1 das in $U_1(p_1)$ enthaltene Stück einer ein-

dimensionalen analytischen Ebene durch p_1. (E_1 wird in $U_1(p_1)$ durch $n-1$ lineare Gleichungen in den $z_1, \ldots, z_n$ gegeben.) Wir zeigen, daß f_1 auf jedem solchen E_1 (als Funktion einer auf E_1 laufenden komplexen Koordinate) holomorph ist. Dann ist f_1 nach F. HARTOGS in p_1 im üblichen Sinne holomorph. — Wir dürfen annehmen, daß E_1 in $U_1(p_1)$ durch $z_2 = \cdots = z_n = 0$ gegeben wird, daß also z_1 eine auf E_1 laufende komplexe Koordinate ist. Sei $\overset{-1}{F}_{01}(U_1(p_1)) = U_0$ und $\overset{-1}{F}_{01}(E_1) = L_0$; U_0 ist ein komplexer Teilraum von X_0 und L_0 eine in U_0 analytische Menge, die dort höchstens abzählbar viele irreduzible Komponenten aufweist. Es sei $(\tilde{L}_0, \Psi_0, L_0) = \tilde{\mathfrak{L}}_0$ eine kanonische komplexe Überlagerung von L_0; $\tilde{L}_0$ läßt sich ebenso wie X_0 als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen kompakten Teilmengen darstellen. Wir betrachten die Abbildung $F_{01} \circ \Psi_0 = \Psi_{01}$ von $\tilde{L}_0$ in X_1 und die in $\tilde{L}_0$ definierte Funktion $f_1 \circ \Psi_{01} = \tilde{f}_0$. Ψ_{01} ist holomorph, da F_{01} und Ψ_0 holomorph sind; ebenso ist $\tilde{f}_0$ holomorph, denn es gilt $\tilde{f}_0 = (f_2 \circ F_{12}) \circ (F_{01} \circ \Psi_0) = f_2 \circ F_{02} \circ \Psi_0$, und hier sind f_2, F_{02} und Ψ_0 holomorph. Ferner ist f_1 in $U_1(p_1)$, insbesondere also auf E_1, stetig. Nach c) ist daher f_1, wie behauptet, auf E_1 als Funktion von z_1 holomorph: Es gilt $f_1 \circ \Psi_{01} = \tilde{f}_0$, und man hat hierin nur Ψ_{01} als holomorphe Abbildung von $\tilde{L}_0$ auf ein Gebiet der komplexen z_1-Ebene und f_1 als Abbildung dieses Gebietes in eine weitere komplexe Ebene aufzufassen.

Satz 2 ist bewiesen.

Zusatz. *Wird die Abbildung F_{01} zusätzlich als eigentlich vorausgesetzt, so bleibt die Behauptung des Satzes 2 auch dann richtig, wenn X_0 die dort geforderte Abzählbarkeitseigenschaft nicht aufweist. Gleiches gilt, wenn F_{01} als offen vorausgesetzt wird; in diesem Falle kann überdies auf die Voraussetzung der Stetigkeit für F_{12} verzichtet werden.*

In der Tat! Ist F_{01} eigentlich, so werde X_1 mit relativ-kompakten offenen Mengen $V_1^{(i)}$ überdeckt. $X_0^{(i)} = \overset{-1}{F}_{01}(V_1^{(i)})$ ist dann jeweils relativ-kompakt in X_0, also Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen. Wird jetzt F_{01} auf $X_0^{(i)}$ und F_{12} auf $V_1^{(i)}$ beschränkt, so folgt aus Satz 2 die Holomorphie von F_{12} in $V_1^{(i)}$. — Ist F_{01} offen, so kann auf die Abzählbarkeitseigenschaften von X_0 verzichtet werden, weil es genügt, an Stelle von X_0 lokale Umgebungen in X_0 zu betrachten. Die Stetigkeit von F_{12} ergibt sich daraus, daß mit jeder offenen Menge $V_2 \subset X_2$ auch $F_{01}(\overset{-1}{F}_{02}(V_2)) = \overset{-1}{F}_{12}(V_2)$ offen ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist im Abschnitt 5 ein von R. REMMERT stammender Satz[19]), den wir in der folgenden Fassung benötigen:

Satz 3. *Es sei F eine holomorphe Abbildung des zusammenhängenden komplexen C-Raumes X in den komplexen C-Raum X_1. F sei eigentlich und vom globalen Rang r. Dann ist $F(X)$ eine r-dimensionale irreduzible analytische Menge in X_1.*

---

[19]) R. REMMERT, a. a. O.[8]).

Fast unmittelbar ergibt sich hieraus als

Korollar. *Ist A eine analytische Menge in X und r_A der globale Rang von F auf A, so ist $F(A)$ eine r_A-dimensionale analytische Menge in X_1.*

Sei nämlich $(\tilde{A}, \Phi, A)$ eine kanonische komplexe Überlagerung von A. Dann ist die Abbildung $\Phi_1 = F \circ \Phi$ von $\tilde{A}$ in X_1 holomorph und eigentlich. und diese Eigenschaften bleiben bei Beschränkung von Φ_1 auf eine zusammenhängende Komponente $\tilde{A}^{(j)}$ von $\tilde{A}$ erhalten. Nach Satz 3 ist also jeweils $\Phi_1(\tilde{A}^{(j)}) = A_1^{(j)}$ eine höchstens r_A-dimensionale analytische Menge in X_1. und für mindestens ein j ist $A_1^{(j)}$ r_A-dimensional. Wegen der Eigentlichkeit von Φ_1 dringen in jede relativ-kompakte Teilmenge von X_1 höchstens endlich viele der $A_1^{(j)}$ ein; daher ist auch $\bigcup_j A_1^{(j)} = \Phi_1(\tilde{A}) = F(A)$ eine r_A-dimensionale analytische Menge in X_1.

Bei Anwendungen des Satzes 3 ist der folgende Hilfssatz von Nutzen.

Hilfssatz 3. — Voraussetzung: *Gegeben seien: Zwei lokal-kompakte Räume R und R_1, eine stetige Abbildung F von R in R_1, ein Punkt p von R. Die durch p hindurchgehende Niveaumenge N von F (d. h. die zusammenhängende Komponente der Fasermenge $\overset{-1}{F}(F(p))$, auf welcher p liegt), sei kompakt.*

Behauptung: *Es gibt je eine offene relativ-kompakte Umgebung U von N und U_1 von $F(p) = p_1$, derart, daß $F(U) \subset U_1$ gilt und daß die durch Beschränkung von F bestimmte Abbildung $'F$ von U in U_1 eine eigentliche Abbildung ist*[20]).

Zum Beweise wählen wir eine offene relativ-kompakte Umgebung V_1 von p_1, und eine in $\overset{-1}{F}(V_1)$ enthaltene offene relativ-kompakte Umgebung V von N, derart, daß $S = \bar{V} - V$ keinen Punkt der Fasermenge $\overset{-1}{F}(F(p))$ enthält. Die Menge $F(S)$ in R_1 ist kompakt und enthält p_1 nicht. Sei nun $^*S = \overset{-1}{F}(F(S))$, $U = V - (V \cap {}^*S)$, $U_1 = V_1 - (V_1 \cap F(S))$. U, U_1 sind offene relativ-kompakte Umgebungen von N bzw. p_1, und es gilt $F(U) \subset U_1$. Sei weiter K_1 eine kompakte Teilmenge von U_1. Dann ist $\overset{-1}{F}(K_1) = K$ abgeschlossen, also ist $K \cap \bar{V} = {}^*K$ kompakt. K hat mit $^*S$ keinen Punkt gemeinsam, folglich ist $^*K$ sogar Teilmenge von U. Dies bedeutet, daß $^*K = {}'\overset{-1}{F}(K_1)$ gilt ($'F$ bezeichne die durch Beschränkung von F bestimmte Abbildung von U in U_1) und daß $'F$ infolgedessen eigentlich ist. U und U_1 haben also die behauptete Eigenschaft.

Nunmehr können wir beweisen

Satz 4. — Voraussetzung: *Gegeben seien: Ein zusammenhängender komplexer C-Raum X, ein r-dimensionaler komplexer Raum X_1, eine holomorphe Abbildung F von X in X_1 vom globalen Rang r, ein Punkt p von X. Die durch p hindurchgehende Niveaumenge N von F sei kompakt.*

---

[20]) Vgl. H. Grauert, a. a. O.[18]), Satz 1.

Behauptung: ***Jede Umgebung von N wird durch F auf eine Umgebung von $F(p) = p_1$ in X_1 abgebildet.***

Für $r = 0$ ist die Aussage trivial, es werde also $r > 0$ vorausgesetzt. Sei V irgendeine Umgebung von N. Wir können nach Hilfssatz 3 eine in V enthaltene offene Umgebung ${}^*U$ von N und eine Umgebung ${}^*U_1$ von p_1 in X_1 wählen, derart, daß $F({}^*U) \subset {}^*U_1$ gilt und daß die durch Beschränkung von F bestimmte Abbildung ${}^*F$ von ${}^*U$ in ${}^*U_1$ eigentlich ist. Sei weiter $(U_1, \psi_1, W_1, \varphi_1, E_1^{n_1}, M_1)$ ein lokales komplexes Parametersystem in X_1 mit $p_1 \in U_1$ und $U_1 \subset {}^*U_1$; es gilt $0 < n_1 \leq r$. Dann ist $\overset{-1}{{}^*F}(U_1) = U$ eine Umgebung von N. Die durch Beschränkung von ${}^*F$ bestimmte Abbildung ${}'F$ von U in U_1 ist ebenfalls eigentlich, und gleiches trifft zu für die holomorphe Abbildung $\varphi_1 \circ \psi_1 \circ {}'F = \Phi$ von U in $E_1^{n_1}$. ${}'F$ und Φ haben in U den globalen Rang r. Nach Satz 3 ist $\Phi(U)$ eine r-dimensionale analytische Menge in $E_1^{n_1}$, also ist $n_1 = r$ und $\Phi(U) = E_1^{n_1}$. Weiter ist jetzt $\overset{-1}{\Phi}(M_1) = M$ eine in U nirgends dichte analytische Menge, und die entsprechende Eigenschaft hat $\overset{-1}{\psi}_1\big(\overset{-1}{\varphi}_1(M_1)\big) = {}^*M_1$ in U_1. Sei ${}''F$ die durch Beschränkung von F bestimmte Abbildung von $U - M$ in $U_1 - {}^*M_1$. Sie ist wiederum holomorph, vom globalen Rang r und eigentlich; ferner ist $U_1 - {}^*M_1$ eine zusammenhängende r-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von X_1, insbesondere also ein komplexer C-Raum. Demnach ist ${}''F(U - M)$ auf Grund von Satz 3 eine in $U_1 - {}^*M_1$ enthaltene r-dimensionale analytische Menge; also ${}''F(U - M) = U_1 - {}^*M_1$. Wegen der Eigentlichkeit von ${}'F$ ist dann auch ${}'F(U) = U_1$. Mithin überdeckt das Bild der anfangs gegebenen Umgebung V von N vermöge F eine Umgebung von p_1, wie behauptet.

4. Analytische Zerlegungen

Bevor wir den für diese Arbeit grundlegenden Begriff der analytischen Zerlegung eines komplexen Raumes einführen, behandeln wir Zerlegungen topologischer Räume.

Es sei R ein topologischer Raum. Unter einer *Zerlegung* Z von R wird eine Überdeckung von R durch disjunkte Mengen A_j verstanden; die A_j heißen die Elemente von Z. Jeder Zerlegung Z von R entspricht umkehrbar eindeutig eine *Äquivalenzrelation* in R, die mit dem gleichen Buchstaben Z bezeichnet sei: Die Äquivalenzklassen der *Äquivalenzrelation* Z sind genau die Elemente der *Zerlegung* Z. — Eine Teilmenge von R heißt *saturiert* in bezug auf Z, wenn sie mit einem Punkt $p \in R$ stets alle Punkte des durch p hindurchgehenden Elementes von Z enthält.

Wir sagen, eine Zerlegung von R sei *einfach*, wenn ihre Elemente zusammenhängende Teilmengen von R sind. Zu jeder Zerlegung Z von R mit den Elementen A_j gehört eine *zugeordnete einfache Zerlegung*; hierunter wird diejenige Zerlegung von R verstanden, deren Elemente mit den zusammenhängenden Komponenten der A_j identisch sind. — Zwei Zerlegungen von R mögen *verwandt* heißen, wenn die ihnen zugeordneten einfachen Zerlegungen übereinstimmen. Wir nennen ferner eine Zerlegung Z_1 von R *abhängig* von einer

Zerlegung Z_2 von R, wenn die Z_2 zugeordnete einfache Zerlegung Z'_2 feiner ist als die Z_1 zugeordnete einfache Zerlegung Z'_1, d. h. wenn jedes Element von Z'_2 in einem Element von Z'_1 enthalten ist. Offenbar sind Z_1 und Z_2 genau dann verwandt, wenn Z_1 von Z_2 und Z_2 von Z_1 abhängig sind.

Zu jeder Zerlegung Z von R gehört eine Klasse von *zu Z konjugierten topologischen Räumen*. Die Punkte eines solchen Raumes E sind die Elemente A_j von Z; die Topologie von E ist so beschaffen, daß die natürliche Abbildung Φ von R auf E, welche jedem Punkt $p \in R$ das durch p hindurchgehende Element von Z zuordnet, eine stetige Abbildung wird. Jeder offenen Menge B in E entspricht eine offene saturierte Menge $\overset{-1}{\Phi}(B)$ in R. Unter allen zu Z konjugierten Räumen gibt es einen mit feinster Topologie; dieser Raum wird als der *Quotientenraum oder Zerlegungsraum* R/Z bezeichnet. Eine Teilmenge von R/Z ist genau dann offen, wenn sie als Bild einer offenen saturierten Menge in R vermöge der natürlichen Abbildung Φ von R auf R/Z auftritt.

Sei F eine stetige Abbildung von R in einen topologischen Raum R^*. Die *Fasermengen* $\overset{-1}{F}(F(p))$ $(p \in R)$ sind disjunkt und überdecken R; sie sind die Elemente einer Zerlegung von R, die als die *durch F bestimmte Zerlegung* $Z(F)$ bezeichnet werde. Die $Z(F)$ zugeordnete einfache Zerlegung heiße die *durch F bestimmte einfache Zerlegung* $Z'(F)$ von R; ihre Elemente sind die *Niveaumengen* von F, d. h. die zusammenhängenden Komponenten der Fasermengen $\overset{-1}{F}(F(p))$.

Eine Zerlegung Z von R heißt *offen*, wenn die natürliche Abbildung Φ von R auf den Zerlegungsraum R/Z offen ist. Es ist klar, daß die natürliche Abbildung von R auf einen zu Z konjugierten, aber von R/Z verschiedenen Raum niemals offen ist. Z ist genau dann offen, wenn mit einer offenen Menge B in R auch die *saturierte Hülle* $S(B)$, d. h. die Menge derjenigen Punkte von R, die mit wenigstens einem Punkte von B Z-äquivalent sind, stets offen ist.

Die Zerlegung Z heiße *eigentlich*, wenn mit jeder kompakten Teilmenge K von R auch die saturierte Hülle $S(K)$ kompakt ist.

Wir nennen ferner eine Zerlegung Z von R *kontinuierlich*, wenn folgendes gilt: Sind p, q Punkte von R und $A(p)$, $A(q)$ die durch p bzw. q hindurchgehenden Elemente von Z, so strebt mit q gegen p stets auch $A(q)$ im Sinne des topologischen Limes[21]) gegen $A(p)$. Dies läßt sich genauer so formulieren: Sei $\mathfrak{F}_p$ ein gegen p konvergenter Filter auf R, weiter $S(\mathfrak{F}_p)$ der von den saturierten Hüllen der Mengen von $\mathfrak{F}_p$ erzeugte Filter auf R. Dann soll stets die Menge der Berührungspunkte von $S(\mathfrak{F}_p)$ mit $A(p)$ übereinstimmen.

Falls R ein Hausdorffscher Raum ist und dem ersten Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiom genügt (die Umgebungsfilter der Punkte von R besitzen sämtlich abzählbare Basen), ist die Zerlegung Z von R genau dann konti-

---

[21]) Siehe P. Alexandroff-H. Hopf, Topologie, S. 112.

nuierlich, wenn gilt: Sei $\{p_\nu\}$ eine abzählbare Punktfolge, die gegen $p \in R$ konvergiert; bezeichne ferner p' einen zu p Z-äquivalenten und p'' einen zu p nicht Z-äquivalenten Punkt aus R. Ist dann $U(p')$ irgendeine Umgebung von p', so dringen stets fast alle der durch die p_ν hindurchgehenden Elemente $A(p_\nu)$ von Z in $U(p')$ ein (p' gehört zum unteren topologischen Limes der $A(p_\nu)$); andererseits existiert eine Umgebung $U(p'')$, in welche höchstens endlich viele der $A(p_\nu)$ eindringen (p'' gehört nicht zum oberen topologischen Limes der $A(p_\nu)$). — Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist fast unmittelbar ersichtlich. Ist umgekehrt die Bedingung erfüllt, so sei $\mathfrak{F}_p$ ein gegen p konvergenter Filter und $S(\mathfrak{F}_p)$ der von den saturierten Hüllen der Mengen von $\mathfrak{F}_p$ erzeugte Filter. Wäre p' nicht Berührungspunkt aller Mengen von $S(\mathfrak{F}_p)$, so folgte die Existenz einer Umgebung $V(p')$ und einer gegen p konvergenten Folge $\{p_\mu\}$, so daß kein $A(p_\mu)$ in $V(p')$ eindringt. Wäre p'' Berührungspunkt von $S(\mathfrak{F}_p)$, so ließe sich eine gegen p'' konvergente Folge $\{p''_\nu\}$ finden, derart daß jeweils fast alle $A(p''_\nu)$ in jede Umgebung von p eindringen; also müßte p zu p'' Z-äquivalent sein. Die Bedingung ist demnach auch hinreichend.

Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 5. *Sei Z eine eigentliche Zerlegung des lokal-kompakten Raumes R. Dann ist der Zerlegungsraum R/Z ein lokal-kompakter Raum, und die natürliche Abbildung Φ von R auf R/Z ist eigentlich. R/Z ist der einzige zu Z konjugierte lokal-kompakte Raum.*

Der erste Teil der Behauptung ist Inhalt einer bei N. Bourbaki bewiesenen Aussage[22]). — Ist E ein weiterer zu Z konjugierter lokal-kompakter Raum, so ist die natürliche Abbildung ψ von R/Z auf E stetig und umkehrbar-eindeutig. Aus Hilfssatz 3 in Verbindung mit Hilfssatz 1 ergibt sich, daß ψ auch offen ist; also ist ψ topologisch und folglich E mit R/Z identisch.

Satz 6. *Sei F eine stetige Abbildung des lokal-kompakten Raumes R in den lokal-kompakten Raum R_1. Alle Niveaumengen von F seien kompakt. Dann ist die durch F bestimmte einfache Zerlegung $Z'(F)$ von R eine eigentliche Zerlegung.*

Beweis. Sei p ein Punkt von R, $F(p) = p_1$ sein Bildpunkt vermöge F in R_1, N die durch p hindurchgehende Niveaumenge von F. Dann gibt es nach Hilfssatz 3 offene Umgebungen U von N und U_1 von p_1, derart, daß $F(U) \subset U_1$ gilt und daß die durch Beschränkung von F bestimmte Abbildung $'F$ von U in U_1 eigentlich ist. Sei weiter $Z'('F)$ die durch $'F$ bestimmte einfache Zerlegung von U, $'\Phi$ die natürliche Abbildung von U auf $U/Z'('F)$, K eine kompakte Teilmenge von U. Die saturierte Hülle $S'(K)$ in bezug auf $Z'(F)$ stimmt mit der saturierten Hülle $S''(K)$ in bezug auf $Z'('F)$ überein. Es ist $S''(K) = \overset{-1}{'\Phi}('\Phi(K))$, und diese Menge ist eine abgeschlossene Teilmenge von U. Andererseits ist $\overset{-1}{'F}('F(K))$ wegen der Eigentlichkeit von $'F$ eine kompakte Teilmenge von U, und $S''(K)$ ist sicher in $\overset{-1}{'F}('F(K))$ enthalten. Also ist auch $S''(K) = S'(K)$ kompakt.

---

[22]) N. Bourbaki, T.g.I, § 10, Nr. 10, Proposition 17.

Zu jedem Punkt $p \in R$ gibt es demnach eine Umgebung, derart, daß für jede in dieser Umgebung enthaltene kompakte Menge K die in bezug auf $Z'(F)$ saturierte Hülle von K kompakt ist. Da endliche Vereinigungen kompakter Mengen stets wieder kompakt sind, folgt nunmehr die Behauptung.

Satz 7. *Z sei eine kontinuierliche Zerlegung des topologischen Raumes R. Dann ist Z offen, und der Zerlegungsraum R/Z ist ein Hausdorffscher Raum.*

Beweis. a) *Z ist offen.* — Sei B eine offene Menge in R. Wäre die saturierte Hülle $S(B)$ nicht offen, so gäbe es einen Punkt $p \in S(B)$ und einen gegen p konvergenten Filter $\mathfrak{F}_p$, der eine aus Mengen M_i bestehende Basis besitzt, welche sämtlich zu $S(B)$ punktfremd sind. Auch die saturierten Hüllen $S(M_i)$ sind dann zu $S(B)$, insbesondere zu B, punktfremd. Sei $S(\mathfrak{F}_p)$ der von den saturierten Hüllen der Mengen von $\mathfrak{F}_p$ erzeugte Filter. Die Berührungspunkte von $S(\mathfrak{F}_p)$ sind genau die Punkte des durch p hindurchgehenden Elementes A_p von Z. A_p hat mit B wenigstens einen Punkt gemeinsam; also müssen alle Mengen von $S(\mathfrak{F}_p)$, insbesondere die $S(M_i)$, doch in B eindringen, womit ein Widerspruch hergestellt ist.

b) *R/Z ist ein Hausdorffscher Raum.* — Zum Nachweis der Gültigkeit des Trennungsaxioms in R/Z ist, da Z schon als offen erwiesen ist, folgendes zu zeigen: Sind p, q Punkte von R, die nicht Z-äquivalent sind, so gibt es stets offene Umgebungen $U(p)$ und $U(q)$, derart, daß kein Punkt von $U(p)$ zu einem Punkt von $U(q)$ Z-äquivalent ist. Wäre dies nicht der Fall, so folgte die Existenz eines gegen p konvergenten Filters $\mathfrak{F}_p$ mit der Eigenschaft, daß der von den saturierten Hüllen der Mengen von $\mathfrak{F}_p$ erzeugte Filter $S(\mathfrak{F}_p)$ auch den Punkt q zum Berührungspunkt hätte. Also müßten p und q doch Z-äquivalent sein, im Widerspruch zur Wahl von p und q.

Sei nun X ein komplexer Raum. Eine Zerlegung Z von X heiße *analytisch*, wenn folgendes gilt: Es gibt einen zu Z konjugierten topologischen Raum E, der sich durch Einführung einer komplexen Struktur $\mathfrak{K}$ zu einem komplexen Raum X^* machen läßt, derart, daß die natürliche Abbildung von X auf E zu einer holomorphen Abbildung von X auf X^* wird. Wir nennen $\mathfrak{K}$ eine *der analytischen Zerlegung Z zugeordnete komplexe Struktur* und X^* einen *Z zugeordneten komplexen Raum.* — Es ist klar, daß die Elemente einer analytischen Zerlegung von X analytische Mengen in X sind.

Zu einer analytischen Zerlegung Z von X existiert also stets eine holomorphe Abbildung F, so daß Z mit der durch F bestimmten Zerlegung $Z(F)$ übereinstimmt. Eine Abbildung dieser Art ist z. B. die natürliche Abbildung von X auf einen Z zugeordneten komplexen Raum X^*. Ist umgekehrt eine holomorphe Abbildung F von X *auf* einen komplexen Raum X_1 gegeben, so ist die durch F bestimmte Zerlegung $Z(F)$ von X analytisch; man gelangt zu einem $Z(F)$ zugeordneten komplexen Raum X^*, indem man die Topologie und komplexe Struktur von X_1 mit Hilfe von F auf die Menge der Fasermengen von F überträgt. Handelt es sich bei der gegebenen holomorphen Abbildung F jedoch lediglich um eine Abbildung von X *in* einen komplexen Raum X_1, so braucht $Z(F)$ keine analytische Zerlegung von X zu sein. Man erhält ein

Beispiel hierfür, wenn man die Ebene $C_z^1 = X$ einer komplexen Veränderlichen z durch eine eigentliche holomorphe Abbildung F so in den Raum $C_w^2 = X_1$ der beiden komplexen Veränderlichen w_1, w_2 abbildet, daß X in eine eindimensionale analytische Menge $F(X)$ in X_1 übergeht, welche Selbstschnittpunkte aufweist (d. h. die in gewissen ihrer Punkte lokal reduzibel ist)[23]).

Es kann weiter vorkommen, daß einer analytischen Zerlegung ein komplexer Raum zugeordnet ist, der als topologischer Raum nicht mit dem Quotientenraum übereinstimmt. Dies zeigt folgendes Beispiel. Wir betrachten die durch $(z_1, z_2) \to (w_1, w_2) = (z_1 z_2, (z_2 + 1)^2 - 1)$ gegebene holomorphe Abbildung F_1 des Raumes C_z^2 der komplexen Veränderlichen z_1, z_2 auf den Raum C_w^2 der komplexen Veränderlichen w_1, w_2. Die Fasermengen $\overset{-1}{F_1}(w)$ von F_1 ($w = (w_1, w_2)$ durchlaufe C_w^2) sind folgendermaßen beschaffen: Für $w = (w_1, w_2)$ mit $w_2 \neq 0$ ist $\overset{-1}{F_1}(w)$ ein Punktepaar, für $w = (w_1, 0)$ mit $w_1 \neq 0$ ein einzelner Punkt; $\overset{-1}{F_1}(0, 0)$ besteht aus allen Punkten $(z_1, 0)$ und dem Punkt $(0, -2)$. Die Teilmannigfaltigkeit $C_z^2 - \{(0, -2)\} = X$ von C_z^2 wird also durch F_1 *auf* $C_w^2 = X_1$ abgebildet. Es sei nun F die durch Beschränkung von F_1 bestimmte Abbildung von X auf X_1. Die durch F bestimmte Zerlegung Z ist analytisch; man erhält, wie oben angegeben, einen Z zugeordneten komplexen Raum X^*, indem man mit Hilfe von F die Topologie und komplexe Struktur von X_1 auf die Menge der Fasermengen $\overset{-1}{F}(w)$ überträgt. X^* hat aber nicht die Topologie des Quotientenraumes X/Z. Sei nämlich $'M_1$ in X_1 die Menge der Punkte (w_1, w_2) mit $w_2 \neq 0$, weiter sei $M_1 = {'M_1} \cup \{(0, 0)\}$. Dann ist $\overset{-1}{F}(M_1) = M$ in X offen, M_1 ist dagegen in X_1 nicht offen. Der in X offenen und in bezug auf Z saturierten Menge M entspricht also in X^* keine offene Menge, was der Fall sein müßte, wenn die Topologie von X^* die des Quotientenraumes X/Z wäre.

Hier liegt die Frage nahe, ob einer analytischen Zerlegung Z eines komplexen Raumes X verschiedene komplexe Räume zugeordnet sein können. Dies ist in der Tat möglich. Gehen wir z. B. von einem komplexen Raum Y, der nicht nulldimensional ist, aus und führen wir in der Menge der Punkte von Y die diskrete Topologie und die durch diese Topologie gegebene komplexe Struktur ein, so entsteht ein neuer komplexer Raum X. Die Zerlegung von X in seine Punkte ist analytisch, und zwar sind X und Y zwei dieser Zerlegung zugeordnete komplexe Räume. — Falls jedoch der zugrunde liegende komplexe Raum X Vereinigung von höchstens abzählbar vielen kompakten Teilmengen ist, folgt unmittelbar aus Satz 2, daß auf jedem zur analytischen

---

[23]) Dem Zerlegungsraum $X/Z(F)$ läßt sich in diesem Falle die Struktur eines „espace analytique" im Sinne von J. P. Serre aufprägen. Vgl. Séminaire H. Cartan 1953/54, Exp. XX: Fonctions automorphes (Exp. d. J. P. Serre). — Es lassen sich leicht weniger triviale Beispiele angeben, für welche der Zerlegungsraum $X/Z(F)$ auch keine komplexe Struktur im Sinne von J. P. Serre zuläßt.

Zerlegung Z von X konjugierten topologischen Raum höchstens eine Z zugeordnete komplexe Struktur existiert. Ferner läßt sich zeigen, daß von zwei zu Z konjugierten topologischen Räumen mit verschiedener, aber vergleichbarer topologischer Struktur — das bedeutet, daß die Topologie des einen feiner als die des anderen ist — höchstens einer eine Z zugeordnete komplexe Struktur gestattet. (Man hat zu benützen, daß eine umkehrbar-eindeutige holomorphe Abbildung eines zusammenhängenden komplexen Raumes in einen komplexen Raum gleicher Dimension offen und ihre Umkehrung wieder holomorph ist[24])). Es sei hier auf die allgemeine Behandlung der oben aufgeworfenen Frage verzichtet.

Wir nennen nun eine analytische Zerlegung Z eines komplexen Raumes X *normal*, wenn es auf dem Quotientenraum X/Z genau eine Z zugeordnete komplexe Struktur $\mathfrak{K}_Z$ gibt. Der durch Einführung von $\mathfrak{K}_Z$ auf X/Z entstehende komplexe Raum heiße *der Z zugeordnete komplexe Zerlegungsraum*; er werde wieder mit X/Z bezeichnet.

Es gilt nun

Satz 8. *Jede eigentliche analytische Zerlegung Z eines komplexen Raumes X ist normal. Außer dem Z zugeordneten komplexen Zerlegungsraum X/Z gibt es keinen weiteren Z zugeordneten komplexen Raum.*

Beweis. Jeder Z zugeordnete komplexe Raum ist insbesondere lokalkompakt; nach Satz 5 kann es daher nur auf dem Quotientenraum X/Z komplexe Strukturen geben, die der Zerlegung Z zugeordnet sind. Angenommen, es existierten auf X/Z zwei derartige komplexe Strukturen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$! Die durch Einführung von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ auf X/Z entstehenden komplexen Räume seien mit X_1^* bzw. X_2^* bezeichnet; dann sind die natürlichen Abbildungen Φ_1 von X auf X_1^* und Φ_2 von X auf X_2^* holomorph und nach Satz 5 auch eigentlich. Ist φ die durch die identische Abbildung von X/Z auf sich gegebene topologische Abbildung von X_1^* auf X_2^*, so gilt $\Phi_2 = \varphi \circ \Phi_1$ und $\Phi_1 = \varphi^{-1} \circ \Phi_2$. Nach dem Zusatz zu Satz 2 sind φ und φ^{-1} holomorph, also stimmt X_1^* mit X_2^* überein.

5. Die Existenz einfacher analytischer Zerlegungen

Zu jeder analytischen Zerlegung Z eines komplexen Raumes X gehört eine zugeordnete einfache Zerlegung Z' von X. Diese Zerlegung Z' braucht nicht wieder analytisch sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei X das Gebiet im Raume der komplexen Veränderlichen z_1, z_2, welches entsteht, wenn aus dem Polyzylinder $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ die abgeschlossene Menge $\{|z_1| \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leq |z_2| \leq \frac{3}{4}\}$ herausgenommen wird. Wir betrachten in X die holomorphe Funktion $f(z_1, z_2) \equiv z_1$. Ihre Fasermengen A_c in X sind durch $z_1 = c$ ($|c| < 1$) gegeben; sie sind für $\frac{1}{2} < |c| < 1$ zusammenhängend, für $|c| \leq \frac{1}{2}$ zerfallen sie in zwei getrennte Stücke, nämlich in einen Teil, auf dem $|z_2| < \frac{1}{4}$ und einen weiteren Teil, auf dem $|z_2| > \frac{3}{4}$ ist. Die durch f bestimmte Zerlegung $Z(f)$ von X in die Mengen A_c ist sicher analytisch. Dagegen ist die $Z(f)$ zugeordnete einfache Zerlegung $Z'(f)$ von X nicht analytisch.

[24]) Siehe H. Grauert u. R. Remmert, a. a. O.[11]), Hilfssatz 2.

Denn anderenfalls wäre jeder der Zerlegung $Z'(f)$ zugeordnete komplexe Raum eine nichtkompakte Riemannsche Fläche. Auf einer solchen Riemannschen Fläche gibt es zu zwei beliebig vorgegebenen verschiedenen Punkten stets holomorphe Funktionen, die in diesen Punkten verschiedene Werte annehmen[24a]). Es würde folgen, daß auf X eine holomorphe Funktion f_1 existierte, die auf den zusammenhängenden Komponenten der A_c konstant ist und die für wenigstens ein c_0 mit $|c_0| < \frac{1}{2}$ auf den beiden Komponenten von A_{c_0} verschiedene Werte annimmt. Das ist aber ausgeschlossen, weil die Holomorphiehülle von X[25]) der gesamte Dizylinder $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ ist und f_1 daher auf jedem A_c konstant sein muß.

Wir werden in den folgenden Aussagen hinreichende Bedingungen gewinnen, unter welchen die durch holomorphe Abbildungen bestimmten einfachen Zerlegungen des zu Grunde liegenden komplexen Raumes analytisch sind.

Satz 9. *Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, X_1 ein komplexer Raum, F eine holomorphe Abbildung von X in X_1. Gegeben sei eine kompakte Niveaumenge N von F in X. Dann gibt es eine zusammenhängende, offene, relativkompakte Umgebung V von N mit folgenden Eigenschaften:*

1. Jede in V eindringende Niveaumenge von F ist kompakt und ganz in V enthalten.

2. Die durch das System der in V enthaltenen Niveaumengen von F gebildete einfache Zerlegung Z' von V ist eine normale analytische Zerlegung.

Wir stützen den Beweis auf

Hilfssatz 4. — Voraussetzung: *Gegeben seien eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit Y, ein Polyzylinder E^r: $\{|w_1 - w_1^{(0)}| < \varrho_1, \ldots, |w_r - w_r^{(0)}| < \varrho_r\}$ im Raum der r komplexen Veränderlichen $w_1, \ldots, w_r$ $(r \geqq 1)$, eine eigentliche holomorphe Abbildung F vom globalen Rang r von Y in E^r. Sei Z' die durch F bestimmte einfache Zerlegung von Y, Φ die natürliche Abbildung von Y auf den Zerlegungsraum $Y/Z' = W$, φ diejenige Abbildung von W in E^r, für welche $F = \varphi \circ \Phi$ gilt.*

Behauptung: *$(W, \varphi, E^r) = \mathfrak{W}$ ist eine s-fache analytisch-verzweigte Überlagerung von E^r (s eine geeignete natürliche Zahl). Wird W mit der durch $\mathfrak{W}$ bestimmten komplexen Struktur versehen, so wird Φ eine holomorphe Abbildung.*

Beweis. Alle Fasermengen von F — und deswegen auch alle Niveaumengen — sind wegen der Eigentlichkeit von F kompakt. Auf Grund von Satz 6 ist daher Z' eine eigentliche Zerlegung. Nach Satz 5 ist dann W ein lokal-kompakter Raum und Φ eine eigentliche Abbildung. Da Y zusammenhängend und lokal-zusammenhängend ist, trifft gleiches für W zu[26]). Aus der Relation $F = \varphi \circ \Phi$ folgt ferner, daß φ stetig und eigentlich ist.

[24a]) Vgl. H. BEHNKE u. K. STEIN, Elementarfunktionen auf Riemannschen Flächen als Hilfsmittel für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Canad. J. Math. **2**, 152—165 (1950).

[25]) Vgl. H. BEHNKE u. P. THULLEN, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. **3**, 3 (1934), Kap. VI.

[26]) Vgl. N. BOURBAKI, T.g.I, § 11.

Nach Satz 3 ist $F(Y)$ eine r-dimensionale analytische Menge in E^r; dies bedeutet aber, daß $F(Y) = E^r$ ist. Demnach ist F eine Abbildung von Y *auf* E^r und infolgedessen φ eine Abbildung von W *auf* E^r. Der lokale Rang r_d von F ist in Y fast überall gleich r. Sei S_0 die Menge derjenigen Punkte von Y, in denen r_d kleiner als r ist. S_0 ist in Y abgeschlossen; lokal läßt sich S_0 jeweils als gemeinsame Nullstellenmenge geeigneter Funktionaldeterminanten darstellen. Demnach ist S_0 eine von Y verschiedene analytische Menge. Der globale Rang von F auf S_0 ist sicher kleiner als r. Nach dem Korollar zu Satz 3 ist dann $F(S_0) = M$ eine von E^r verschiedene analytische Menge in E^r; folglich ist $\overset{-1}{F}(M) = S$ eine von Y verschiedene analytische, also insbesondere nirgends zerlegende Teilmenge von Y.

Wir behaupten nun, daß $(W, \varphi, E^r, M) = (W, \varphi, E^r) = \mathfrak{W}$ eine endlichfache analytisch-verzweigte Überlagerung von E^r mit Verzweigungspunkten höchstens über M darstellt. Hierzu wird nacheinander gezeigt:

a) *Über einem Punkte $p^* \in E^r$ liegen stets nur endlich viele verschiedene Punkte von W.* — Dies ergibt sich daraus, daß die in Y enthaltene (nichtleere) kompakte analytische Menge $\overset{-1}{F}(p^*)$ höchstens in endlich viele zusammenhängende Komponenten zerfallen kann.

b) *Die abgeschlossene Teilmenge $\overset{-1}{\varphi}(M) = \tilde{M} \subset W$ ist nirgends zerlegend in W.* — Sei $\tilde{p}$ ein Punkt von $\tilde{M}$ und $\tilde{U}(\tilde{p})$ eine zusammenhängende offene Umgebung von $\tilde{p}$. Die offene Menge $\overset{-1}{\Phi}(\tilde{U}(\tilde{p})) = U \subset Y$ ist zusammenhängend. Denn ließe sich U in zwei nichtleere offene disjunkte Mengen U' und U'' zerlegen, so wären U' und U'' saturiert in bezug auf die Zerlegung Z'. Also wären die in $\tilde{U}(\tilde{p})$ enthaltenen Mengen $\Phi(U') = \tilde{U}'$ und $\Phi(U'') = \tilde{U}''$ offen, und ihre Vereinigung wäre $\tilde{U}(\tilde{p})$. $\tilde{U}'$ und $\tilde{U}''$ müßten disjunkt sein, da die Urbildmenge vermöge Φ jedes Punktes von W als Niveaumenge von F zusammenhängend ist. Damit hätten wir aber einen Widerspruch gegen den Zusammenhang von $\tilde{U}(\tilde{p})$. Es ist nun $U - (U \cap S) = U - (U \cap \overset{-1}{\Phi}(\tilde{M}))$ nichtleer und zusammenhängend. Daher ist auch $\Phi(U - (U \cap S)) = \tilde{U}(\tilde{p}) - (\tilde{U}(\tilde{p}) \cap \tilde{M})$ nichtleer und zusammenhängend, und es folgt die Behauptung b).

c) *Bezeichnet $'\varphi$ die durch Beschränkung von φ bestimmte Abbildung von $W - \tilde{M}$ auf $E^r - M$, so ist $(W - \tilde{M}, '\varphi, E^r - M) = \mathfrak{W}'$ eine endlichfache unverzweigte Überlagerung von $E^r - M$.* — Sicher ist $W - \tilde{M}$ zusammenhängend und lokal-zusammenhängend. Ferner: Die in Y dichte, zusammenhängende offene Menge $Y - S$ ist saturiert in bezug auf die Zerlegung Z'; infolgedessen bilden die in $Y - S$ verlaufenden Niveaumengen von F eine einfache Zerlegung Z'' von $Y - S$. Wir dürfen den Zerlegungsraum $(Y - S)/Z''$ mit $W - \tilde{M}$ identifizieren, ebenso die natürliche Abbildung $'\Phi$ von $Y - S$ auf $(Y - S)/Z''$ mit der durch Beschränkung von Φ bestimmten Abbildung von $Y - S$ auf $W - \tilde{M}$. Sei $'F$ die durch Beschränkung von F bestimmte Abbildung von $Y - S$ auf $E^r - M$; es gilt dann $'F = '\varphi \circ '\Phi$. Die Abbildungen $'\Phi$

und $'F$ sind wiederum eigentlich; also gilt gleiches für $'\varphi$. Wir behaupten weiter, daß $'F$ und $'\Phi$ offene Abbildungen sind. Für $'F$ folgt dies leicht daraus, daß der lokale Rang r_d von $'F$ überall in $Y - S$ den Maximalwert r hat: Ist p ein Punkt von $Y - S$, so gibt es in einer geeigneten Umgebung $U(p) \subset Y - S$ lokale komplexe Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ $(n \geqq r)$ mit p als Ursprung, derart, daß in $U(p)$ die Abbildung $'F$ durch $(z_1, \ldots, z_r, \ldots, z_n) \to (w_1, \ldots, w_r) = (z_1 + w_1^{(1)}, \ldots, z_r + w_r^{(1)})$ gegeben wird; hierbei ist $(w_1^{(1)}, \ldots, w_r^{(1)})$ der Bildpunkt von p vermöge $'F$. Jeder in $U(p)$ enthaltene Polyzylinder G^n (in bezug auf die Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$) mit p als Mittelpunkt wird durch $'F$ auf einen in E^r enthaltenen Polyzylinder mit $'F(p)$ als Mittelpunkt abgebildet; G^n heiße eine *normale Umgebung* von p. Zum Nachweis der Offenheit von $'\Phi$ zeigen wir, daß Z'' eine kontinuierliche Zerlegung ist[27]). Sei $p^{(\nu)}$ eine gegen $p^{(0)} \in Y - S$ konvergierende Folge von Punkten in $Y - S$; es seien $N^{(\nu)}$ bzw. $N^{(0)}$ die (in $Y - S$ enthaltenen) Niveaumengen von F durch $p^{(\nu)}$ bzw. $p^{(0)}$. Der obere topologische Limes der $N^{(\nu)}$ ist sicher in $N^{(0)}$ enthalten, denn ist $U(N^{(0)})$ irgendeine in $Y - S$ enthaltene und dort relativ-kompakte Umgebung von $N^{(0)}$, deren Rand zu $\overset{-1}{'F}('F(N^{(0)}))$ punktfremd ist, so müssen notwendig fast alle $N^{(\nu)}$ in $U(N^{(0)})$ liegen. Andererseits bildet der untere topologische Limes $\underline{\mathrm{lt}}\,(N^{(\nu)})$ der $N^{(\nu)}$ auf $N^{(0)}$ eine (in bezug auf die Relativtopologie von $N^{(0)}$) offene Menge, denn mit jedem Punkt $q \in \underline{\mathrm{lt}}\,(A^{(\nu)})$ müssen auch alle in einer normalen Umgebung von q gelegenen Punkte auf $N^{(0)}$ zu $\underline{\mathrm{lt}}\,(N^{(\nu)})$ gehören. Daher ist die Folge $N^{(\nu)}$ topologisch konvergent und $N^{(0)}$ ihr Limes. Z'' ist also kontinuierlich; nach Satz 7 ist folglich $'\Phi$ eine offene Abbildung. — Mit $'F$ ist auch $'\varphi$ offen: Ist $\tilde{B} \subset W - \tilde{M}$ eine offene Menge, so ist auch $'\varphi(\tilde{B}) = {}'F(\overset{-1}{'\Phi}(\tilde{B}))$ offen. $'\varphi$ ist ferner lokal umkehrbar-eindeutig. Sei nämlich $\tilde{p}'$ ein Punkt von $W - \tilde{M}$, p' ein Urbildpunkt von p' vermöge $'\Phi$ in $Y - S$ und $U(p')$ eine normale Umgebung von p'. Dann ist $'\Phi(U(p')) = \tilde{U}(\tilde{p}')$ eine offene Umgebung von $\tilde{p}'$, und je zwei verschiedene Punkte von $\tilde{U}(\tilde{p}')$ müssen vermöge $'\varphi$ in $E^r - M$ verschiedene Bildpunkte besitzen, denn die normale Umgebung $U(p')$ kann nicht von verschiedenen Niveaumengen, die durch $'F$ auf den gleichen Punkt in $E^r - M$ abgebildet werden, getroffen werden. Folglich ist $'\varphi$ eine lokal-topologische Abbildung. Wegen der Eigentlichkeit von φ' muß dann jeder Punkt von $E^r - M$ die gleiche Anzahl s von Urbildpunkten vermöge $'\varphi$ in $W - \tilde{M}$ besitzen. Also ist $(W - \tilde{M}, {}'\varphi, E^r - M) = \mathfrak{W}'$ eine s-fache unverzweigte Überlagerung von $E^r - M$ und folglich $(W, \varphi, E^r, M) = \mathfrak{W}$, wie behauptet, eine s-fache analytisch-verzweigte Überlagerung von E^r mit Verzweigungspunkten höchstens über M.

Versehen wir W mit der durch $\mathfrak{W}$ bestimmten komplexen Struktur, so wird φ eine holomorphe Abbildung; gleiches trifft für die Abbildung $'\Phi$ zu, da lokal $'\Phi = {}'\varphi^{-1} \circ {}'F$ gilt ($'\varphi^{-1}$ bezeichne jeweils einen geeigneten eindeutigen

---

[27]) Vgl. oben Abschnitt 4, S. 79—81. — Es ist klar, daß jeder komplexe Raum dem ersten Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiom genügt.

Zweig der Umkehrung von $'\varphi$). Mithin ist auch Φ als stetige Fortsetzung von $'\Phi$ auf W eine holomorphe Abbildung.

Hilfssatz 4 ist bewiesen.

Es fragt sich, ob Hilfssatz 4 richtig bleibt, wenn Y nur als komplexer Raum, der möglicherweise nichtuniformisierbare Punkte aufweist, vorausgesetzt wird. Wir können diese Frage hier nur teilweise beantworten. Bei dem Versuch, den obigen Beweis zu übertragen, treten zwei wesentliche Schwierigkeiten auf. Wir hatten oben die Menge S_0 der Punkte singulären Verhaltens von F betrachtet; S_0 war die Menge derjenigen Punkte von Y, in denen der lokale Rang r_a von F nicht seinen Maximalwert r annahm. Es wurde dann entscheidend benutzt, daß S_0 eine analytische Menge in Y war, ferner daß die analytische Menge $F(S_0) = M$ von E^r verschieden und deswegen auch $\overset{-1}{F}(F(S_0)) = S$ von Y verschieden war. Setzen wir nun Y als zusammenhängenden n-dimensionalen komplexen Raum voraus, so hätten wir als Menge S_0 die Menge zu nehmen, die sich zusammensetzt erstens aus der Menge S_0' der nichtuniformisierbaren Punkte von Y und zweitens aus der Menge S_0'' derjenigen Punkte von $Y - S_0'$, in welchen der lokale Rang r_a von F kleiner als r ist. Es ist indessen noch unbekannt, ob S_0' stets eine analytische Menge in Y ist; dies steht nach Resultaten von K. Oka und H. Cartan[28]) bisher lediglich für komplexe C-Räume Y fest. Wir müssen uns daher darauf beschränken, Y als komplexen C-Raum anzunehmen; S_0' ist dann eine höchstens $(n-2)$-dimensionale analytische Menge in Y. S_0'' ist jedenfalls eine von $Y - S_0'$ verschiedene analytische Menge in $Y - S_0'$, und es läßt sich zeigen, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{S}_0''$ von S_0'' in Y eine analytische Menge in Y ist[29]). Demnach ist auch $S_0 = S_0' \cup S_0'' = S_0' \cup \overline{S}_0''$ eine von Y verschiedene analytische Menge in Y. Es kann aber jetzt nicht ohne weitere Einschränkung behauptet werden, daß $F(S_0) = M \neq E^r$ ist. Zwar ist sicher $F(S'')$ von E^r verschieden, aber es könnte $F(S_0') = E^r$ sein. $F(S_0')$ ist genau dann von E^r verschieden, wenn der globale Rang von F auf S_0' kleiner als r ist. Dies tritt z. B. dann ein, wenn von vornherein feststeht, daß die Dimension von S_0' kleiner als r ist, also insbesondere dann, wenn $r > n - 2$ vorausgesetzt wird. In diesem Falle läßt sich der obige Beweis in seinem weiteren Verlauf fast wörtlich übertragen. Als Resultat ergibt sich die folgende

Bemerkung. *Die Aussage von Hilfssatz 4 bleibt richtig, wenn Y als zusammenhängender n-dimensionaler komplexer C-Raum und F als eigentliche holomorphe Abbildung vom globalen Range $r > n - 2$ vorausgesetzt wird.*

Nunmehr läßt sich Satz 9 schnell beweisen. — Wir dürfen voraussetzen, daß X und X_1 zusammenhängend sind, ferner daß die Dimension n von X und die Dimension n_1 von X_1 von Null verschieden sind. Die Punkte von N mögen durch F in den Punkt $\bar{p}_1 \in X_1$ abgebildet werden. Nach Hilfssatz 3

[28]) K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII — Lemme fondamental. Journ. of the Math. Soc. Japan **3**, 204—214 u. 259—278 (1951); H. Cartan, Séminaire 1953/54, Exp. X u. XI.

[29]) Vgl. R. Remmert, a. a. O.[8]).

gibt es je eine offene relativ-kompakte Umgebung U' von N und U_1' von $\bar{p}_1$, so daß $F(U') \subset U_1'$ gilt und daß die durch Beschränkung von F bestimmte Abbildung $'F$ von U' in U_1' eigentlich ist. Sei $(U_1, \psi_1, W_1, \varphi_1, E_1^{n_1}, M_1)$ mit $\bar{p}_1 \in U_1$ und $U_1 \subset U_1'$ ein lokales komplexes Parametersystem auf X_1. Wir betrachten die Menge $U = \overset{-1}{'F}(U_1)$ und bezeichnen mit V ihre N enthaltende zusammenhängende Komponente. V ist eine relativ-kompakte offene Umgebung von N. Die durch Beschränkung von F bestimmte Abbildung $''F$ von V in U_1 ist wieder eigentlich, und gleiches gilt für die holomorphe Abbildung $F^* = \varphi_1 \circ \psi_1 \circ {''F}$ von V in $E_1^{n_1}$. Offenbar sind alle Niveaumengen von F^* auch Niveaumengen von $''F$ und umgekehrt, und alle diese Niveaumengen sind wegen der Eigentlichkeit von $''F$ und F^* kompakt. Das bedeutet, daß jede in V eindringende Niveaumenge von F ganz in V verläuft und kompakt ist.

Sei r der globale Rang von F in X; er stimmt mit dem globalen Rang von F^* in V überein. Es gilt $n_1 \geqq r$. Wir dürfen die Betrachtung auf den Fall $n_1 = r$ beschränken. Ist nämlich $n_1 > r$, so ist nach Satz 3 $F^*(V) = L^r$ eine irreduzible r-dimensionale analytische Menge in $E_1^{n_1}$. Sei $(\tilde{L}, \tilde{\Phi}, L^r)$ ein kanonischer komplexer Überlagerungsraum von L^r; $\tilde{L}$ hat die Dimension r. Mittels Hilfssatz 2 folgt die Existenz einer holomorphen Abbildung $\tilde{F}$ von V auf $\tilde{L}$, so daß $F^* = \tilde{\Phi} \circ \tilde{F}$ gilt. Die durch $\tilde{F}$ bestimmte einfache Zerlegung von V stimmt mit der durch F^* hervorgerufenen überein, also auch mit der durch F bewirkten. Es können nun X, X_1, F durch $V, \tilde{L}, \tilde{F}$ ersetzt werden, da es sich bei unserem Satz lediglich um eine Aussage über die durch F in einer Umgebung von N bewirkte einfache Zerlegung handelt.

Es darf also $n_1 = r$ angenommen werden. Nunmehr wird Hilfssatz 4 angewandt. Aus ihm folgt: Ist Z' die durch F^* bestimmte einfache Zerlegung von V, so läßt sich der Zerlegungsraum $V/Z' = W$ durch Einführung einer komplexen Struktur zu einem komplexen Raum machen, derart, daß die natürliche Abbildung Φ von V auf W eine holomorphe Abbildung wird. Demnach ist Z' eine analytische Zerlegung. Daß Z' normal ist, ergibt sich aus Satz 8 in Verbindung mit Satz 6.

Die Menge V hat demnach die in unserem Satz behaupteten Eigenschaften. Satz 9 ist bewiesen.

Da im Beweise der Mannigfaltigkeitscharakter von X nicht explizit benutzt wurde, ergibt sich aus der Bemerkung zu Hilfssatz 4 sogleich der folgende

Zusatz zu Satz 9. *Die Aussage von Satz 9 bleibt richtig, wenn X als zusammenhängender n-dimensionaler komplexer C-Raum und F als holomorphe Abbildung, deren globaler Rang größer als $n - 2$ ist, vorausgesetzt wird.*

Wir können jetzt die Satz 9 entsprechende Aussage über einen analogen globalen Sachverhalt gewinnen.

Satz 10. *Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, X_1 ein komplexer Raum, F eine holomorphe Abbildung von X in X_1 mit lauter kompakten Niveaumengen. Dann ist die durch F bestimmte einfache Zerlegung Z' von X eine normale analytische Zerlegung von X.*

Beweis. Der Quotientenraum $X/Z' = R^*$ ist nach Satz 6 und Satz 5 lokalkompakt, und die natürliche Abbildung Φ von X auf R^* ist eigentlich. Auf Grund von Satz 9 gibt es in R^* lokale komplexe Parametersysteme $(U_i^*, \psi_i, W_i, \varphi_i, E_i^{n_i}, M_i) = \mathfrak{P}_i$, so daß die U_i^* eine Überdeckung von R^* bilden und daß jeweils die durch Beschränkung von Φ bestimmte Abbildung Φ_i von $\overset{-1}{\Phi}(U_i^*) = V_i$ auf U_i holomorph ist. Die $\mathfrak{P}_i$ hängen holomorph zusammen. Haben nämlich $U_{i_1}^*$ und $U_{i_2}^*$ den nichtleeren Durchschnitt $U_{i_1 i_2}^* = U_{i_1}^* \cap U_{i_2}^*$, so stimmen Φ_{i_1} und Φ_{i_2} in $V_{i_1 i_2} = \overset{-1}{\Phi}(U_{i_1 i_2}^*)$ überein; in $V_{i_1 i_2}$ gilt dann auch $\psi_{i_2} \circ \Phi_{i_2} = \psi_{i_2} \circ \psi_{i_1}^{-1} \circ (\psi_{i_1} \circ \Phi_{i_1})$. Da $\psi_{i_1} \circ \Phi_{i_1}$ und $\psi_{i_2} \circ \Phi_{i_2}$ holomorphe Abbildungen darstellen, muß nach Satz 2 die durch $\psi_{i_2} \circ \psi_{i_1}^{-1}$ gegebene Abbildung von $\psi_{i_1}(U_{i_1 i_2}^*)$ auf $\psi_{i_2}(U_{i_1 i_2}^*)$ holomorph sein, und gleiches gilt für die Umkehrung dieser Abbildung. Demnach bestimmen die $\mathfrak{P}_i$ eine komplexe Struktur $\mathfrak{K}$ auf R^*, die R^* zu einem komplexen Raum X^* macht, derart, daß Φ eine holomorphe Abbildung wird. Die Zerlegung Z' ist also analytisch; daß sie normal ist, folgt wiederum aus Satz 8.

Ob X^* stets ein komplexer C-Raum ist, muß hier offen bleiben. Wir können aber eine hinreichende Bedingung dafür angeben, daß X^* in einem gegebenen Punkte die C-Bedingung erfüllt.

Zusatz 1 zu Satz 10. *Ist p ein Punkt von X, in welchem die Dimension der durch p hindurchgehenden Niveaumenge N von F minimal ist, so genügt der Z' zugeordnete komplexe Zerlegungsraum $X^* = X/Z$ im Punkte $\Phi(p) = p^*$ der C-Bedingung.*

Die Voraussetzung über N besagt, daß keine Niveaumenge von F, die in der p enthaltenden zusammenhängenden Komponente von X enthalten ist, in irgendeinem ihrer Punkte eine kleinere Dimension haben soll als N in p.

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß X (und deshalb auch X^*) zusammenhängend ist. X habe die Dimension n und X^* die Dimension r (es ist $n \geqq r$); dann hat die natürliche Abbildung Φ von X auf X^* in X den globalen Rang r. Aus unserer Voraussetzung folgt, daß N in p $(n - r)$-dimensional ist. Daher existiert in einer geeigneten offenen Umgebung $U(p)$ eine dort irreduzible und singularitätenfreie analytische Menge L^r der Dimension r, die mit N genau den Punkt p gemeinsam hat und die als Bild eines r-dimensionalen Polyzylinders E_0^r vermöge einer holomorphen umkehrbar-eindeutigen Abbildung g von E_0^r in $U(p)$ gegeben werden kann. E_0^r sei der Polyzylinder $\{|t_1| < 1, \ldots, |t_r| < 1\}$ im Raum C_t^r der komplexen Veränderlichen $t_1, \ldots, t_r$, und es gelte $g(0) = p$ (0 bezeichne den Nullpunkt des C_t^r). Die Abbildung $\Psi = \Phi \circ g$ von E_0^r in X^* ist holomorph, und die Menge $\overset{-1}{\Psi}(\Psi(0)) = \overset{-1}{\Psi}(p^*)$ besteht nur aus dem Punkt 0. Nach Hilfssatz 3 gibt es Umgebungen $U_0(0) \subset E_0^r$ und $U^*(p^*) \subset X^*$, so daß $\Psi(U_0(0)) \subset U^*(p^*)$ gilt und die durch Beschränkung von Ψ bestimmte Abbildung $'\Psi$ von $U_0(0)$ in $U^*(p^*)$ eine eigentliche holomorphe Abbildung ist. Insbesondere bestehen dann alle Fasermengen von $'\Psi$ aus jeweils endlich vielen isolierten Punkten.

Wir führen nun in X^* ein lokales komplexes Parametersystem $(U^{**}, \psi, W, \varphi, E^r, M)$ mit $p^* \in U^{**}$ und $U^{**} \subset U^*(p^*)$ ein. (Der Fall, daß $W = E^r$, also p^* ein uniformisierbarer Punkt ist, kann hier außer Betracht bleiben, da dann X^* in p^* trivialerweise der C-Bedingung genügt). Sei $V_0' = {}'\overset{-1}{\Psi}(U^{**})$ und V_0 die 0 enthaltende zusammenhängende Komponente von V_0'. Die durch Beschränkung von $'\Psi$ bestimmte Abbildung $''\Psi$ von V_0 in U^{**} ist ebenfalls eigentlich, und gleiches gilt für die Abbildungen $\sigma = \psi \circ {}''\Psi$ von V_0 in W und $\tau = \varphi \circ \sigma$ von V_0 in E^r. Mittels Satz 4 folgt, daß σ und τ offene Abbildungen von V_0 *auf* W bzw. von V_0 *auf* E^r sind. Die Menge derjenigen Punkte von V_0, in welchen der lokale Rang r_d von τ kleiner als r ist, bilden dort eine von V_0 verschiedene analytische Menge S_0. Nach dem Korollar zu Satz 3 ist $\tau(S_0) = M'$ eine von E^r verschiedene analytische Menge in E^r; ebenso sind dann $\overset{-1}{\varphi}(M \cup M') = \tilde{M}''$ und $\overset{-1}{\tau}(M \cup M') = \overset{-1}{\sigma}(\tilde{M}'') = M_0''$ analytische Mengen in W bzw. V_0, und es ist $\tilde{M}'' \neq W$, $M_0'' \neq V_0$. Nunmehr folgt, daß $(V_0, \sigma, W, \tilde{M}'') = \mathfrak{V}_0$ eine etwa s-fache Überlagerung von W und $(V_0, \tau, E^r, M \cup M') = \mathfrak{V}_0'$ eine etwa s'-fache analytisch-verzweigte Überlagerung von E^r darstellt (wobei s ein Teiler von s' ist): Für $\mathfrak{V}_0'$ ergibt sich dies wie im Beweise von Satz 9; für $\mathfrak{V}_0$ folgt es daraus, daß σ eigentlich und in $V_0 - M_0''$ lokal topologisch ist (es gilt $\tau = \varphi \circ \sigma$, und τ, φ sind in $V_0 - M_0''$ bzw. in $W - \tilde{M}''$ lokal topologisch).

Sei t ein variabler Punkt in $V_0 - M_0''$. Die Menge $\overset{-1}{\sigma}(\sigma(t))$ besteht jeweils aus s verschiedenen Punkten $t^{(1)} = t, t^{(2)}, \ldots, t^{(s)}$, und die Menge $\overset{-1}{\tau}(\tau(t))$ aus s' verschiedenen Punkten $t^{(1)} = t, t^{(2)}, \ldots t^{(s)}, \ldots, t^{(s')}$. Wir wählen eine in V_0 holomorphe Funktion $f(t)$, die für wenigstens ein festes $t_c \in V_0 - M_0''$ in den s' verschiedenen Punkten $t_c^{(1)} = t_c, t_c^{(2)}, \ldots, t_c^{(s)}, \ldots, t_c^{(s')}$ lauter verschiedene Werte annimmt — Funktionen dieser Art existieren, da V_0 Teilmenge eines Polyzylinders ist — und bilden die s elementar-symmetrischen Funktionen $a_1(t) = f(t^{(1)}) + \cdots + f(t^{(s)}), \ldots, a_s(t) = f(t^{(1)}) \cdot \ldots \cdot f(t^{(s)})$ der $f(t^{(\nu)})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Die a_ν geben Veranlassung zu holomorphen Funktionen $\tilde{a}_\nu$ in $W - \tilde{M}''$, für welche $a_\nu = \tilde{a}_\nu \circ \sigma$ gilt; aus Hilfssatz 2 folgt, daß sie sich zu in ganz W holomorphen Funktionen fortsetzen lassen (die wieder mit $\tilde{a}_\nu$ bezeichnet seien). Offenbar nehmen die $\tilde{a}_\nu$ in verschiedenen Punkten $\tilde{q}_c, \tilde{q}_c'$, die beide über dem Grundpunkt $\tau(t_c) = \varphi(\tilde{q}_c) = \varphi(\tilde{q}_c')$ liegen, nicht alle zugleich die gleichen Werte an. Es läßt sich dann eine Linearkombination $\tilde{a} = \alpha_1 \cdot \tilde{a}_1 + \cdots + \alpha_s \cdot \tilde{a}_s$ mit geeigneten komplexen Koeffizienten α_ν finden, die eine in W holomorphe Funktion darstellt, welche in den über dem Grundpunkt $\tau(t_c)$ gelegenen Punkten von W sämtlich verschiedene Werte annimmt. Das aber bedeutet, daß die Überlagerung $(W, \varphi, E^r, M) = \mathfrak{W}$ der C-Bedingung genügt; folglich ist auch im Punkte p^* von X^* die C-Bedingung erfüllt.

Ist X keine komplexe Mannigfaltigkeit, sondern nur ein komplexer C-Raum, so läßt sich wiederum die Aussage von Satz 10 unter entsprechenden Einschränkungen wie bei Hilfssatz 4 und Satz 9 aufrechterhalten. Auch der Beweis des Zusatzes 1 zu Satz 10 läßt sich in geeigneter Weise übertragen. Es gilt also:

Zusatz 2 zu Satz 10. *Die Aussagen von Satz 10 und Zusatz 1 zu Satz 10 bleiben richtig, wenn X als zusammenhängender n-dimensionaler komplexer C-Raum und F als holomorphe Abbildung, deren globaler Rang größer als $n-2$ ist, vorausgesetzt wird.*

Bemerkung. *Die Voraussetzung über den Rang von F im obigen Zusatz ist genau dann erfüllt, wenn es in X eine Niveaumenge der Dimension* 0 *oder der Dimension* 1 *gibt.*

6. Komplexe Basisräume zu holomorphen Abbildungen

Wir erweitern zunächst den Begriff der analytischen Abhängigkeit von Funktionen auf holomorphe Abbildungen. Es seien X, X_1, X_2 komplexe Räume, F_1 und F_2 holomorphe Abbildungen von X in X_1 bzw. von X in X_2. F_2 heiße von F_1 *abhängig*, wenn die durch F_2 bestimmte Zerlegung Z_2 von X abhängig ist von der durch F_1 bestimmten Zerlegung Z_1 von X (vgl. Abschnitt 4); dies ist genau dann der Fall, wenn F_2 auf jeder Niveaumenge von F_1 konstant bleibt[30]). Ist F_2 von F_1 abhängig und F_1 von F_2, so nennen wir F_1 und F_2 *verwandt*. In diesem Falle stimmen die durch F_1 und F_2 bestimmten einfachen Zerlegungen Z_1' und Z_2' von X überein, d. h. Z_1 und Z_2 sind verwandt.

Sind zwei Systeme $\mathfrak{S} = \{f_1, \ldots, f_k\}, \mathfrak{S}^* = \{f_1^*, \ldots, f_l^*\}$ holomorpher Abbildungen $f_\varkappa, f_\lambda^*$ des komplexen Raumes X in komplexe Räume $X_\varkappa$ bzw. X_λ^* $(\varkappa = 1, \ldots, k;\ \lambda = 1, \ldots, l)$ gegeben, so werden die beiden Abbildungen

$$F: p \to (f_1(p), \ldots, f_k(p)) \text{ von } X \text{ in } X_1 \times \cdots \times X_k$$

und

$$F^*: p \to (f_1^*(p), \ldots, f_l^*(p) \text{ von } X \text{ in } X_1^* \times \cdots \times X_l^*$$

betrachtet (p bezeichne einen variablen Punkt von X). Das System $\mathfrak{S}^*$ heißt *abhängig* vom System $\mathfrak{S}$, wenn F^* von F abhängig ist. Entsprechend wird die *Verwandtschaft* von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^*$ erklärt.

Die Abhängigkeit von holomorphen Abbildungen des komplexen Raumes X bleibt bei Beschränkung der Abbildungen auf einen komplexen Teilraum $'X$ erhalten. Das Umgekehrte gilt indessen nicht immer; beim Übergang von $'X$ zu X kann z. B. die Abhängigkeit in analytischen Teilmengen von $X - 'X$ gestört werden.

Sei nun F_1 eine feste holomorphe Abbildung von X in den komplexen Raum X_1. Wir fragen, ob es hierzu eine holomorphe Abbildung Φ mit folgenden Eigenschaften gibt: a) Φ ist eine mit F_1 verwandte Abbildung von X *auf* einen komplexen Raum X^*; b) Ist F irgendeine von F_1 abhängige Abbildung von X in einen komplexen Raum X', so gibt es eine holomorphe Abbildung f von X^* in X', so daß $F = f \circ \Phi$ gilt. (Insbesondere soll es also auch eine holomorphe Abbildung f_1 von X^* in X_1 mit $F_1 = f_1 \circ \Phi$ geben.) — Existiert

[30]) Es ist leicht ersichtlich, daß dieser Begriff der Abhängigkeit holomorpher Abbildungen bei Spezialisierung auf holomorphe Funktionen in Gebieten des C^n in den üblichen Begriff der Abhängigkeit von Funktionen [vgl. [4])] übergeht.

eine Abbildung Φ dieser Art, so nennen wir das Paar (Φ, X^*) eine *zu F_1 gehörige komplexe Basis* und X^* selbst einen *komplexen Basisraum zur Abbildung F_1*.

Im Falle der Existenz einer komplexen Basis (Φ, X^*) entsprechen die holomorphen Abbildungen f von X^* und die von F_1 abhängigen holomorphen Abbildungen F von X vermöge der Beziehung $F = f \circ \Phi$ einander umkehrbar-eindeutig. Ist (Φ, X^*) vorgegeben und soll etwa eine Klasse von holomorphen Abbildungen von X, welche von F_1 abhängig sind, studiert werden, so können stattdessen die entsprechenden Abbildungen von X^* betrachtet werden.

Eine zu F_1 gehörige komplexe Basis ist nicht eindeutig bestimmt, aber je zwei stehen in einem einfachen Zusammenhang. Sind (Φ, X^*), (Φ_1, X_1^*) zwei zu F_1 gehörige komplexe Basen, so gibt es wegen der obigen Forderungen a) und b) eine holomorphe Abbildung φ von X^* *auf* X_1^* und eine holomorphe Abbildung φ_1 von X_1^* *auf* X^*, derart, daß $\Phi_1 = \varphi \circ \Phi$ und $\Phi = \varphi_1 \circ \Phi_1$ gilt. Hieraus folgt $\Phi = (\varphi_1 \circ \varphi) \circ \Phi$ und $\Phi_1 = (\varphi \circ \varphi_1) \circ \Phi_1$, mithin muß $\varphi_1 \circ \varphi$ die identische Abbildung von X^* auf sich und $\varphi \circ \varphi_1$ die identische Abbildung von X_1^* auf sich sein. Daher ist φ eine umkehrbar-eindeutige Abbildung von X^* auf X_1^* und $\varphi_1 = \varphi^{-1}$. Wir bezeichnen die Basen (Φ, X^*) und (Φ_1, X_1^*) als *analytisch äquivalent*. Es gilt also

Satz 11. *Je zwei zu einer holomorphen Abbildung F_1 gehörige komplexe Basen sind analytisch äquivalent. Ein komplexer Basisraum zu F_1 ist bis auf analytische Homöomorphie eindeutig bestimmt.*

Für die Existenz einer zu F_1 gehörigen komplexen Basis (Φ, X^*) läßt sich leicht eine notwendige Bedingung angeben. Jedenfalls muß die durch Φ bestimmte Zerlegung $Z(\Phi)$ von X analytisch sein, und sie muß feiner sein als jede Zerlegung von X, die durch eine von F_1 abhängig holomorphe Abbildung F bestimmt wird. Andererseits sollen die durch F_1 und Φ bestimmten einfachen Zerlegungen $Z'(F_1)$ und $Z'(\Phi)$ zusammenfallen. $Z(\Phi)$ muß also die feinste analytische Zerlegung von X zwischen $Z'(F_1)$ und $Z(F_1)$ sein. *Notwendig für die Existenz einer zu F_1 gehörigen komplexen Basis ist demnach, daß es zwischen den Zerlegungen $Z'(F_1)$ und $Z(F_1)$ von X eine feinste analytische Zerlegung gibt.*

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn $Z'(F_1)$ selbst eine analytische Zerlegung ist. Hierzu haben wir im Abschnitt 5 Aussagen gewonnen.

Zunächst gilt

Satz 12. *Es seien X, X_1 komplexe Räume und F_1 eine holomorphe Abbildung von X in X_1. Die durch F_1 bestimmte einfache Zerlegung $Z'(F_1)$ von X sei eine normale analytische Zerlegung. Ist dann $X/Z'(F_1) = X^*$ der $Z'(F_1)$ zugeordnete komplexe Zerlegungsraum und Φ die natürliche Abbildung von X auf X^*, so ist (Φ, X^*) eine zu F_1 gehörige komplexe Basis sicher dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *X ist Vereinigung von höchstens abzählbar vielen kompakten Teilmengen.*
2. *Φ ist eine eigentliche Abbildung.*

In der Tat: Ist F irgendeine von F_1 abhängige holomorphe Abbildung von X in den komplexen Raum X', so gibt es eine Darstellung $F = f \circ \Phi$, wo f eine stetige Abbildung von X^* in X' bezeichnet. Dann aber ist f nach Satz 2 bzw. nach dem Zusatz zu Satz 2 eine holomorphe Abbildung.

In Verbindung mit Satz 10 und seinem Zusatz 2 folgt jetzt

Satz 13. *Sei F_1 eine holomorphe Abbildung einer komplexen Mannigfaltigkeit X in einen komplexen Raum X_1. Alle Niveaumengen von F_1 seien kompakt. Dann existiert eine zu F_1 gehörige komplexe Basis. Entsprechendes gilt, wenn X als zusammenhängender n-dimensionaler komplexer C-Raum und F_1 als holomorphe Abbildung, deren globaler Rang größer als $n - 2$ ist, vorausgesetzt* wird.

In der Tat! In beiden Fällen ist die durch F_1 bestimmte einfache Zerlegung Z' von X analytisch und normal, und die natürliche Abbildung Φ von X auf den Z' zugeordneten komplexen Zerlegungsraum $X/Z' = X^*$ ist eigentlich. Also ist nach Satz 12 (Φ, X^*) eine komplexe Basis.

(Eingegangen am 29. April 1956)

HAHN, W.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 94 (1956)

Bemerkungen zu der Arbeit über Differential-Differenzengleichungen

Bd. 131, S. 151 (1956)

Von

WOLFGANG HAHN in Braunschweig

Die Bemerkungen beziehen sich auf den Fall (1.9).

1. Die auf S. 152 formulierte Einschränkung der Konvergenzbehauptung wird entbehrlich, d. h. es ist *jede Lösung der homogenen Gleichung durch eine absolut konvergente Reihe darstellbar* (natürlich mit Ausschluß der Ausnahmefälle), wenn man von der durch (5.4) erklärten Funktion $G(x)$ stückweise Glattheit fordert. Man erkennt dies aus (5.8). In dem Ausdruck $\widetilde{L}(\hat{Y}(x))$ zeigt der mit Y_{00} behaftete Term die schlechteste Konvergenz, da er durch eine Reihe mit allgemeinem Glied

$$(1) \qquad Y_{00} \frac{r_n^{p-1}(a_p + b_p e^{-h r_n})}{A'(r_n)} e^{r_n x}$$

dargestellt wird. Nun verhält sich r_n hier wie $\pm\, in$. Ferner ist wegen (2.2) $a_p + b_p e^{-h r_n} = O(r_n^{-1})$, so daß mit Rücksicht auf (2.10) der Ausdruck (1) von der Ordnung $r_n^{-2} = O(n^{-2})$ ist. Der fragliche Term konvergiert mithin absolut. (Analog schließt man im Fall $k \geqq 2$.) Die gleiche Aussage gilt für den Bestandteil $G * \hat{Y}(x)$ von (5.8): da sich $e^{-r_n x}$ wie e^{cnix} verhält, verhalten sich die einzelnen Faltungsintegrale, deren Integranden die Form $G(x)e^{-r_n x}$ haben, wie die Fourierkoeffizienten von $G(x)$, nehmen also unter den oben formulierten Voraussetzungen mindestens wie n^{-1} ab, so daß das allgemeine Glied des ersten Bestandteils mindestens die Ordnung n^{-p-1} besitzt und daher auch im Fall $p = 1$ absolut konvergiert.

2. Die Bedingung $\widetilde{A}(s) = 1$ [vgl. (5.6)] ist mit vernünftigen Anfangswerten nicht zu erreichen [S. 160, Zeile 18 gilt nur für (1.8)], so daß die Funktion $\hat{Y}(x)$ genau genommen keine „Lösung“ im Sinne der Definition von S. 159 ist. Die mit Rücksicht auf diese Funktion formulierten Einschränkungen der Behauptungen sind daher, wie schon bemerkt, entbehrlich. [S. 160, Zeile 22 gilt aber auch im Fall (1.9).] Im Fall $p = 1$ zeigt $\hat{Y}(x)$ das Konvergenzverhalten von $\Sigma\, n^{-1} \sin n x$.

3. Der auf S. 164 bei (7.2) noch zu berücksichtigende Ausnahmefall $\gamma = 0$, $m \geqq 3$ läßt sich ebenfalls durch Variation der α_n auf eine zweigliedrige Vergleichsfunktion zurückführen: man muß die α_n kommensurabel machen, und zwar so, daß das im Anschluß an (7.2) erklärte Polynom in z in einfache Linearfaktoren zerfällt.

4. S. 153, In (2.5) lies $C_2 = \dfrac{2\pi}{h}$.

S. 157, Z. 4 v. u.: lies $Re\, r_j'(s - r_j')$.

S. 160, Z. 19: lies $Y_{p-1,0} = \dfrac{1}{a_p}$.

S. 161, Zeile 10 von oben: Streiche (bzw. $B^+(x)$).

BEHRENS, E.-A.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 95—105 (1956)

Zweiseitige Ideale in Algebren endlichen Ranges

Von

ERNST-AUGUST BEHRENS in Frankfurt am Main

Eine assoziative, halbeinfache Algebra $\mathfrak{o}$ endlichen Ranges über ihrem Grundkörper K ist direkte Summe einfacher Algebren $\mathfrak{m}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Ihre Ideale sind das Nullideal und die direkten Summen beliebig gewählter unter den Idealen $\mathfrak{m}_i$ (vgl. VAN DER WAERDEN [2]). Meine Untersuchung soll zur Beantwortung folgender Frage beitragen: Was bleibt von diesem einfachen Rezept für die Ideale in $\mathfrak{o}$ noch übrig, falls man die Voraussetzungen, daß das Radikal von $\mathfrak{o}$ gleich null und die Multiplikation in $\mathfrak{o}$ assoziativ ist, fallen läßt?

Unter einer nicht assoziativen (n. a.) Algebra über dem Grundkörper K wollen wir einen K-Modul $\mathfrak{o}$ endlichen Ranges verstehen, für den noch eine weitere, mit der Addition in $\mathfrak{o}$ beiderseitig distributive Komposition, die Multiplikation, erklärt ist. Diese darf zwar durchweg assoziativ und kommutativ sein, braucht es aber nicht. — Falls die assoziative Algebra $\mathfrak{o}$ halbeinfach ist, bilden das Nullideal und die Partialsummen der obigen Folge $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_s$ eine maximale Kette von Idealen in $\mathfrak{o}$. Auch in einer n.a. Algebra $\mathfrak{o}$ läßt sich durch jedes Ideal eine maximale Kette $O \prec \mathfrak{a}_1 \prec \mathfrak{a}_2 \prec \cdots \prec \mathfrak{a}_s = \mathfrak{o}$ legen, wobei $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$ bekanntlich bedeutet, daß $\mathfrak{a}$ unterer Nachbar von $\mathfrak{b}$ ist. Ergänzt man nun eine K-Modulbasis von $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{m}_1$ zu einer K-Modulbasis von $\mathfrak{a}_2$, so erzeugen die neu hinzugenommenen Basiselemente einen K-Modul $\mathfrak{m}_2$, und $\mathfrak{a}_2$ ist im modultheoretischen Sinne die direkte Summe von $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$. So fahren wir fort: $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{m}_1 + \cdots + \mathfrak{m}_r$ ist die direkte Modulsumme der Moduln $\mathfrak{m}_1$ bis $\mathfrak{m}_r$.

In § 1, Satz 2, wird gezeigt, daß unter einer bestimmten Voraussetzung jedes Ideal in $\mathfrak{o}$ moduldirekte Summe gewisser unter diesen $\mathfrak{m}_i$ ist. Die Voraussetzung über $\mathfrak{o}$ lautet: Die n.a. Algebra $\mathfrak{o}$ muß mindestens eine maximale Idealkette $O \prec \mathfrak{a}_1 \prec \mathfrak{a}_2 \prec \cdots \prec \mathfrak{a}_s = \mathfrak{o}$ besitzen, für die die von ALBERT in [1] eingeführte Transformationsalgebra $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ s Idempotente E_i enthält, die durch $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}\, E_i$ die Ideale der Kette definieren. Am Ende dieses Paragraphen wird ein Verbandsisomorphismus zwischen dem distributiven Verband der Ideale in $\mathfrak{o}$ und dem Verband gewisser „zugehöriger" Ideale in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ erklärt. — § 2 zeigt ein Verfahren, das es unter der obigen Voraussetzung über $\mathfrak{o}$ gestattet, unter den Summen $\mathfrak{m}_{\lambda(1)} + \cdots + \mathfrak{m}_{\lambda(r)}$ diejenigen anzugeben, die wirklich Ideale und nicht nur Untermoduln von $\mathfrak{o}$ sind. — Als hinreichendes Kriterium dafür, daß die Voraussetzung über $\mathfrak{o}$ von § 1 erfüllt ist, erkennen wir in § 3, daß keiner der Restklassenringe $\mathfrak{a}_{i+1} - \mathfrak{a}_i$ der Nullring ist. Doch hat dieses Kriterium für assoziative Algebren nur geringe Bedeutung, da, wie ebenfalls

in § 3 bewiesen wird, jedes minimale Ideal einer solchen Algebra entweder direkter Summand ist oder in ihrem Radikal liegt. Beispiel 1 zeigt jedoch, daß man eine sehr übersichtliche assoziative Algebra mit Einselement vom Range drei über K angeben kann, die zwar die Voraussetzung über $\mathfrak{o}$ von § 1, aber nicht die des Kriteriums von § 3 erfüllt. Dem Beispiel 2 entnimmt man, daß man die Voraussetzung über $\mathfrak{o}$ in Satz 2 auch nicht einfach fortlassen kann.

Die Beweise beruhen großenteils darauf, daß ein minimales Ideal von $\mathfrak{o}$ irreduzibler Darstellungsmodul der assoziativen Algebra $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ ist, sowie auf der Bemerkung, daß, falls $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{o}$ ist und das Idempotent E aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ in $\mathfrak{o}$ den Modul $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}E$ definiert, $\mathfrak{a}E$ im Durchschnitt von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{m}$ liegt (vgl. das Lemma in § 1).

§ 1

Der Transformationsring $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ einer n.a. Algebra $\mathfrak{o}$ vom Range N über ihrem Grundkörper K ist nach ALBERT [1] folgende Unteralgebra des Ringes $\{K\}_{N\times N}$ aller linearen Transformationen von $\mathfrak{o}$: Die Zuordnungsvorschrift $x \to x\cdot a$ ist eine lineare Transformation R_a von $\mathfrak{o}$, analog $x L_a = a \cdot x$. Der, natürlich assoziative, Transformationsring $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ ist dann die von allen Rechtsmultiplikationen R_a, allen Linksmultiplikationen L_a und der identischen Transformation I erzeugte Unteralgebra von $\{K\}_{N\times N}$.

Jeder Untermodul $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}$ ist direkter Summand als Modul, d. h. es gibt einen zweiten Untermodul $\mathfrak{b}$ derart, daß sich jedes Element x aus $\mathfrak{o}$ eindeutig in der Form $x = a + b$ mit $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ darstellen läßt. Die Zuordnung $x \to a$ ist eine idempotente lineare Transformation E aus $\{K\}_{N\times N}$, und x liegt dann und nur dann in $\mathfrak{a}$, wenn $xE = x$ ist. Ein Ideal in $\mathfrak{o}$ ist ein gegenüber $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ zulässiger K-Untermodul von $\mathfrak{o}$. Daraus folgt als

Hilfssatz 1 (ALBERT). *E sei ein Idempotent aus $\{K\}_{N\times N}$. Der durch $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}E$ definierte Untermodul von $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann ein Ideal in $\mathfrak{o}$, wenn $ETE = ET$ für alle $T \in \mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ gilt.*

Beweis: $\mathfrak{o}E$ Ideal ist gleichbedeutend mit $xET \in \mathfrak{o}E$ für alle $x \in \mathfrak{o}$ und alle $T \in \mathfrak{T}(\mathfrak{o})$. Dies wiederum ist äquivalent mit $xETE = xET$.

Völlig klar ist der Beweis des

Hilfssatzes 2. *E und E' seien Idempotente aus $\{K\}_{N\times N}$. Dann ist $\mathfrak{o}E \subseteq \mathfrak{o}E'$ äquivalent $EE' = E$.*

Da die Ideale in $\mathfrak{o}$ einen modularen Verband bilden, der der aufsteigenden Ketten-Bedingung genügt (vgl. HERMES [1]), läßt sich durch jedes Ideal von $\mathfrak{o}$ eine maximale Idealkette $\mathfrak{a}_0 = O \prec \mathfrak{a}_1 \prec \mathfrak{a}_2 \prec \cdots \prec \mathfrak{a}_s = \mathfrak{o}$ legen, und alle maximalen Ketten haben die gleiche Länge. Eine aus N_1 Elementen bestehende K-Modulbasis von $\mathfrak{a}_1$ ergänzen wir nun durch weitere N_2 Elemente zu einer K-Modulbasis von $\mathfrak{a}_2$, wobei die neuhinzugenommenen Basiselemente den K-Untermodul $\mathfrak{m}_2$ aufspannen mögen; mit $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{a}_1$ ist dann $\mathfrak{a}_2$ die im modultheoretischen Sinne direkte Summe von $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$. So fahren wir fort: $\mathfrak{m}_i$ ist ein Untermodul von $\mathfrak{o}$, der von N_i Elementen erzeugt wird, die die Basis von $\mathfrak{a}_{i-1}$ zu einer Basis von $\mathfrak{a}_i$ ergänzen. Bezüglich dieser Basis $b_1, \ldots, b_N$ von $\mathfrak{o}$ lassen sich die Transformationen T aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ durch Matrizen $\mathfrak{T}$ dar-

stellen, die die folgende Gestalt haben

$$(1) \qquad (b_1, \ldots, b_N)\, T = (b_1, \ldots, b_N) \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} & \ldots & \mathfrak{T}_{1s} \\ & \mathfrak{T}_{22} & \ldots & \mathfrak{T}_{2s} \\ O & & \ldots & \vdots \\ & & & \mathfrak{T}_{ss} \end{pmatrix},$$

hierbei ist $\mathfrak{T}_{ii}$ eine N_i-reihige quadratische Matrix und $\mathfrak{T}_{ik}$ eine Matrix mit N_i Zeilen und N_k Spalten. Da $\mathfrak{a}_1$ als minimales Ideal in $\mathfrak{o}$ irreduzibler Darstellungsmodul von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ ist, durchlaufen die Matrizen $\mathfrak{T}_{11}$ die zu der obigen Basis von $\mathfrak{a}_1$ gehörende irreduzible Matrixdarstellung. Analog durchlaufen die $\mathfrak{T}_{ii}$ die Matrizen einer Darstellung von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$, die zu dem Darstellungsmodul $\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i-1}$ gehört. Dieser ist irreduzibel, da $\mathfrak{a}_i$ oberer Nachbar von $\mathfrak{a}_{i-1}$ ist. Im allgemeinen sind die $\mathfrak{T}_{ik}$ für $i < k$ nicht alle null, denn, wie man sich leicht überlegt, bedeutet letzteres, daß $\mathfrak{o}$ die direkte Summe der dann einfachen Ringe $\mathfrak{m}_i$ ist, was durchaus nicht immer zutrifft. Die Teilmatrizen

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{T}_{22} & \ldots & \mathfrak{T}_{2s} \\ & \ldots & \vdots \\ & & \mathfrak{T}_{ss} \end{pmatrix}$$

der Matrizen $\mathfrak{T}$ durchlaufen die Matrizen einer Darstellung von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$, die $\mathfrak{o} - \mathfrak{m}_1$ als Darstellungsmodul besitzt. Man sieht sofort, daß sie die Matrizen des Transformationsringes $\mathfrak{T}(\mathfrak{o} - \mathfrak{m}_1)$ des Restklassenringes $\mathfrak{o} - \mathfrak{m}_1$ sind.

Jedes Ideal $\mathfrak{a}_i$ läßt sich als Untermodul von $\mathfrak{o}$ durch ein Idempotent E_i aus $\{K\}_{N\times N}$ definieren: $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}\, E_i$, $i = 1, \ldots, s$. Uns sollen nun vor allem diejenigen n.a. Algebren interessieren, für die die folgende, bereits in der Einleitung genannte Voraussetzung erfüllt ist:

„Voraussetzung über $\mathfrak{o}$“. *Die n.a. Algebra $\mathfrak{o}$ endlichen Ranges über K besitze mindestens eine maximale Idealkette $\mathfrak{a}_0 = O < \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \cdots < \mathfrak{a}_s = \mathfrak{o}$, deren Ideale $\mathfrak{a}_i$ sich durch bereits in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ enthaltene Idempotente E_i definieren lassen: $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}\, E_i$, $i = 1, \ldots, s$.*

Diese Voraussetzung ist z. B. erfüllt, wenn $\mathfrak{o}$ eine assoziative, halbeinfache Algebra ist. Deren Einselement 1 läßt sich nämlich in der Form $1 = e_1 + {} + \cdots + e_s$ schreiben, wobei e_i das Einselement des direkten und einfachen Summanden $\mathfrak{m}_i$ ist. Man kann dann $E_i = R_{e_1 + \cdots + e_i}$ nehmen.

Satz 1. *Unter der „Voraussetzung über $\mathfrak{o}$“ kann man zu der Idealkette $\mathfrak{a}_1 < \cdots < \mathfrak{a}_s$ eine Folge $E_1', \ldots, E_s'$ von in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ enthaltenen, die $\mathfrak{a}_i$ ebenfalls definierenden Idempotenten und eine zu dieser Idealkette gehörende K-Basis von $\mathfrak{o}$ derart wählen, daß in der Hauptdiagonale der zu E_i' gehörenden Matrix i Einheitsmatrizen stehen, deren Reihenanzahlen gleich den Rängen der $\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i-1}$ über K sind, und im übrigen in der Hauptdiagonale und außerhalb von ihr alle Teilmatrizen null sind.*

Beweis durch vollständige Induktion nach s: Für $s = 1$ nehme man $E_1' = I$, wobei I nach Definition von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ enthalten ist. — Die Restklassenideale $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 < \cdots < \mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_1$ bilden eine maximale Kette der Länge $s - 1$ in $\mathfrak{o} - \mathfrak{a}_1$, die die obige „Voraussetzung“ erfüllt mit den in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o} - \mathfrak{a}_1)$ enthaltenen Idempotenten $\bar{E}_i$, $i = 2, \ldots, s$, die durch $\bar{x}\, \bar{E}_i = \overline{x\, E_i}$ definiert

sind. Diese Definition ist sinnvoll, weil E_i in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ liegt und $\mathfrak{a}_1$ Ideal in $\mathfrak{o}$ ist. Nach Induktionsannahme können wir voraussetzen, daß bereits diese Idempotente $\bar{E}_2, \ldots, \bar{E}_s$ und die Basis $\bar{b}_{N_1+1}, \ldots, \bar{b}_{N}$ von $\mathfrak{o} - \mathfrak{a}_1$ der Behauptung des Satzes genügt. Dabei repräsentiere b_k die Restklasse $\bar{b}_k$ für $N_1 + 1 \leq k \leq N$. Schließlich sei $b_1, \ldots, b_{N_1}$ eine Basis von $\mathfrak{a}_1$. Bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_N$ von $\mathfrak{o}$ haben die E_i für $i = 2, \ldots, s$ die Matrizengestalt

$$(2) \qquad E_i \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & \ldots & \mathfrak{A}_{1i} & \mathfrak{A}_{1\,i+1} & \ldots & \mathfrak{A}_{1s} \\ & \mathfrak{E} & \ldots & O & O & \ldots & O \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathfrak{E} & O & \ldots & O \\ & & & & 0 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei in der Hauptdiagonalen $i - 1$ Einheitsmatrizen $\mathfrak{E}$ der Reihenanzahlen $N_2, N_3, \ldots, N_i$ stehen und die $\mathfrak{A}_{1k}$ unbekannt sind. Zu dem das Ideal $\mathfrak{a}_1$ nach Voraussetzung definierendem Idempotent E_1 gehört bezüglich dieser Basis eine Matrix der Gestalt

$$(3) \qquad E_1 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{C}_{12} & \ldots & \mathfrak{C}_{1s} \\ & & O & \end{pmatrix}.$$

Das sieht man so ein: Wegen $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}\, E_1 = (b_1, \ldots, b_{N_1}, \ldots)\, E_1$ können nur in den ersten N_1 Zeilen der Matrix von null verschiedene Elemente aus K stehen. Wie oben bemerkt, durchlaufen die Teilmatrizen $\mathfrak{T}_{11}$ von (1) eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$. Das Idempotent E_1 aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ wird nicht auf $\mathfrak{T}_{11} = 0$ abgebildet, weil sonst dem $E_1 = E_1^2$ bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_N$ von $\mathfrak{o}$ die N-reihige Nullmatrix entsprechen würde. Da E_1 idempotent ist, und als lineare Transformation den Rang N_1 hat, muß E_1 auf die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ abgebildet werden. Die $\mathfrak{C}_{12}, \ldots, \mathfrak{C}_{1s}$ sind nicht näher bekannt.

Ändert man diese Basis $b_1, \ldots, b_N$ von $\mathfrak{o}$ modulo $\mathfrak{a}_1$ ab, so ändern sich in den Matrizen von $E_2, \ldots, E_s$ und von E_1 höchstens die N_1 ersten Zeilen. Wie man leicht nachrechnet, gilt bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_N$: Für $i = 2, \ldots, s$ sind die

$$(4) \qquad E'_i = E_i - E_i E_1 + E_1 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 & \ldots & 0 & \mathfrak{C}_{1\,i+1} & \ldots & \mathfrak{C}_{1s} \\ & \mathfrak{E} & \ldots & O & O & \ldots & O \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathfrak{E} & O & \ldots & O \\ & & & & 0 & & \\ & & O & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ enthaltene, die $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}\, E'_i$ ebenfalls definierende Idempotente. Um uns auch noch von den Matrizen $\mathfrak{C}$ zu befreien, lassen wir die ersten N_1 Basiselemente $b_1, \ldots, b_{N_1}$ unverändert, $(b'_1, \ldots, b'_{N_1}) = (b_1, \ldots, b_{N_1})$, und setzen, mit der Abkürzung $n(i) = N_1 + \cdots + N_i$ für $i = 2, \ldots, s$,

$$(b'_{n(i-1)+1}, \ldots, b'_{n(i)}) = -(b_1, \ldots, b_{N_1})\, \mathfrak{C}_{1i} + (b_{n(i-1)+1}, \ldots, b_{n(i)}).$$

Dann haben bezüglich dieser neuen Basis $b'_1, \ldots, b'_N$ die $E_1 = E'_1, E'_2, \ldots, E'_s$ die in Satz 1 behauptete Matrizengestalt.

Falls für den Rest dieses Paragraphen von den die $\mathfrak{a}_i$ definierenden, in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ liegenden Idempotenten E_i und von der Basis $b_1, \ldots, b_N$ von $\mathfrak{o}$ gesprochen wird, sollen immer Idempotente E'_i und eine zugehörige Basis nach Satz 1 gemeint sein.

Bezeichnet noch E_0 die Nulltransformation R_0, so sind die $M_k = E_k - E_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, s$ orthogonale Idempotente aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$. Sie definieren die K-Untermoduln $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{o} M_k$ von $\mathfrak{a}_i$, und jedes $\mathfrak{a}_i$ ist die direkte Modulsumme $\mathfrak{m}_1 + \cdots + \mathfrak{m}_i$.

Satz 2. *Falls die „Voraussetzung über $\mathfrak{o}$" erfüllt ist und die Idempotente E_i gemäß der Behauptung von Satz 1 gewählt sind, läßt sich jedes Ideal $\mathfrak{a}'$ der Länge r aus $\mathfrak{o}$ als moduldirekte Summe $\mathfrak{a}'_r = \mathfrak{m}_{\lambda(1)} + \mathfrak{m}_{\lambda(2)} + \cdots + \mathfrak{m}_{\lambda(r)}$ darstellen, wobei die $\mathfrak{m}_k$ durch $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{o} M_k$, $M_k = E_k - E_{k-1}$, $E_0 = R_0$, $k = 1, \ldots, s$, erklärt sind.*

Der Beweis dieses Satzes ist das eigentliche Ziel dieses Paragraphen. Der Satz besagt nicht, daß *jede* Kombination der $\mathfrak{m}_k$ ein Ideal von $\mathfrak{o}$ liefert. Dies ist nämlich dann und nur dann der Fall, wenn $\mathfrak{o}$ direkte Summe im ringtheoretischen Sinne der einfachen Ringe $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$ ist, wovon im allgemeinen gar keine Rede sein kann. Die Frage, welche unter diesen Kombinationen Ideale sind, wird in § 2 beantwortet werden. Als Nebenergebnis des Beweises von Satz 2 erhält man den

Satz 3. *Wenn die „Voraussetzung" zutrifft für irgendeine maximale Idealkette von $\mathfrak{o}$, dann gilt sie für jede derartige Kette.*

Zum Beweis des Satzes 2 bemerken wir zunächst, daß sich durch jedes Ideal $\mathfrak{a}'_r$ der Länge r von $\mathfrak{o}$ eine maximale Idealkette $\mathfrak{a}'_0 = 0 < \mathfrak{a}'_1 < \cdots < \mathfrak{a}'_r < \cdots < \mathfrak{a}'_s = \mathfrak{o}$ legen läßt. Faßt man $\mathfrak{o}$ als additive abelsche Gruppe mit K und $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ als Operatorenbereich auf, so ist jede maximale Idealkette von $\mathfrak{o}$ eine Hauptreihe von zulässigen Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{o}$ im Sinne der Gruppentheorie. Je zwei solcher Hauptreihen sind operatorisomorph (vgl. van der Waerden [1]). Aus der Operatorisomorphie der Hauptreihe $O < \mathfrak{a}' < \cdots < \mathfrak{a}'_s = \mathfrak{o}$ mit derjenigen Hauptreihe $O < \mathfrak{a}_1 < \cdots < \mathfrak{a}_s = \mathfrak{o}$, auf die sich die „Voraussetzung über $\mathfrak{o}$" bezieht, folgt, daß insbesondere die additive Gruppe $\mathfrak{a}'_1$ einer der Restklassengruppen $\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i-1}$ operatorisomorph sein muß. Die Elemente a aus $\mathfrak{a}_i$ und damit auch die Restklassen $\bar{a}$ von $\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i-1}$ werden von E_i reproduziert, und wegen $\mathfrak{a}_i E_{i-1} \subseteq \mathfrak{o} E_{i-1} = \mathfrak{a}_{i-1}$ werden die $\bar{a}$ von E_{i-1} in $\bar{O}$ übergeführt. Dies zieht, da E_i und E_{i-1} im Operatorenring $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ liegen, auf Grund der Operatorisomorphie für alle Elemente a' aus $\mathfrak{a}'$ nach sich $a' = a' E_i \subseteq \mathfrak{o} E_i = \mathfrak{a}_i$, also $\mathfrak{a}'_1 \subseteq \mathfrak{a}_i$ und $a' E_{i-1} = 0$, also

$$\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}_{i-1} = 0. \tag{5}$$

Aus $\mathfrak{a}_i$ oberer Nachbar von $\mathfrak{a}_{i-1}$ folgt

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}'_1 \tag{6}$$

als im ringtheoretischen Sinne direkte Summendarstellung von $\mathfrak{a}_i$. Nun gilt folgendes fundamentales

Lemma. *Für die K-Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ und das Ideal $\mathfrak{a}''$ in der n.a. Algebra $\mathfrak{o}$ gelte $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'' = 0$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{o} E$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{o} E'$. E, E' miteinander vertauschbare Idempotente aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$. Dann ist $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{o} E''$ mit $E''^2 = E'' = E - E'$.*

Aus diesem Lemma kann man sofort auf

(7) $$\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{o}\, M_i,\quad M_i = E_i - E_{i-1}$$

schließen.

Beweis des Lemmas: Die Idempotenz von $E'' = E - E'$ folgt aus $E\,E' = E'\,E = E'$ nach Hilfssatz 2, da $\mathfrak{o}\,E' \subseteq \mathfrak{o}\,E$. — Sei $a'' \in \mathfrak{a}''$, also $a''\,E = a''$. Da $\mathfrak{a}''$ Ideal und E' in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$, liegt $a''\,E'$ in $\mathfrak{a}'' \cap \mathfrak{a}' = 0$. Daher ist $a''\,E'' = a''\,[E - E'] = a''\,E = a''$, also $\mathfrak{a}'' \subseteq \mathfrak{o}\,E''$. — Für jedes x aus $\mathfrak{o}$ ist andererseits $x\,E'' = x\,[E - E']$ ein Element von $\mathfrak{a}$, also $x\,E'' = x' + x''$, wobei $x' \in \mathfrak{a}'$, $x'' \in \mathfrak{a}''$. Aus $x'\,E''$ in $\mathfrak{o}\,E'\,E'' = 0$ folgt $x\,E'' = x\,E''^2 = x'\,E'' + x''\,E'' = x''\,E'' = x''$, also $\mathfrak{o}\,E'' \subseteq \mathfrak{a}''$. Q.e.d.

Mit der Formel (7) sind die Behauptungen der Sätze 2 und 3 für die Ideale der Länge 1 in $\mathfrak{o}$ bereits bewiesen und damit auch die Behauptung für $s = 2$, da in diesem Falle die echten Ideale von $\mathfrak{o}$ alle die Länge 1 haben. Um den Satz 2 durch vollständige Induktion nach der Länge s von $\mathfrak{o}$ zu beweisen, bilden wir, ähnlich wie beim Beweis von Satz 1, den Restklassenring $\mathfrak{o} - \mathfrak{a}_1'$. Falls dabei $\mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{a}_1'$ ist, müssen wir noch die Idealkette $\mathfrak{a}_0' = 0 < \mathfrak{a}_1' < \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1' < \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_1' < \cdots < \mathfrak{a}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_1' = \mathfrak{a}_i < \mathfrak{a}_{i+1} < \cdots < \mathfrak{a}_s = \mathfrak{o}$ einschalten. Daß dies wirklich eine Kette, sogar eine maximale Kette ist, ist klar, sobald wir gezeigt haben, daß die auftretenden Summen direkt und die Inklusionen richtig sind. Das trifft zu, weil nach (5) $\mathfrak{a}_{i-1} \cap \mathfrak{a}_1' = 0$, also für $j \leqq i - 1$ erst recht $\mathfrak{a}_j \cap \mathfrak{a}_1' = 0$ und damit die Summe $\mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{a}_1'$ im ringtheoretischen Sinne direkt ist. Den Anschluß bei $\mathfrak{a}_i$ leistet die Formel (6). Die Ideale dieser Kette lassen sich ebenfalls durch Idempotente aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ definieren, denn wegen $i \geqq 2$ gilt für $j = 1, \ldots, i - 1$

(8) $$\mathfrak{a}_j \oplus \mathfrak{a}_1' = \mathfrak{o}\,[E_j + M_i] = \mathfrak{o}\,[E_j + E_i - E_{i-1}]$$

nach dem folgenden

Hilfssatz 3. *H und H' seien orthogonale Idempotente aus $\{K\}_{N\times N}$. Für die durch sie definierten Moduln ist die Modulsumme*

$$\mathfrak{o}\,H + \mathfrak{o}\,H' = \mathfrak{o}\,[H + H'].$$

Beweis: $\mathfrak{o}\,[H + H'] \subseteq \mathfrak{o}\,H + \mathfrak{o}\,H'$ ist trivial. Für jedes $x \in \mathfrak{o}$ ist $x\,H = x\,H^2 = xH\,[H + H'] \in \mathfrak{o}\,[H + H']$, analog xH'.

Die Idempotente der eingeschalteten Kette sind demnach $E_1' = M_i$, $E_2' = E_1 + M_i, \ldots, E_i' = E_{i-1} + M_i = E_i$, $E_{i+1}' = E_{i+1}, \ldots, E_s' = E_s = I$. Bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_N$ von $\mathfrak{o}$ haben die Matrizen dieser Idempotente wieder die in Satz 1 angegebene Gestalt.

Durch $\bar{x}\,\overline{E_k'} = \overline{x\,E_k'}$, $k = 2, \ldots, s$, induziert jedes dieser Idempotente E_k' ein Idempotent $\overline{E_k'}$ aus dem Transformationsring $\mathfrak{T}(\mathfrak{o} - \mathfrak{a}_1')$ des Restklassenringes $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o} - \mathfrak{a}_1'$. Sie definieren dort die Ideale der maximalen Kette $[\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_1'] - \mathfrak{a}_1' < \cdots < [\mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{a}_1'] - \mathfrak{a}_1' = \mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_1' < \mathfrak{a}_{i+1} - \mathfrak{a}_1' < \cdots < \mathfrak{a}_s - \mathfrak{a}_1' = \mathfrak{o} - \mathfrak{a}_1$ und genügen der Voraussetzung von Satz 2. Nun sei $\mathfrak{a}_r'$ das in der Behauptung des Satzes 2 genannte Ideal der Länge r aus $\mathfrak{o}$. Sein Restklassenideal $\mathfrak{a}_r' - \mathfrak{a}_1'$ hat dann in $\bar{\mathfrak{o}}$ die Länge $r - 1$ und läßt sich nach Induktionsannahme als direkte Modulsumme darstellen

$$\mathfrak{a}_r' - \mathfrak{a}_1' = \bar{\mathfrak{o}}\,[\overline{E}'_{\lambda(1)} - \overline{E}'_{\lambda(1)-1}] + \cdots + \bar{\mathfrak{o}}\,[\overline{E}'_{\lambda(r-1)} - \overline{E}'_{\lambda(r-1)-1}],\quad 2 \leqq \lambda(l) \leqq s.$$

Als nächsten Schritt löst man natürlich die Restklassen auf. Beachtet man $\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{o}\,[E_i - E_{i-1}] = \mathfrak{o}\,M_i$, so zeigt die Orthogonalität der M_k untereinander, daß M_i zu allen $E'_{\lambda(l)} - E'_{\lambda(l)-1}$ orthogonal ist. Für $2 \leqq \lambda \leqq i$ ist nämlich $E'_\lambda - E_{\lambda-1} = E_{\lambda-1} - E_{\lambda-2} = M_{\lambda-1}$, und für $i+1 \leqq \lambda \leqq s$ ist $E'_\lambda - E'_{\lambda-1} = E_\lambda - E_{\lambda-1} = M_\lambda$, so daß M_i gerade fehlt. — Nach Hilfssatz 3 folgen daraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_r' &= \mathfrak{o}\,[M_i + E'_{\lambda(1)} - E'_{\lambda(1)-1} + \cdots + E'_{\lambda(r-1)} - E'_{\lambda(r-1)-1}] \\ &= \mathfrak{o}\Big[M_i + \sum_{2 \leqq \lambda(k) \leqq i} M_{\lambda(k)-1} + \sum_{i+1 \leqq \lambda(k) \leqq s} M_{\lambda(k)}\Big] \\ &= \mathfrak{m}_i + \sum_{2 \leqq \lambda(k) \leqq i} \mathfrak{m}_{\lambda(k)-1} + \sum_{i+1 \leqq \lambda(k) \leqq s} \mathfrak{m}_{\lambda(k)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Wir haben bisher nur den Fall $\mathfrak{a}_1' \neq \mathfrak{a}_1$ behandelt. Falls aber $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1$ ist, brauchen wir keine Hilfskette einzuschalten; die Schlüsse vereinfachen sich dann so sehr, daß sie hier nicht vorgeführt werden sollen.

Auch der Beweis des Satzes 3 ist damit erbracht, denn die in (9) auftretende Summe der M_l ist ein in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ enthaltenes Idempotent.

Albert bewies in [1], Lemma 10, daß, falls $\mathfrak{o}$ nicht die Nullalgebra ist, die Einfachheit von $\mathfrak{o}$ mit der von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ äquivalent ist. Der Beweis von Albert legt es nahe, den Idealen $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{o}$ gewisse Ideale $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ durch

$$\mathfrak{a} \to \mathfrak{A} = \{T;\ T \in \mathfrak{T}(\mathfrak{o}),\ \mathfrak{o}\,T \subseteq \mathfrak{a}\} \tag{10}$$

zuzuordnen, und umgekehrt jedem Ideal $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ das Ideal $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\,\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{o}$. Falls dabei $\mathfrak{o}$ ein Einselement 1 besitzt, gilt zwar $\mathfrak{a} \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{a}$, jedoch nicht durchweg $\mathfrak{B} \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{B}$, sondern das zu $\mathfrak{b}$ nach (10) gehörende Ideal ist im allgemeinen ein echtes Oberideal von $\mathfrak{B}$. Ähnlich wie bei der Beziehung zwischen Polynomidealen und den Mannigfaltigkeiten der algebraischen Geometrie kann man die Eineindeutigkeit der Zuordnung erzwingen, indem man unter allen Idealen in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ diejenigen als „zugehörige Ideale" bezeichnet, die sich nach (10) aus einem geeigneten Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}$ ergeben. Dann gilt folgender

Satz 4. *Falls die „Voraussetzung über $\mathfrak{o}$" erfüllt ist, sind genau diejenigen Ideale $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ zugehörige Ideale, für die es ein Idempotent E in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ mit der Eigenschaft gibt, daß das von E erzeugte Linksideal $(E)^{(l)} = (E) = \mathfrak{A}$ ist.*

Beweis: 1. Das Ideal $\mathfrak{A}$ gehöre zu dem Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\,E$, E geeignetes Idempotent aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$. $T \in \mathfrak{A}$ ist nach (10) äquivalent $T\,E = T$, also ist $\mathfrak{A} = (E)^{(l)} = (E)$, wobei (E) das von E erzeugte zweiseitige Ideal ist. — 2. Das Idempotent E liege in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ und erzeuge ein Linksideal, das bereits zweiseitig ist, d. h. $(E)^{(l)} = (E)$. Dann gilt für jedes T aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ die Gleichung $E\,T = X\,E$ für ein geeignetes X aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$. Daher ist $E\,T\,E = E\,T$, also nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{o}\,E$ ein Ideal aus $\mathfrak{o}$. Das zugehörige Ideal von $\mathfrak{o}\,E$ ist nach (10) wieder $(E)^{(l)}$.

Die Zugehörigkeit eines Ideales aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ läßt sich also schon in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ erkennen, falls $\mathfrak{o}$ die „Voraussetzung über $\mathfrak{o}$" erfüllt. Beschränkt man sich in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ auf zugehörige Ideale, so ist der Verband der Ideale in $\mathfrak{o}$ verbandsisomorph dem Verband der zugehörigen Ideale in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$, falls man in diesem

den Schnitt zweier zugehöriger Ideale als ihren mengentheoretischen Durchschnitt und ihre Verbindung als Durchschnitt aller derjenigen zugehörigen Ideale erklärt, die beide Ausgangsideale enthalten. Das liegt einfach daran, daß die zugehörigen Ideale in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ einen zu dem Verband der Ideale in $\mathfrak{o}$ isomorphen vollständigen Schnitthalbverband bilden (vgl. Hermes [1]). In einer späteren Untersuchung wird gezeigt werden, daß dieser endliche Verband der Ideale in $\mathfrak{o}$ distributiv ist.

§ 2

Unter der „Voraussetzung" von § 1 für die n.a. Algebra $\mathfrak{o}$ erlaubt der Satz 2 die endlich vielen Untermoduln von $\mathfrak{o}$, die überhaupt als Ideale der Länge r in Frage kommen, hinzuschreiben, nämlich nach (9) die Moduln $\mathfrak{o}\,E$, wobei E die Summe von jeweils r unter den Idempotenten $M_1, \ldots, M_s$ ist, $1 \leqq r \leqq s$. Nach § 1, Hilfssatz 1, ist $\mathfrak{o}\,E$ genau dann Ideal in $\mathfrak{o}$, wenn für alle T aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ gilt $ETE = ET$. Diese Bedingung wollen wir jetzt näher untersuchen.

Da $M_p = E_p - E_{p-1}$ ist, hat bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_N$ des Beweises von § 1, Satz 1, das Idempotent M_p eine Matrix $\mathfrak{M}_p$, in der nur die in der Hauptdiagonalen an p-ter Stelle auftretende Teilmatrix von der Nullmatrix verschieden, nämlich die N_p-reihige Einheitsmatrix ist. Wegen der Antiisomorphie des Ringes der Matrizen zu dem Ring der Transformationen und wegen der Gestalt (1) dieser Matrizen ist

$$M_p T \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots 0 & \mathfrak{T}_{1p} & 0 \ldots 0 \\ & 0 \ldots 0 & \mathfrak{T}_{2p} & 0 \ldots 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \mathfrak{T}_{p-1,p} & 0 \ldots 0 \\ & 0 & \mathfrak{T}_{pp} & 0 \ldots 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix von $M_p T M_q$ unterscheidet sich von der Matrix von M_p dadurch, daß auch in der p-ten Spalte nur noch die Matrix $\mathfrak{T}_{qp}$ stehen bleibt, alle anderen $\mathfrak{T}_{ip}$ sind null. Aus $E = M_{\lambda(1)} + \cdots + M_{\lambda(r)}$ und

$$\begin{aligned} ET - ETE &= \sum_{i=1}^{r} M_{\lambda(i)} T \left[I - \sum_{k=1}^{r} M_{\lambda(k)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{r} M_{\lambda(i)} T \sum_{\substack{\mu \neq \lambda(k) \\ 1 \leqq k \leqq r}} M_\mu \end{aligned}$$

folgt nach § 1, Hilfssatz 1, der

Satz 5. *Einer der in Satz 2 eingeführten Moduln $\mathfrak{o}\,[M_{\lambda(1)} + \cdots + M_{\lambda(r)}]$ ist dann und nur dann Ideal in $\mathfrak{o}$, wenn für alle T aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ die Teilmatrizen $\mathfrak{T}_{\mu\lambda(i)}$ aus der $\lambda(1)$-ten, $\lambda(2)$-ten, ..., $\lambda(r)$-ten Spalte, die nicht in der $\lambda(1)$-ten, $\lambda(2)$-ten, ..., $\lambda(r)$-ten Zeile stehen, gleich null sind.*

Mit anderen Worten: An einer s-reihigen quadratischen Matrix, die diejenigen $\mathfrak{T}_{qp}$ bezeichnet, die für alle T aus dem Transformationsring $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ null sind, kann man die Ideale von $\mathfrak{o}$ sofort ablesen.

Beispiele: Als Oberteil der p-ten Matrizenspalte der Matrix von T wollen wir die aus den Teilmatrizen $\mathfrak{T}_{1p}, \ldots, \mathfrak{T}_{p-1,p}$ bestehende Spalte bezeichnen. Dann gilt nach Satz 5:

1. $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{o}\, M_p$ ist dann und nur dann Ideal in $\mathfrak{o}$, wenn der Oberteil der p-ten Spalte identisch null, d. h. für alle T aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ null ist.

2. $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann direkte Summe einfacher Algebren, wenn die Oberteile aller Spalten identisch null sind.

3. $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann subdirekt irreduzibel, wenn kein Oberteil einer Spalte identisch null ist.

4. $\mathfrak{o}$ besitzt dann und nur dann eine einzige maximale Idealkette, wenn für $i = 2, \ldots, s$ kein $\mathfrak{T}_{i-1,i}$ identisch null ist.

In einer späteren Untersuchung sollen diese Bemerkungen zu einer Klassifikation der n.a. Algebren, die der „Voraussetzung" von § 1 genügen, ausgebaut werden.

§ 3

Aus der Darstellungstheorie der assoziativen Algebra über ihrem Grundkörper K als Darstellungskörper gewinnt man folgendes hinreichendes Kriterium:

Satz 6. *Wenn $\mathfrak{o}$ eine maximale Idealkette enthält, unter deren Restklassenring der Nullring nicht auftritt, ist die „Voraussetzung über $\mathfrak{o}$" von § 1 erfüllt.*

Beweis: $0 < \mathfrak{a}_1 < \cdots < \mathfrak{a}_s = \mathfrak{o}$ sei diese maximale Kette. Aus $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_1 \neq 0$ folgt, daß $\mathfrak{a}_1$ mindestens ein Element a enthält, dessen zugehörige Rechtsmultiplikation R_a das Ideal $\mathfrak{a}_1$ nicht in das Nullideal überführt: $\mathfrak{a}_1 R_a \neq 0$. Also hat R_a bezüglich der in (1) auftretenden Basis $b_1, \ldots, b_N$ von $\mathfrak{o}$ eine Matrix, deren erste Teilmatrix $\mathfrak{R}_{11}$ nicht die Nullmatrix ist; überdies sind ihre sämtlichen Teilmatrizen $\mathfrak{R}_{jk}$ für $j \geqq 2$ gleich null, weil wegen a in $\mathfrak{a}_1$ das Element $x\, R_a$ in $\mathfrak{a}_1$ liegt für alle x aus $\mathfrak{o}$. Nach § 1 ist $\mathfrak{a}_1$ irreduzibler Darstellungsmodul von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ und die Matrix $\mathfrak{R}_{11}$ das Bild von a bei dieser Darstellung. Als irreduzible Darstellung eines einfachen Summanden des Restklassenringes von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ nach seinem Radikal, wobei der Grundkörper K von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ der Darstellungskörper ist, haben bei geeigneter Wahl der Basiselemente $b_1, \ldots, b_{N_1}$ von $\mathfrak{a}_1$ die Matrizen $\mathfrak{T}_{11}$ dieser Darstellung die Gestalt

$$\mathfrak{T}_{11} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \ldots & \mathfrak{A}_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}_{r1} & \ldots & \mathfrak{A}_{rr} \end{pmatrix},$$

dabei durchlaufen die $\mathfrak{A}_{ik}$ bei algebraisch abgeschlossenem Grundkörper K die Elemente von K und sonst die Matrizen der regulären Darstellung desjenigen Schiefkörpers Δ über K, über dem der einfache Summand des Restklassenringes von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ nach seinem Radikal voller Matrizenring ist (vgl. van der Waerden [2], § 129). Wegen $\mathfrak{R}_{11} \neq 0$ gibt es daher in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ Transformationen $T^{(\mu)}$ und $S^{(\mu)}$, $\mu = 1, \ldots, m$, deren Bilder $\mathfrak{T}_{11}^{(\mu)}$ und $\mathfrak{S}_{11}^{(\mu)}$ bei der obigen Darstellung die Gleichung $\sum_\mu \mathfrak{S}_{11}^{(\mu)} \mathfrak{R}_{11} \mathfrak{T}_{11}^{(\mu)} = \mathfrak{E}$ erfüllen; in ihr ist $\mathfrak{E}$ die N_1-reihige Einheitsmatrix. Die durch $\Sigma\, T^{(\mu)} R_a\, S^{(\mu)} = E_1$ definierte Transformation liegt in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$. Sie ist idempotent und definiert $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}\, E_1$. Letzteres

ist klar, weil zu ihr, wegen $\mathfrak{R}_{jk} = 0$ für $j \geqq 2$, eine Matrix der Gestalt (3) gehört. — Nun läßt sich der Satz 6 durch vollständige Induktion nach s beweisen. Für $s = 1$ kann man $E_1 = I$ nehmen: Falls $s \geqq 2$ ist, kann man nach Induktionsannahme und auf Grund des Satzes 1 voraussetzen, daß für $i = 2, \ldots, s$ die Restklassenideale $\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{o} - \mathfrak{a}_1$ durch Idempotente E_i definiert werden, die in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o} - \mathfrak{a}_1)$ liegen und die bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_N$ von $\mathfrak{o}$ durch Matrizen der Gestalt (2) repräsentiert sind; dabei brauchen jedoch die durch die Beziehung (2) definierten Transformationen E_i von $\mathfrak{o}$ noch nicht idempotent zu sein. Geht man aber, ähnlich wie beim Beweis von Satz 1, zu den $E_i' = E_i - E_i E_1 + E_1$ über, so haben diese wieder die Matrizengestalt (4) und sind daher idempotent. Die in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ enthaltenen idempotenten Transformationen $E_1, E_2', \ldots, E_s'$ definieren der Reihe nach in $\mathfrak{o}$ die Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$, q.e.d.

Die in Satz 6 angegebene hinreichende Bedingung für die „Voraussetzung über $\mathfrak{o}$" von § 1 ist nur für nicht assoziative Algebren von Bedeutung, denn es gilt der

Satz 7. *$\mathfrak{a}$ sei ein minimales Ideal der assoziativen Algebra $\mathfrak{o}$. Dann ist $\mathfrak{a}$ entweder direkter Summand von $\mathfrak{o}$ im ringtheoretischen Sinne oder es ist $\mathfrak{a}^2 = 0$, also $\mathfrak{a}$ im Wedderburnschen Radikal $W(\mathfrak{o})$ von $\mathfrak{o}$ enthalten.*

Beweis durch Zurückführung auf das Theorem 2.2 von M. Hall [1]: Jede assoziative Algebra $\mathfrak{o}$ ist eindeutig darstellbar als im ringtheoretischen Sinne direkte Summe einer halbeinfachen Algebra $\mathfrak{o}'$ und einer gebundenen Algebra $\mathfrak{o}''$, $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}' \oplus \mathfrak{o}''$. Dabei nennt Hall eine Algebra $\mathfrak{o}''$ gebunden bezüglich ihres Radikales $W(\mathfrak{o}'')$, wenn für ein Element x aus $\mathfrak{o}''$ aus $x \cdot W = W \cdot x = 0$ folgt x in W. Das Ideal $\mathfrak{a}$ aus Satz 7 läßt sich darstellen in der Form $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}'] \oplus [\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}'']$. Da $\mathfrak{a}$ minimal ist, muß entweder $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}'$ oder $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}''$ gleich null sein. Wenn $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}'' = 0$ ist, dann ist $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{o}'$ enthalten, also als zweiseitiges Ideal des halbeinfachen Ringes $\mathfrak{o}'$ direkter Summand von $\mathfrak{o}'$ und damit auch von $\mathfrak{o}''$. Wenn aber $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}' = 0$ ist, muß $\mathfrak{a}$ in der gebundenen Algebra $\mathfrak{o}''$ liegen. Läge $\mathfrak{a}$ dann nicht in $W(\mathfrak{o}'')$, dann wäre $\mathfrak{a} \cap W(\mathfrak{o}'') = 0$, also $\mathfrak{a} \cdot W(\mathfrak{o}'') = W(\mathfrak{o}'') \cdot \mathfrak{a} = 0$. Da $\mathfrak{o}''$ gebunden ist, läge doch $\mathfrak{a}$ in $W(\mathfrak{o}'')$. Aus $\mathfrak{a}$ in $W(\mathfrak{o}'')$ und $\mathfrak{a}$ minimal folgt, daß bereits $\mathfrak{a}^2 = 0$ ist.

Das folgende unkomplizierte Beispiel 1 zeigt, daß auch ohne die Voraussetzung des Satzes 6 eine assoziative Algebra der „Voraussetzung über $\mathfrak{o}$" aus § 1 genügen kann.

1. habe als (linear unabhängige) Basis über K die Elemente b_1, b_2, b_3. Dabei sei $b_3 = 1$ das Einselement von $\mathfrak{o}$, und im übrigen sei die Multiplikation in $\mathfrak{o}$ durch $b_1^2 = 0$, $b_1 b_2 = b_1$, $b_2 b_1 = 0$, $b_2^2 = b_2$ erklärt. $\mathfrak{a}_1 = \{\beta b_1;\ \beta \in K\}$ ist das Minimalideal von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{a}_1^2 = 0$. $\mathfrak{a}_2 = \{\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2;\ \beta_1, \beta_2 \in K\}$ ist oberer Nachbar von $\mathfrak{a}_1$. Bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 gilt

$$R_{b_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_{b_2} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$E_1 = R_{b_2} - L_{b_2}$ und $E_2 = R_{b_2}$ liegen beide in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$, sind idempotent und definieren die Ideale $\mathfrak{a}_1$ bzw. $\mathfrak{a}_2$. Die Assoziativität von $\mathfrak{o}$ prüft man leicht nach.

Daß man andererseits die „Voraussetzung über $\mathfrak{o}$" aus § 1 im Satz 2 nicht einfach weglassen kann, zeigt das Beispiel

2. b_1, b_2 sei Basis von $\mathfrak{o}$, $b_1^2 = b_2^2 = b_1 b_2 = b_2 b_1 = 0$. Der Transformationsring ist $\mathfrak{T}(\mathfrak{o}) = \{\beta I;\ \beta \in K\}$. In $\mathfrak{o}$ ist $0 < \{\beta b_1;\ \beta \in K\} < \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$ eine maximale Kette. Aber auch jede der unendlich vielen Ketten $0 < \mathfrak{a}_1^{(t)} = \{\beta [b_1 + t b_2];\ \beta \in K\} < \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$ ist maximal. Jedes $\mathfrak{a}_1^{(t)}$ ist sogar direkter Summand, woran wir wieder die Bedeutung des Lemmas aus § 1 erkennen.

Literatur

[1] ALBERT, A. A.: Non-associative algebres. I. Ann. of Math. 43, 685—707 (1942). — [1] HALL, M.: The position of the radical in an algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 48, 391—404 (1940). — [1] HERMES, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955. — [1] VAN DER WAERDEN, B. L.: Moderne Algebra I. 3. Aufl. Berlin 1950. [2] Algebra II. 3. Aufl. Berlin 1955.

(Eingegangen am 29. März 1956)

SCHÜTTE, K.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 106—120 (1956)

Schließungssätze für orthogonale Abbildungen euklidischer Ebenen

Von

KURT SCHÜTTE in Marburg a. d. Lahn

Einleitung

Die hier betrachteten „euklidischen Ebenen" sind affine Ebenen, in denen eine Orthogonalitätsrelation erklärt ist. Wie in einer früheren Note[1]) gezeigt wurde, gehört zu einer solchen Ebene genau dann eine semibilineare metrische Grundform, wenn ein bestimmter Schließungssatz („Satz von den anti-orthologen Vierecken") erfüllt ist. Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, die algebraische Bedeutung einiger Spezialfälle dieses Schließungssatzes aufzuzeigen. Als methodisches Hilfsmittel werden orthogonale Abbildungen herangezogen.

Da der erwähnte Schließungssatz zu einer metrischen Semibilinearform führt und da andererseits durch Semibilinearformen Korrelationen Desarguesscher projektiver Ebenen bestimmt sind[2]), liegt es nahe, den Schließungssatz mit Korrelationen in Zusammenhang zu bringen. Wir tun dies, ohne uns dabei auf Desarguessche Ebenen zu beschränken (§ 1). Die Forderung gewisser Polarkorrelationen führt zu einem Fünfeck-Schließungssatz und zu konditionalen Spezialfällen des Satzes von den anti-orthologen Vierecken (§ 2). Ein anderer Spezialfall dieses Satzes („Trapezsatz"), der orthogonale Isomorphismen von Dreigeweben verlangt, liefert einen Alternativkörper als Koordinatenbereich und einen Automorphismus der additiven Gruppe[3]) mit schwachen multiplikativen Bedingungen (§ 3). Zusammen ergeben die hier betrachteten Spezialfälle des Satzes von den anti-orthologen Vierecken einen involutorischen Antiautomorphismus, dessen Fixelemente im Kern des Koordinaten-Alternativkörpers liegen (§ 4).

§ 1. Orthogonale Korrelationen

Als Grundrelationen der euklidischen Ebene nehmen wir die *Inzidenz* „P/g" und die *Orthogonalität* „$g \perp h$". Für die Inzidenz sollen die Axiome der *affinen Ebene* gelten. Hiermit ist die *Parallelität* „$g \parallel h$" gegeben (mit der Bedeutung: g, h stimmen überein oder haben keinen Schnittpunkt). Für die Orthogonalität fordern wir:

O1. Mit $g \perp h$ ist $h \perp g$ (Symmetrie).

---

[1]) Vgl. [12].

[2]) Vgl. [2], S. 102.

[3]) Der additive Automorphismus eines Schiefkörpers wurde in [9] auf den Trapezsatz zurückgeführt.

02. Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g gibt es genau eine Gerade h mit P/h und $g \perp h$ (Existenz und Eindeutigkeit des Lotes).

Hieraus folgt mit den affinen Axiomen: Mit $g \perp h$ und $h \parallel k$ ist $g \perp k$ (Transitivität).

Erklärungen zur Bezeichnung:

1. Sind P, Q zwei verschiedene Punkte, so bezeichne PQ ihre Verbindungsgerade.

2. Sind g, h zwei nicht-parallele Geraden, so bezeichne gh ihren Schnittpunkt.

3. Das gemäß 02 eindeutig bestimmte Lot von einem Punkt P auf eine Gerade g werde mit Pg bezeichnet.

Aus der affinen Ebene geht in bekannter Weise eine *projektive Ebene* hervor, indem die Parallelenscharen als „uneigentliche Punkte" erklärt werden und eine „uneigentliche Gerade" hinzugenommen wird. Die uneigentliche Gerade bezeichnen wir mit ω.

Unter einer „*orthogonalen Korrelation*" verstehen wir eine Abbildung mit den Eigenschaften:

K1. Jeder Punkt P und jede Gerade g der projektiven Ebene besitzt eindeutig eine Bildgerade P' bzw. einen Bildpunkt g' in der projektiven Ebene.

K2. Alle Punkte und Geraden der projektiven Ebene haben eindeutige Urbilder.

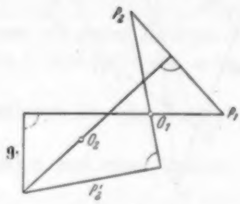


Fig. 1

K3. Mit P/g gilt auch g'/P'.

K4. Urbild von ω ist ein eigentlicher Punkt O_1. Dann ist nach K3 auch ω' ein eigentlicher Punkt O_2.

K5. Bei $P \neq O_1$ ist $P' \perp O_1P$.

K6. Für jede eigentliche Gerade g gilt $g \perp O_2g'$. (K1–K3 sind die *Korrelationsbedingungen*, K5 und K6 die *Orthogonalitätsbedingungen*.)

Aus K2 und K3 folgt: Mit g'/P' gilt auch P/g.

Wir suchen einen Schließungssatz für die Existenz orthogonaler Korrelationen auf.

Es möge eine orthogonale Korrelation mit $O_1' = \omega$ und $\omega' = O_2$ geben, bei der ein eigentlicher Punkt $P_1 \neq O_1$ auf eine eigentliche Gerade $P_1' = g_1$ abgebildet wird. Nach K3 inzidiert O_2 nicht mit g_1 (da P_1 eigentlich ist). Nach K5 ist $P_1' \perp O_1P_1$. Mit Hilfe der genannten Punkte und Geraden läßt sich das Bild P_2' eines beliebigen Punktes P_2, der nicht mit O_1P_1 inzidiert, folgendermaßen konstruieren (Fig. 1):

Da P_2 nicht mit O_1P_1 inzidiert, so inzidiert der uneigentliche Punkt von g_1 nicht mit P_2. Daher existiert g_1P_2' in der affinen Ebene. Nach K3 ist $(P_1P_2)' = g_1P_2$, also nach K6 $P_1P_2 \perp O_2(g_1P_2')$. Da O_2 nicht mit g_1 inzidiert, ist $g_1 \neq O_2(P_1P_2)$. Hiermit folgt $g_1P_2' = g_1(O_2(P_1P_2))$. Nach K5 ist $P_2' \perp O_1P_2$, also $P_2' = (g_1P_2)(O_1P_2)$. Die letzten beiden Gleichungen ergeben

$$P_2' = \big(g_1(O_2(P_1P_2))\big)\,(O_1P_2). \tag{1}$$

Hiermit ist P_2' durch O_1, O_2, P_1, g_1 und P_2 eindeutig bestimmt.

P_3 sei ein weiterer Punkt, so daß O_1, P_1, P_2, P_3 ein echtes Viereck bilden. P_3' läßt sich sowohl mit dem Hilfspunkt P_1 und seiner Bildgeraden $g_1 = P_1'$ als auch mit dem Hilfspunkt P_2 und seiner Bildgeraden P_2' konstruieren. Die Unabhängigkeit der Geraden P_3' vom Hilfspunkt der Konstruktion wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$(2) \qquad \big(g_1(O_2(P_1P_3))\big)\,(O_1P_3) = \big(P_2'(O_2(P_2P_3))\big)\,(O_1P_3)\,,$$

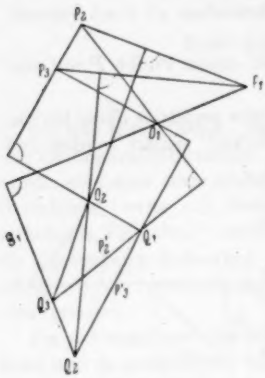


Fig. 2

wo P_2' gemäß (1) bestimmt ist. Der hiermit gegebene Schließungssatz läßt sich folgendermaßen formulieren, wenn $P_0 = O_1$, $Q_0 = O_2$, $Q_1 = P_2'P_3'$, $Q_2 = g_1P_3'$, $Q_3 = g_1P_2'$ gesetzt wird (vgl. Fig. 2):

Satz von den anti-orthologen Vierecken: Gelten für zwei echte Vierecke $P_0, \ldots, P_3$ und $Q_0, \ldots, Q_3$ fünf der Relationen

$$P_{\pi(0)}\,P_{\pi(1)} \perp Q_{\pi(2)}\,Q_{\pi(3)}\,,$$

wo π die Permutationen der vier Zahlen $0, \ldots, 3$ durchläuft, so gilt auch die zugehörige sechste Relation.

Bei der Konfiguration dieses Satzes können die fünf Punkte P_0, P_1, P_2, P_3, Q_0 und die Gerade $g_1 = Q_2Q_3$ vorgegeben werden. Die übrigen Punkte und Geraden der Konfiguration sind dann durch die verlangten Orthogonalitäten bestimmt. Als „$(P_0, P_1; Q_0, g_1)$-*Satz*" bezeichnen wir den Satz von den anti-orthologen Vierecken für feste P_0, P_1, Q_0, g_1, wobei P_2, P_3 alle Punktepaare durchläuft, so daß $P_0, \ldots, P_3$ ein echtes Viereck bilden.

Unser bisheriges Ergebnis lautet: Wenn es eine orthogonale Korrelation mit $O_1' = \omega$, $\omega' = O_2$ und $P_1' = g_1$ gibt, wo P_1 ein eigentlicher Punkt $\neq O_1$ ist, so gilt der $(O_1, P_1; O_2, g_1)$-Satz von den antiorthologen Vierecken.

Es sei nun umgekehrt dieser Schließungssatz vorausgesetzt. Wir suchen zu gegebenen eigentlichen Punkten $O_1, O_2, P_1 \neq O_1$ und einer eigentlichen Geraden $g_1 \perp O_1P_1$, die nicht mit O_2 inzidiert, eine orthogonale Korrelation mit $O_1' = \omega$, $\omega' = O_2$ und $P_1' = g_1$. Hierzu ist für jeden Punkt P_2, der nicht mit O_1P_1 inzidiert, die Bildgerade P_2' gemäß (1) zu bestimmen. Mit einem solchen Paar P_2, P_2' statt P_1, g_1 erhält man ebenso das Bild eines jeden Punktes der Geraden O_1P_1. Konstruktionsgemäß gilt dann K5 für alle Punkte und ihre Bildgeraden. Auf Grund des Satzes von den anti-orthologen Vierecken ist die Konstruktion der Bildgeraden unabhängig vom Hilfspunkt. Hiermit ergibt sich allgemein: Sind die eigentlichen Punkte P, Q nicht mit O_1 kollinear, so haben die Geraden P', Q' und $O_2(PQ)$ einen Schnittpunkt (gemäß Fig. 1 mit P, Q statt P_1, P_2). Erklären wir diesen Schnittpunkt, der nur von der Geraden PQ abhängt, als Bild dieser Geraden, so erhalten wir für jede eigentliche Gerade g, die nicht mit O_1 inzidiert, und ihren Bildpunkt g' die Eigenschaften K3 und K6. Indem außerdem jeder mit O_1 inzidenten Geraden g als Bild

der uneigentliche Punkt aller Senkrechten zu g zugeordnet wird, ergibt sich die gewünschte orthogonale Korrelation mit allen Eigenschaften K1—K6.

Hiermit ist bewiesen:

Satz 1. *Zu den eigentlichen Punkten $O_1, O_2, P_1 \neq O_1$ und einer eigentlichen Geraden $g_1 \perp O_1 P_1$, die nicht mit O_2 inzidiert, gibt es genau dann eine orthogonale Korrelation mit $O_1' = \omega$, $\omega' = O_2$ und $P_1' = g_1$, wenn der $(O_1, P_1; O_2, g_1)$-Satz von den anti-orthologen Vierecken gilt.*

Wir sprechen von einer „*zentralen*" orthogonalen Korrelation, wenn $O_1 = O_2$ ist (mit den Bezeichnungen von K4). Der Punkt O mit $O' = \omega$, $\omega' = O$ ist das „*Zentrum*" einer solchen Korrelation[4]).

In einer Translationsebene (in der es zu je zwei Punkten eine Translation gibt, die den einen Punkt auf den anderen abbildet) ist jede nicht-zentrale orthogonale Korrelation gleich einem Produkt aus einer zentralen orthogonalen Korrelation und einer Translation.

Zwischen den zentralen orthogonalen Korrelationen *mit festem Zentrum O* und den Zentralkollineationen *mit demselben Zentrum O und der Achse ω* ist unmittelbar folgender Zusammenhang zu erkennen:

1. Das Produkt von zwei orthogonalen Korrelationen ist eine Zentralkollineation.
2. Das Produkt aus einer orthogonalen Korrelation und einer Zentralkollineation ist eine orthogonale Korrelation.
3. Gilt der Satz von den anti-orthogonalen Vierecken, so ist jede Zentralkollineation gleich einem Produkt von zwei orthogonalen Korrelationen.

Die Gruppe, die von den orthogonalen Korrelationen mit Zentrum O erzeugt wird, besteht also aus den orthogonalen Korrelationen und Zentralkollineationen.

§ 2. Polarkorrelationen

Als „*Polarkorrelation*" bezeichnen wir eine orthogonale Korrelation, die *involutorisch* ist, also außer K1—K5 die Eigenschaft besitzt:

K7. $P'' = P$ für alle Punkte P.

Eine solche Korrelation ist *zentral*. K6 folgt aus K5 und K7.

Um orthogonale Korrelationen als involutorisch nachzuweisen, gebrauchen wir:

Satz 2. *Bei einer orthogonalen Korrelation mit Zentrum O gilt für eigentliche Punkte $P \neq O$:*

a) *Ist $P = P''$, so hat jedes Dreieck OPQ mit Q/P' einen Höhenschnittpunkt.*

b) *Hat ein Dreieck OPQ mit Q/P' einen Höhenschnittpunkt, so ist $P = P''$.*

Beweis: OPQ sei ein eigentliches Dreieck mit Q/P'. Dann ist $Q' \neq OP$ und nach K3 auch P''/Q'. Nach K5 und K6 ist $P' \perp OP$, $Q' \perp OQ$ und $P' \perp OP''$. Daraus folgt P''/OP, $P' = Q(OP)$ und $Q' = P''(OQ)$. Da gemäß (1) $Q' = (P'(O(PQ)))(OQ)$ ist, haben die Geraden P', Q', $O(PQ)$ einen Schnittpunkt S. Die Geraden $P' = Q(OP)$ und $O(PQ)$ sind Höhen des Dreiecks OPQ.

[4]) Die orthogonalen Korrelationen mit Zentrum O in der euklidischen Ebene über dem Körper der reellen Zahlen sind die Pol-Polarenbeziehungen an Kreisen mit dem Zentrum O.

Die dritte Höhe $P(OQ)$ geht genau dann durch den Schnittpunkt S der beiden anderen Höhen, wenn $P(OQ) = P''(OQ) = Q'$, also P/Q' ist. Diese Bedingung ist wegen P''/Q', P''/OP und $Q' \neq OP$ mit $P'' = P$ äquivalent.

Anmerkung zu Satz 2: Inzidiert P mit P', so ist jedes Dreieck OPQ mit Q/P' rechtwinklig (wegen $P' \perp OP$). Hierfür gilt trivialerweise der Höhenschnittpunktsatz und auch $P'' = P$.

Für die im Satz 2 genannten Eigenschaften führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Ein Tripel (O, P, g) eigentlicher Punkte $O \neq P$ und einer eigentlichen Geraden $g \perp OP$, die nicht mit O inzidiert, heiße „*schwach ausgezeichnet*" bzw. „*stark ausgezeichnet*", wenn *mindestens ein* eigentliches Dreieck OPQ mit Q/g bzw. *jedes* derartige Dreieck einen Höhenschnittpunkt besitzt.

Aus Satz 2 folgt für orthogonale Korrelationen $P \to P'$ mit Zentrum O: Jedes schwach ausgezeichnete Tripel (O, P, P') ist zugleich stark ausgezeichnet.

Satz 3. *a) Bei einer Polarkorrelation mit Zentrum O ist jedes Tripel (O, P, P') mit eigentlichem $P \neq O$ stark ausgezeichnet.*

b) Eine orthogonale Korrelation mit Zentrum O, zu der ein schwach ausgezeichnetes Tripel (O, P, P') gehört, ist eine Polarkorrelation.

Satz 3a) folgt unmittelbar aus Satz 2a).

Beweis von Satz 3b): Gegeben sei eine orthogonale Korrelation mit Zentrum O, zu der ein schwach ausgezeichnetes Tripel (O, P, P') gehört. Nach Satz 2b) folgt $P = P''$. Q sei ein eigentlicher Punkt, der nicht mit OP inzidiert. Dann ist $R = P'Q'$ ein eigentlicher Punkt, der weder mit OP noch mit OQ inzidiert. Wegen $P = P''$ und R/P' hat nach Satz 2a) das Dreieck OPR einen Höhenschnittpunkt. Aus $P = P''$ und R/P' folgt P/R'. Satz 2b) liefert $R = R''$. Dann gilt mit R/Q' auch Q/R'. Wegen $R = R''$ hat nach Satz 2a) das Dreieck OQR einen Höhenschnittpunkt. Mit R/Q' folgt nach Satz 2b) $Q = Q''$. Wendet man dieselbe Überlegung auf Q statt P an, so erhält man $A = A''$ für alle eigentlichen Punkte $A \neq O$. Da diese Gleichung auch für $A = O$ und für jeden uneigentlichen Punkt A gilt, ist die Polareigenschaft nachgewiesen.

Die Existenz einer Polarkorrelation erfordert nach den Sätzen 1 und 3 den Satz von den anti-orthologen Vierecken und den Höhenschnittpunktsatz für entsprechende Punkte. Man kann sich aber auch auf folgenden Schließungssatz allein beziehen:

Fünfecksatz: Schneiden sich vier Höhen eines Fünfecks (Lote von den Ecken auf ihre Gegenseiten) in einem Punkt, so geht auch die fünfte Höhe durch diesen Schnittpunkt.

Satz 4. *Eine Polarkorrelation mit dem Zentrum O, durch die ein eigentlicher Punkt $P \neq O$ auf eine eigentliche Gerade $g \perp OP$, die nicht mit O inzidiert, abgebildet wird, existiert genau dann, wenn der Fünfecksatz für alle Fünfecke mit einem Eckpunkt P, der Gegenseite g und dem Höhenschnittpunkt O gilt.*

Beim Beweise gebrauchen wir folgende Bezeichnungen:

Punkte 1. Art: Eigentliche Punkte, die nicht mit OP inzidieren.

Punkte 2. Art: O und alle uneigentlichen Punkte.

Punkte 3. Art: Eigentliche Punkte $\neq O$ auf OP.

Geraden 1. Art: Eigentliche Geraden, die nicht mit O inzidieren und nicht zu g parallel sind.

Geraden 2. Art: Die uneigentliche Gerade ω und alle mit O inzidenten Geraden.

Geraden 3. Art: Eigentliche Geraden $\parallel g$, die nicht mit O inzidieren.

Beweis von Satz 4: Für jeden Punkt Q 1. Art läßt sich die Bildgerade Q' gemäß (1) durch $Q' = \big(g(O(PQ))\big)\,(OQ)$ definieren. Für jede Gerade h 1. Art erhält man einen Punkt Q_1 1. Art mit $Q_1' = h$. Die Polareigenschaft der Korrelation erfordert $h' = Q_1$ und Q_1/Q_2' für alle Punkte Q_2 1. Art mit Q_2/Q_1'. Diese Inzidenzforderung wird durch den Fünfecksatz für das Fünfeck P, Q_1, $g(O(PQ_2))$, $g(O(PQ_1))$, Q_2 ausgedrückt (Fig. 3). Die Gültigkeit des angegebenen Fünfecksatzes ist also notwendig für die Existenz der geforderten Polarkorrelation. Wir setzen nun diesen Fünfecksatz voraus. Dann kann für alle Punkte 1. Art $Q'' = Q$ gesetzt werden, und es ergibt sich für alle Punkte und Geraden 1. Art mit Q/h auch h'/Q'. Jeder eigentlichen Geraden h 2. Art ist als Bild h' der uneigentliche Punkt U aller Senkrechten zu h zuzuordnen, und umgekehrt ist $U' = h$ zu setzen. Mit diesen Festsetzungen und mit $O' = \omega$, $\omega' = O$ wird $Q'' = Q$ und Q/h äquivalent h'/Q' für alle Punkte und Geraden 1. und 2. Art. Q_1, Q_2 seien zwei verschiedene Punkte 1. oder 2. Art, die mit einer Geraden h 3. Art inzidieren. Ihre Bildgeraden Q_1', Q_2' schneiden sich in einem Punkt h'. Wäre h' von 1. oder 2. Art, so könnte $h'' = h$ keine Gerade 3. Art sein. Daher ist h' ein Punkt 3. Art und eindeutig durch h bestimmt. Man findet zu jedem Punkt Q 3. Art genau eine Gerade h 3. Art mit $h' = Q$. Setzt man hierfür $Q' = h$, so hat man die gesuchte Polarkorrelation mit $P' = g$ gewonnen.

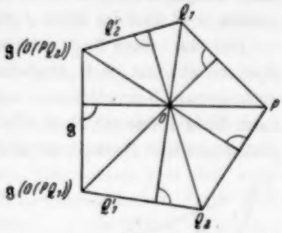


Fig. 3

Gilt der Fünfecksatz allgemein, so gilt nach den Sätzen 3 und 4 auch der Höhenschnittpunktsatz allgemein. Umgekehrt liefert der Höhenschnittpunktsatz den Satz von den anti-orthologen Vierecken und hiermit nach den Sätzen 1, 3 und 4 den Fünfecksatz. Eine entsprechende Äquivalenz zwischen Fünfecksatz und Höhenschnittpunktsatz braucht aber bei Beschränkung auf spezielle Fälle dieser Sätze nicht zu bestehen.

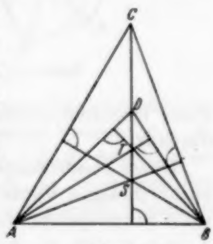


Fig. 4

Die Äquivalenz zwischen schwacher und starker Auszeichnung, die nach Satz 2 für Tripel (O, P, P') bei zentralen orthogonalen Korrelationen besteht, läßt sich durch folgenden Schließungssatz kennzeichnen:

Konditionaler Höhenschnittpunktsatz: Hat ein Dreieck ABC einen Höhenschnittpunkt S, so hat auch jedes Dreieck ABD mit $D/C(AB)$ einen Höhenschnittpunkt T (Fig. 4).

Der Satz ist ein *konditionaler* Schließungssatz, da der vorausgesetzte Höhenschnittpunkt S nur für spezielle Lagen von A, B, C zu existieren braucht. Er ist ein Spezialfall des Satzes von den anti-orthologen Vierecken, nämlich für die Vierecke $ABCT$ und $ABDS$, wo C, D, S, T auf einer Senkrechten zu AB liegen. Wir bezeichnen A, B als die „*Basispunkte*" und $C(AB)$ als die „*Höhe*" der Konfiguration.

Man erkennt unmittelbar:

Satz 5. *Ein schwach ausgezeichnetes Tripel* (O, P, g) *ist genau dann zugleich stark ausgezeichnet, wenn der konditionale Höhenschnittpunktsatz für die Basispunkte* O, P *und die Höhe* g *gilt.*

Der im Satz 5 genannte konditionale Höhenschnittpunktsatz ist ein Spezialfall des $(O, P; O, g)$-Satzes von den anti-orthologen Vierecken. Für orthogonale Korrelationen mit Zentrum O und eigentliche Punkte $P \neq O$ gilt nach Satz 1 der $(O, P; O, P')$-Satz, also auch der konditionale Höhenschnittpunktsatz mit Basispunkten O, P und der Höhe P'. Dies steht mit Satz 5 im Einklang zu der Folgerung aus Satz 2, nach der die schwache mit der starken Auszeichnung für Tripel (O, P, P') einer zentralen orthogonalen Korrelation übereinstimmt. Eine solche Übereinstimmung braucht aber nicht für beliebige Tripel (O, P, g) zu bestehen.

Eine Existenzaussage für Polarkorrelationen erhält man mit einem weiteren Spezialfall des Satzes von den anti-orthologen Vierecken.

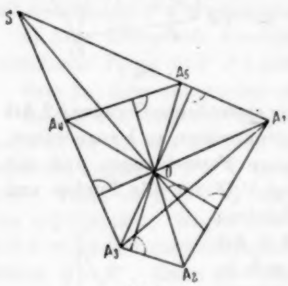


Fig. 5

Konditionaler Fünfecksatz: Schneiden sich vier Höhen eines Fünfecks $A_1 \ldots A_5$ in einem Punkt O und hat das Dreieck OA_1A_3 einen Höhenschnittpunkt S, so geht auch die fünfte Höhe des Fünfecks durch O.

Dieser konditionale Schließungssatz ist ein Spezialfall des Satzes von den anti-orthologen Vierecken, nämlich für die Vierecke $OA_1A_2A_3$ und OA_5SA_4, wo S Schnittpunkt von A_1A_5 und A_3A_4 ist (Fig. 5).

Satz 6. *Gilt der konditionale Fünfecksatz, so gibt es zu jedem stark ausgezeichneten Tripel* (O, P, g) *eine Polarkorrelation mit Zentrum* O *und* $P' = g$.

Beweis: Ist das Tripel (O, P, g) stark ausgezeichnet, so hat jedes Dreieck OPQ mit Q/g einen Höhenschnittpunkt. Hieraus folgt mit dem konditionalen Fünfecksatz der Fünfecksatz für alle Fünfecke mit einem Eckpunkt P, der Gegenseite g und dem Höhenschnittpunkt O. Dann existiert die geforderte Polarkorrelation nach Satz 4.

Satz 7. *Der konditionale Höhenschnittpunktsatz gilt zugleich mit dem konditionalen Fünfecksatz genau dann, wenn es zu jedem schwach ausgezeichneten Tripel* (O, P, g) *eine Polarkorrelation mit Zentrum* O *und* $P' = g$ *gibt.*

Beweis: Falls die geforderten Polarkorrelationen existieren, gilt nach den Sätzen 2 und 5 der konditionale Höhenschnittpunktsatz und nach Satz 4

auch der konditionale Fünfecksatz. Die Umkehrung folgt aus den Sätzen 5 und 6.

Folgerung aus Satz 7: *Mit dem konditionalen Höhenschnittpunktsatz und dem konditionalen Fünfecksatz ist die Existenz von Polarkorrelationen gegeben.*

Beweis: Jedes rechtwinklige Dreieck OPQ mit $OQ \perp PQ$ liefert ein schwach ausgezeichnetes Tripel $(O, P, Q(OP))$. Hierzu gibt es auf Grund der angegebenen Schließungssätze eine Polarkorrelation mit Zentrum O.

Existiert eine Polarkorrelation, so läßt sich in der projektiven Ebene eine *pseudo-elliptische*[5]) Metrik einführen, indem zwei Geraden g, h genau dann als *pseudo-orthogonal* erklärt werden, wenn g' mit h (also auch h' mit g) inzidiert. Diese Pseudoorthogonalität stimmt bei Geraden, von denen mindestens eine mit dem Zentrum der Polarkorrelation inzidiert, mit der axiomatisch gegebenen euklidischen Orthogonalität überein.

Aus dem allgemeinen Satz von den anti-orthologen Vierecken erhält man durch zweimalige Anwendung den allgemeinen affinen Satz von Desargues; und mit den im Satz 7 genannten Spezialfällen des Satzes von den anti-orthologen Vierecken ergeben sich gewisse Polarkorrelationen. Mit dem affinen Satz von Desargues lassen sich Koordinaten einführen, die einen Schiefkörper bilden. Bekanntlich wird dann jede Polarkorrelation durch eine semibilineare Form gegeben[6]). Indem man die Grundform einer pseudoelliptischen Metrik auf diejenigen Geraden beschränkt, die mit dem Zentrum der Polarkorrelation inzidieren, erhält man eine semibilineare metrische Form für die euklidische Orthogonalität. Hiermit ist ein neuer Beweis dafür gegeben, daß der Satz von den anti-orthogonalen Vierecken eine semibilineare Orthogonalitätsrelation liefert[7]).

§ 3. Orthogonale Isomorphismen von Dreigeweben

Ein Spezialfall des Satzes von den anti-orthologen Vierecken ist der *Trapezsatz*, bei dem die anti-ortholog aufeinander bezogenen Vierecke $A_1 \ldots A_4$ und $B_1 \ldots B_4$ parallele Seiten $A_1A_2 \parallel A_3A_4$ und $B_1B_2 \parallel B_3B_4$ haben. Vertauscht man die Bezeichnungen für die Punkte B_3, B_4, so kann man den Satz auch als Spezialfall des Satzes von den orthologen Vierecken folgendermaßen formulieren.

Trapezsatz: Gelten für zwei Vierecke $A_1 \ldots A_4$ und $B_1 \ldots B_4$ mit $A_1A_2 \parallel A_3A_4$ und $B_1B_2 \parallel B_3B_4$ fünf der Relationen

$$A_iA_k \perp B_iB_k \qquad (1 \leqq i < k \leqq 4),$$

so gilt auch die sechste Relation.

[5]) Die Bezeichnung „elliptisch" bezieht sich nur auf die inzidentielle Eigenschaft, daß je zwei Geraden einen Schnittpunkt besitzen. Entsprechend sind die hier betrachteten Ebenen nur insofern „euklidisch", als die inzidentielle Forderung des Parallelenaxioms zugrunde liegt. Isotrope Geraden (die auf sich selbst senkrecht stehen) sind in jedem Falle zugelassen.

[6]) Vgl. [2], S. 102.

[7]) Ein anderer Beweis wurde in [12] auf dem Wege über ein Skalarprodukt geführt.

Dieser Satz läßt sich nicht wie der allgemeine Satz von den anti-orthologen Vierecken oder der allgemeine Satz von den orthologen Vierecken[8]) durch orthogonale Korrelationen bzw. Kollineationen der affinen oder projektiven Ebene charakterisieren, wohl aber durch entsprechende Abbildungen von Geweben. Der Trapezsatz kann als ein Satz von anti-orthologen Vierecken durch duale Isomorphismen von Dreigeweben auf duale Dreigewebe charakterisiert werden, zugleich aber auch als ein Satz von orthologen Vierecken durch orthogonale Isomorphismen von Dreigeweben. Wir wählen die letzte Möglichkeit. Hierbei werden nur Punkte und Geraden der *affinen* Ebene verwendet.

Durch zwei verschiedene Punkte A, B wird ein *Dreigewebe* (A, B) bestimmt, das folgende Punkte und Geraden enthält: Alle Punkte der affinen Ebene, die nicht mit AB inzidieren; alle Geraden, die mit A oder B inzidieren oder zu AB parallel sind, wobei die Gerade AB selbst ausgeschlossen wird.

Ein *orthogonaler Isomorphismus* von einem Dreigewebe (A, B) auf ein Dreigewebe (A', B') ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung eines jeden Punktes P und einer jeden Geraden g aus (A, B) auf einen Punkt P' bzw. auf eine Gerade g' aus (A', B'), so daß mit P/g stets P'/g' und allgemein $g \perp g'$ gilt. Zwei Dreigewebe heißen *orthogonal-isomorph*, wenn es einen orthogonalen Isomorphismus des einen Dreigewebes auf das andere gibt.

Satz 8. *Der allgemeine Trapezsatz gilt genau dann, wenn je zwei Dreigewebe (A, B) und (A', B') mit $AB \perp A'B'$ orthogonal-isomorph sind.*

Beweis: Bei einem orthogonalen Isomorphismus von (A, B) auf (A', B') ist jede Gerade a, die mit A inzidiert, auf die Gerade $a' = A'a$ abzubilden. Entsprechend ist $b' = B'b$ bei B/b zu setzen. Jeder Punkt P des Gewebes (A, B) ist eindeutiger Schnittpunkt der Geraden AP, BP. Als Bildpunkt P' ist der Schnittpunkt ihrer Bildgeraden zu nehmen. Die Inzidenztreue („mit P/g gilt auch P'/g'") besteht dann für alle Geraden, die mit A oder B inzidieren. Die Forderung, daß sie auch für die Parallelen zu AB gilt, ist unmittelbar mit dem Trapezsatz äquivalent.

Wir suchen das algebraische Äquivalent des Trapezsatzes auf. Durch zweimalige Anwendung dieses Satzes erhält man einen Spezialfall des Satzes von Desargues. Hiermit lassen sich Koordinaten einführen, die bei Charakteristik $\neq 2$ einen Alternativkörper bilden. Zum Beweise gehen wir davon aus, daß der affine kleine Satz von Desargues zu den Folgerungen aus dem Trapezsatz gehört. (Mit Hilfe des Trapezsatzes erhält man zunächst den kleinen Satz von Desargues für jede eigentliche Gerade g als Achse und für den mit g inzidenten uneigentlichen Punkt als Zentrum. Hieraus folgt, wie z. B. aus [7] zu entnehmen ist, auch der *affine* kleine Satz von Desargues.) Die Ebene ist daher eine Translationsebene und besitzt einen Koordinaten-Quasikörper, mit dem die Geraden durch Gleichungen $y = ax + b$ und $x = c$ dargestellt werden[9]). Das Koordinatensystem kann so gewählt

[8]) Der Satz von den orthogonalen Vierecken ist nach [10] mit der Existenz gewisser orthogonaler Kollineationen äquivalent.

[9]) Vgl. [4] oder [11].

werden, daß $x = a \perp y = b$ ist. Dann gibt es eine umkehrbar eindeutige Abbildung $a \to a'$ der Koordinatenelemente $\neq 0$ auf sich, so daß $y = a\,x \perp y = a'x$ ist. Wir definieren $\bar{a}$ durch die Gleichungen $\bar{0} = 0$ und $a'(k\bar{a}) = 1$ für $a \neq 0$, wo k eine Konstante mit $1'k = 1$ ist. $a \to \bar{a}$ ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung aller Koordinatenelemente auf sich mit

$$\bar{0} = 0, \bar{1} = 1 \text{ und } y = a\,x \perp y = (k\bar{a})^{-1}x \text{ für } a \neq 0,$$

wo u^{-1} durch $u^{-1}u = 1$ definiert ist. Die Eigenschaften dieser Abbildung suchen wir zugleich mit den Alternativkörper-Eigenschaften der Koordinaten auf.

I. Bei dem orthogonalen Isomorphismus $(A,B) \to (A',B')$ mit $A = A' = (0,0)$ $B = (0,bc)$, $B' = (k\bar{b},0)$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ findet man für die Geraden und Punkte

$$y = bc,\ y = b\,x,\ (c, bc),\ x = c,\ y = a\,x + bc,\ (c, ac + bc)$$

der Reihe nach die Bilder

$$x = k\bar{b},\ y = (k\bar{b})^{-1}x,\ (k\bar{b},1),\ y = 1,\ y = (k\bar{a})^{-1}x - (k\bar{a})^{-1}(k\bar{b}),\ (k\bar{a} + k\bar{b},1).$$

Auf Grund der Isomorphie steht die Gerade $y = (k\bar{a} + k\bar{b})^{-1}x$ senkrecht auf der Verbindungsgeraden von $(0,0)$ und $(c, ac + bc)$. Diese Verbindungsgerade ist also von c unabhängig und hat die Gleichung $y = (a + b)\,x$. Daraus folgt das zweite Distributivgesetz

$$(a + b)\,c = ac + bc$$

(neben dem anderen Distributivgesetz, das in jedem Quasikörper gilt) und

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}. \tag{3}$$

Aus (3) folgt insbesondere $\bar{0} = 0$.

II. Bei dem orthogonalen Isomorphismus $(A,B) \to (A',B')$ mit $A = A' = (0,0)$, $B = (b,b)$, $B' = (k,1)$, $b \neq 0$ haben die Geraden und Punkte

$$x = b,\ y = (2 - a)\,x,\ (b, 2\,b - ab),\ y = x + b - ab,\ y = b,\ (ab, b)$$

der Reihe nach die Bilder

$$y = 1,\ y = (2k - k\bar{a})^{-1}x,\ (2k - k\bar{a},1),\ y = k^{-1}x - 1 + k^{-1}(k\bar{a}),\ x = k,\ (k, k^{-1}(k\bar{a})).$$

Auf Grund der Isomorphie stehen die Verbindungsgeraden $g = (0,0)\ (ab,b)$ und $g' = (0,0)\ (k, k^{-1}(k\bar{a}))$ aufeinander senkrecht. Die Gerade g ist also unabhängig von b und hat die Gleichung $y = a^{-1}x$. Hiermit erhält man das Linkskürzungsgesetz

$$a^{-1}(ab) = b\,.$$

Wir setzen nun Charakteristik $\neq 2$ voraus. Das heißt geometrisch, daß wir das *Fano-Axiom* hinzunehmen: „Die Diagonalen eines Parallelogramms haben einen Schnittpunkt." Dann folgt auch das Rechtskürzungsgesetz

$$(ab)\,b^{-1} = a\,,$$

und die Koordinaten bilden einen *Alternativkörper*[10]). Die Gerade g' erhält nun die Gleichung $y = (\bar{a}k^{-1})x$. Aus $g \perp g'$ folgt

$$\overline{a^{-1}} = \bar{a}^{-1}. \tag{4}$$

Auf Grund des Linkskürzungsgesetzes ist auch $x = ay + b$ eine Geradengleichung. Wir können daher allgemein

$$y = ax + b \perp x = (k\bar{a})\, y + c \tag{5}$$

setzen. Diese Relation gilt mit $\bar{0} = 0$ auch für $a = 0$.

III. Wir zeigen, daß auch umgekehrt mit den Alternativkörperregeln und den Abbildungsregeln (3), (4) der Trapezsatz erfüllt ist. Hierzu brauchen wir neben den elementaren Alternativkörperregeln $a(ab) = a^2b$, $(ab)b = ab^2$, $a(ba) = (ab)a$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ und den Kürzungsregeln nur die Folgerungen[11])

$$a(b(ac)) = (aba)c \tag{6}$$

$$(ka)\,(bk^{-1})\,(ka) = k(aba) \tag{7}$$

und die Abbildungsregel

$$\overline{aba} = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{a}. \tag{8}$$

Die letzte Regel ergibt sich folgendermaßen:

$$(a^{-1} - (a + b^{-1})^{-1})\,(a + b^{-1}) = a^{-1}b^{-1},$$

also

$$(a^{-1} - (a + b^{-1})^{-1})^{-1} = (a + b^{-1})\,(ba) = aba + a$$

und

$$aba = (a^{-1} - (a + b^{-1})^{-1})^{-1} - a.$$

Hieraus folgt (8) mit (3) und (4).

Um den Trapezsatz zu bestätigen, haben wir einen orthogonalen Isomorphismus $(A, B) \to (A', B')$ für $A = A' = (0,0)$, $B = (v, uv)$, $B' = ((k\bar{u})\,w, w)$, $v \neq 0$, $w \neq 0$ mit beliebigen u, v, w nachzuweisen. (Da eine Translationsebene vorliegt, genügt die spezielle Wahl von A, A'.) Die Geraden durch A bzw. B sind folgendermaßen abzubilden:

(9a)	$y = ax$	$\to x = (k\bar{a})y.$
(9b)	$y = bx + (u - b)\,v$	$\to x = (k\bar{b})\,y + (k\bar{u} - k\bar{b})\,w\,.$

Als Abbildung der Parallelen zu AB nehmen wir

(9c)	$y = ux + cv$	$\to x = (k\bar{u})\,y + (k\bar{c})\,w\,.$

Zwei Originalgeraden (9a), (9b) haben einen Schnittpunkt (x_0, ax_0) mit $x_0 = (a - b)^{-1}((u - b)v)$. Dieser liegt auf der Originalgeraden (9c) mit

$$c = (u - b)\,((u - b)^{-1} - (a - b)^{-1})\,(u - b), \tag{10}$$

[10]) Vgl. [5], [13] oder [11], S. 182. Konfigurative Ableitung der Alternativkörperregeln in [6], S. 128.

[11]) Vgl. [8] oder [11], S. 160. Regel (7) ist mit den dort angegebenen Regeln leicht zu gewinnen.

wie sich mit (6) errechnet. Die zugehörigen Bildgeraden (9a), (9b) haben den Schnittpunkt $((k\bar{a})y_0, y_0)$ mit $y_0 = (k\bar{a} - k\bar{b})^{-1}((k\bar{u} - k\bar{b})w)$. Wir haben zu zeigen, daß er auf der Bildgeraden (9c) liegt. Indem man (8) auf (10) anwendet, erhält man mit (7) die entsprechende Gleichung $(k\bar{a})y_0 = (k\bar{u})y_0 + (k\bar{c})w$. Es liegt also ein orthogonaler Isomorphismus vor.

Aus (5) folgt mit der Symmetrie der Orthogonalität:

(11) $$\overline{ka} = ak, \text{ insbesondere } \bar{k} = k\,.$$

Wir fassen zusammen:

Satz 9. *Das algebraische Äquivalent einer euklidischen Ebene, in der das Fanoaxiom und der Trapezsatz gelten, ist eine ebene Geometrie über einem Alternativkörper von einer Charakteristik* $\neq 2$ *mit* $y = ax \perp x = (k\bar{a})y$, *wo* $k \neq 0$ *und* $a \to \bar{a}$ *eine umkehrbar eindeutige Abbildung ist mit den Eigenschaften:*

$$\bar{1} = 1,\ \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b},\ \overline{a^{-1}} = \bar{a}^{-1},\ \overline{ka} = ak\,.$$

§ 4. Orthogonale Korrelationen in Ebenen über Alternativkörpern

Wir untersuchen orthogonale Korrelationen einer Ebene, die mit Fanoaxiom und Trapezsatz gemäß Satz 9 algebraisiert ist. Hierbei können wir uns auf orthogonale Korrelationen mit dem Zentrum (0,0) beschränken, da eine Translationsebene vorliegt, in der alle orthogonalen Korrelationen aus den speziellen Korrelationen mit festem Zentrum durch Translationen hervorgehen.

Eine orthogonale Korrelation mit Zentrum (0,0) ist eindeutig bestimmt durch die Bildgerade des Punktes (1,0). Als Gleichung dieser Bildgeraden kann $x = ke$ mit $e \neq 0$ angesetzt werden.

Wir fragen, unter welchen Bedingungen eine orthogonale Korrelation mit Zentrum (0,0) existiert, bei der (1,0) auf $x = ke$ abgebildet wird. Eine solche Korrelation ist in folgender Weise festgelegt:

1. Die Bildgerade eines Punktes (u,v) mit $v \neq 0$ ist gemäß (1) zu konstruieren. Die entsprechende Rechnung liefert die Geradengleichung

$$y = ((\overline{uv^{-1}})k^{-1})x - (\bar{v}^{-1}k^{-1})(ke)\,.$$

2. Auf Grund der Korrelationsbedingungen ist nun einer Geraden $y = a$ mit $a \neq 0$ der Bildpunkt

$$(0, -(\bar{a}^{-1}k^{-1})(ke))$$

zuzuordnen.

3. Entsprechend erhält gemäß 1. jede Gerade $x = ay + b$ mit $b \neq 0$ den Bildpunkt

$$\left((k\bar{b}^{-1})e,\ (\bar{a}k^{-1})((k\bar{b}^{-1})e)\right).$$

4. Gemäß 3. hat man für $(u,0)$ mit $u \neq 0$ die Bildgerade

$$x = (k\bar{u}^{-1})e\,.$$

5. Als Bilder von (0,0), $y = ax$, dem uneigentlichen Punkt aller Geraden $y = ax + \text{const}$ und der uneigentlichen Geraden sind der Reihe nach zu

wählen: Die uneigentliche Gerade, der uneigentliche Punkt aller Geraden $x = (k\bar{a})\, y + \text{const}$, $x = (k\bar{a})\, y$, $(0,0)$.

Nach diesen Festsetzungen erkennt man leicht, daß zum Nachweis einer orthogonalen Korrelation nur die Forderung gebraucht wird:

Bei $b \neq 0$, $v \neq 0$ inzidiert der Bildpunkt von $x = ay + b$ mit der Bildgeraden von $(av + b, v)$.

Alle übrigen Bedingungen der orthogonalen Korrelation lassen sich unmittelbar bestätigen. Die nachzuweisende Forderung wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$(\bar{a}k^{-1})\,((k\bar{b}^{-1})e) = (\bar{a}k^{-1} + (\overline{bv^{-1}})\,k^{-1})\,((k\bar{b}^{-1})e) - (\bar{v}^{-1}\,k^{-1})\,(ke)\,.$$

Eine einfache Umrechnung mit Hilfe der Alternativkörperregeln führt zu

$$\bar{v}^{-1}(ek^{-1}) = (\overline{bv^{-1}})\,(\bar{b}^{-1}\,(ek^{-1}))\,.$$

Indem wir b, v durch a^{-1}, $b^{-1}a^{-1}$ ersetzen, erhalten wir das Ergebnis:

Satz 10. *Eine orthogonale Korrelation mit Zentrum* $(0, 0)$, *bei der* $(1, 0)$ *auf* $x = ke$ *abgebildet wird, existiert genau dann, wenn für alle* a, b *die Produktregel gilt:*

$$\overline{(ab)}\,(ek^{-1}) = \bar{b}(\bar{a}(ek^{-1}))\,.$$

Existiert die betreffende orthogonale Korrelation, so ist sie nach Satz 3 genau dann eine Polarkorrelation, wenn ein Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, (ke, c), wo $c \neq 0$ ist, einen Höhenschnittpunkt besitzt. Wir können uns hierbei auf $c \neq e - k^{-1}$ beschränken. Ist nämlich $e - k^{-1} = 0$, so inzidiert $(1,0)$ mit seiner Bildgeraden $x = ke$, und die Korrelation ist gemäß Satz 3 und der Anmerkung zu Satz 2 eine Polarkorrelation. Die Höhen des angegebenen Dreiecks haben die Gleichungen $x = ke$, $y = k$, $x = (1 - \bar{e}^{-1}\,k^{-1})y + 1$. Als Höhenschnittpunktsbedingung erhält man $\bar{e} = e$.

Hiermit ist bewiesen:

Satz 11. *Eine orthogonale Korrelation mit Zentrum* $(0, 0)$, *bei der* $(1, 0)$ *auf* $x = ke$ *abgebildet wird, ist genau dann eine Polarkorrelation, wenn* $\bar{e} = e$ *ist.*

Die Forderung, die nach Satz 7 durch den konditionalen Höhenschnittpunktsatz und den konditionalen Fünfecksatz gegeben ist, besagt nun für Ebenen über Alternativkörpern:

Ist $\bar{e} = e$, so gibt es eine Polarkorrelation mit Zentrum $(0,0)$, die $(1,0)$ auf $x = ke$ abbildet.

Das heißt nach Satz 10:

(12) Bei $\bar{e} = e$ ist $\overline{(ab)}\,(ek^{-1}) = \bar{b}\,(\bar{a}\,(ek^{-1}))$.

Da $\bar{k} = k$ ist, folgt aus (12) insbesondere

$$\overline{ab} = \bar{b}\,\bar{a}\,. \tag{13}$$

Regel (11) geht hiermit über in

$$\bar{\bar{a}} = a\,. \tag{14}$$

Die Regeln (3), (13) und (14) besagen: $a \to \bar{a}$ ist ein involutorischer Antiautomorphismus. Mit (13) ist (12) äquivalent zu:

$$(\bar{b}\,\bar{a})\,(e k^{-1}) = \bar{b}(\bar{a}\,(e k^{-1})) \text{ für alle } a, b\,.$$

Das heißt: ek^{-1} liegt im *Kern*[12]) des Alternativkörpers. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes *Fixelement* (d. h. jedes Element e mit $\bar{e} = e$) im Kern des Alternativkörpers liegt.

Mit den Sätzen 7 und 9 erhalten wir so das Ergebnis:

Satz 12. *Das algebraische Äquivalent einer euklidischen Ebene, in der das Fanoaxiom, der Trapezsatz, der konditionale Höhenschnittpunktsatz und der konditionale Fünfecksatz gelten, ist eine ebene Geometrie über einem Alternativkörper von einer Charakteristik* $\neq 2$ *mit* $y = ax \perp x = (k\bar{a})y$, *wo* $a \to \bar{a}$ *ein involutorischer Antiautomorphismus ist, dessen Fixelemente im Kern des Alternativkörpers liegen, und* k *ein Fixelement* $\neq 0$ *ist.*

Für Ebenen, in denen die im Satz 12 genannten Schließungssätze gelten, lassen sich die orthogonalen Korrelationen mit Zentrum (0,0) durch die Geraden $x = ke$, die als Bilder des Punktes (1,0) auftreten können, leicht beschreiben. Nach Satz 10 und der Produktregel (13) gibt es orthogonale Korrelationen zu genau den Elementen $e \neq 0$, die im *Kern* des Alternativkörpers liegen. Eine solche Korrelation ist nach Satz 11 genau dann *involutorisch*, wenn e ein Fixelement ist. Demgemäß sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Zu jedem Element $e \neq 0$ gibt es eine Polarkorrelation. — Das ist genau dann der Fall, wenn der Höhenschnittpunktsatz allgemein gilt, also stets $\bar{a} = a$ ist. Die Koordinaten bilden dann einen kommutativen Körper.

2. Fall: Zu jedem Element $e \neq 0$ gibt es eine orthogonale Korrelation, darunter auch nicht-involutorische. — Das ist genau dann der Fall, wenn der Satz von den anti-orthologen Vierecken, aber nicht der Höhenschnittpunktsatz allgemein gilt. Das bedeutet algebraisch: Die Koordinaten bilden einen Schiefkörper (der auch kommutativ sein kann), und der involutorische Antiautomorphismus $a \to \bar{a}$ ist von der Identität verschieden.

3. Fall: Nicht zu jedem Element $e \neq 0$ gibt es eine orthogonale Korrelation. — Das ist genau dann der Fall, wenn der Koordinaten-Alternativkörper nicht mit seinem Kern übereinstimmt, also kein Schiefkörper ist. Ein solcher Alternativkörper ist bekanntlich eine Cayley-Algebra vom Rang 8 über ihrem Zentrum, das zugleich ihr Kern ist[13]). Jedes Element a genügt einer quadratischen Gleichung $a^2 - (a + \bar{a})\,a + \bar{a}a = 0$, deren Koeffizienten $-(a + \bar{a}), \bar{a}a$ Fixelemente sind, also nach Satz 12 im Kern liegen. Hieraus ist zu ersehen, daß $\bar{a}$ das zu a konjugierte Element sein muß. Der involutorische Antiautomorphismus $a \to \bar{a}$ ist also im 3. Falle durch den Alternativkörper eindeutig bestimmt (was im 2. Falle nicht zu gelten braucht). Hierbei sind alle Kernelemente Fixelemente, also alle zentralen orthogonalen Korrelationen Polarkorrelationen.

---

[12]) Vgl. [1] oder [11], S. 202.

[13]) Vgl. [3], [13] oder [11], S. 164—178.

Literatur

[1] ANDRÉ J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954). — [2] BAER R.: Linear algebra and projective geometry. New York 1952. — [3] BRUCK R. H. and E. KLEINFELD: The structure of alternative division rings. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 878—890 (1951). — [4] HALL MARSHALL: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [5] KLEINFELD E.: Right alternative rings. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 939—944 (1953). — [6] KLINGENBERG W.: Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen. Abh. math. Seminar Univ. Hamburg **18**, 120—143 (1952). — [7] LENZ H.: Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. Jber. dtsch. Math.-Ver. **57**, 20—31 (1954). — [8] MOUFANG R.: Zur Struktur von Alternativkörpern. Math. Ann. **110**, 416—430 (1935). [9] NAUMANN H., u. K. REIDEMEISTER: Über Schließungssätze der Rechtwinkelgeometrie. Erscheint in Abh. math. Sem. Univ. Hamburg. — [10] NAUMANN H.: Eine affine Rechtwinkelgeometrie. Math. Ann. **131**, 17—27 (1956). — [11] PICKERT G.: Projektive Ebenen. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955. — [12] SCHÜTTE K.: Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität. Math. Ann. **129**, 424—430 (1955). — [13] SKORNIAKOW L. A.: Rechtsalternativkörper. Izvestija Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **15**, 177—184 (1951).

(Eingegangen am 9. April 1956)

ROELCKE, W.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 121—129 (1956)

Analytische Fortsetzung der Eisensteinreihen zu den parabolischen Spitzen von Grenzkreisgruppen erster Art

Von

W. ROELCKE in Princeton, N. J.

Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe erster Art mit parabolischen Spitzen (s. H. PETERSSON [1][1]), S. 32, 57). Die Matrizen von Γ sind also insbesondere normiert, d. h. reell und von der Determinante 1, und Γ enthält die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ sei ein vollständiges System inäquivalenter parabolischer Spitzen von Γ und $A_1, A_2, \ldots, A_N$ ein System normierter Matrizen, so daß $A_\nu \tau_\nu = \infty$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Die A_ν seien dabei so bestimmt, daß in der Gruppe $A_\nu \Gamma A_\nu^{-1}$, die ja ∞ als Fixpunkt hat, die Untergruppe der parabolischen Matrizen zum Fixpunkt ∞ durch die Matrizen $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. $\mathfrak{S}(A_\nu, \Gamma)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) bezeichne ein maximales System von Matrizen M aus dem Matrizenkomplex $A_\nu \Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen. Der Gegenstand unserer Betrachtung sind dann die (hinsichtlich τ nichtanalytischen) Eisensteinreihen

$$E(\tau, s; A_\nu, \Gamma) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A_\nu, \Gamma)} \frac{y^{s/2}}{|m_1 \tau + m_2|^s} \tag{1}$$

in Abhängigkeit von s. Dabei ist $\tau = x + i y$, $y > 0$, s eine komplexe Variable, $\nu = 1, 2, \ldots, N$ und $M = \begin{pmatrix} * & * \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$. Die rechte Seite von (1) ist das $y^{s/2}$-fache der in H. PETERSSON [2] betrachteten Reihen $Q_s(\tau, A_\nu, \Gamma)$. Gemäß [2] ist $\mathrm{Re}\, s > 2$ der Bereich der absoluten Konvergenz von (1), und $E(\tau, s; A_\nu, \Gamma)$ ist eine automorphe Funktion von τ bezüglich Γ.

Falls Γ die Modulgruppe oder eine ihrer Hauptkongruenzuntergruppen ist, ist die analytische Fortsetzbarkeit der Reihen in die volle s-Ebene auf Grund ihres einfachen Zusammenhanges mit den Epsteinschen Zetafunktionen

$$\sum_{\substack{m_\nu \equiv a_\nu (Q) \\ (\nu = 1, 2)}} |m_1 \tau + m_2|^{-s}$$

bekannt. Für alle s gültige Fourierentwicklungen bezüglich x sind aus H. MAASS [3], § 3 zu entnehmen. In der vorliegenden Arbeit behandele ich den Fall allgemeiner Grenzkreisgruppen erster Art mit Spitzen. Die analytische Fortsetzung ist mir nur bis zur kritischen Geraden $\mathrm{Re}\, s = 1$ ausschließlich gelungen. Dagegen hat ATLE SELBERG, wie ich inzwischen erfahren habe, die Reihen in die ganze s-Ebene fortsetzen können. Ich möchte die vorliegende

[1]) Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Arbeit mit Selbergs Einverständnis dennoch veröffentlichen, da seine weiterreichenden Ergebnisse unveröffentlicht und unsere Methoden verschieden sind. Ich fuße auf den Resultaten meiner Dissertation [4] und komme von da aus verhältnismäßig schnell zu meinem beschränkteren Ziele. Der entscheidende Punkt in meinem Beweise ist, durch Subtraktion einer einfachen Hilfsfunktion $\Phi(\tau,s)$ von der nicht quadratisch integrierbaren Eisensteinreihe zu einer quadratisch integrierbaren Funktion $u(\tau,s)$ ($\operatorname{Re} s > 2$) überzugehen, deren analytische Fortsetzung dann leicht möglich ist auf Grund der Gleichung

$$\Delta\, u(\tau,s) + \lambda\, u(\tau,s) = -\Delta\, \Phi(\tau,s) - \lambda\, \Phi(\tau,s)$$

und der aus der Operatorentheorie im Hilbertraum bekannten Tatsache, daß die Resolvente R_λ eines selbstadjungierten Operators (in unserem Falle Δ, und $R_\lambda = (\Delta + \lambda)^{-1}$) von λ analytisch abhängt. Die letzte Tatsache scheint bisher nicht als Prinzip zur analytischen Fortsetzung Verwendung gefunden zu haben; seine Anwendbarkeit setzt allerdings recht spezielle Verhältnisse voraus.

Bevor wir mit dem Fortsetzungsgeschäft beginnen, seien einige bekannte Bemerkungen vorausgeschickt. Setzen wir

$$\lambda = \frac{s(2-s)}{4}, \tag{2}$$

so erfüllen die Reihen (1) in $\operatorname{Re} s > 2$ (gliedweise) die Differentialgleichung

$$\Delta\, E(\tau,s;A_\nu,\Gamma) + \lambda\, E(\tau,s;A_\nu,\Gamma) = 0, \tag{3}$$

wobei $\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ den gegenüber hyperbolischen Bewegungen invarianten Beltramischen Operator bedeutet. Nach [2], S. 40, (20) ist, wenn

$$A_\mu = \begin{pmatrix} a_\mu & b_\mu \\ c_\mu & d_\mu \end{pmatrix}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} E(A_\mu^{-1}\tau, s; A_\nu, \Gamma) &= \frac{y^{s/2}}{|-c_\mu\tau + a_\mu|^s} \cdot Q_s(A_\mu^{-1}\tau, A_\nu, \Gamma) \\ &= y^{s/2}\, Q_s(\tau, A_\nu A_\mu^{-1}, A_\mu \Gamma A_\mu^{-1}). \end{aligned}$$

Das Verhalten für $y \to \infty$ folgt aus [2], S. 42, Satz 3, nämlich

$$\lim_{y\to\infty} y^{-s/2} E(A_\mu^{-1}\tau, s; A_\nu, \Gamma) = 2\,\delta_{\mu\nu}$$

gleichmäßig in x ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots, N$; $\delta_{\mu\nu}$ ist das Kroneckersymbol). Zusammen mit (3) bedeutet das nach [3], S. 152—153 das Bestehen von Fourierentwicklungen der Art

$$\begin{aligned} E(A_\mu^{-1}\tau, s; A_\nu, \Gamma) &= b_{0,\mu\nu}(s)\, y^{1-s/2} + 2\,\delta_{\mu\nu}\, y^{s/2} + \\ &+ \sum_{n \neq 0} b_{n,\mu\nu}(s)\, y^{1/2} K_{\frac{s-1}{2}}(2\pi|n|\,y)\, e^{2\pi i n x} \end{aligned} \tag{4}$$

mit gewissen in $\operatorname{Re} s > 2$ analytischen Funktionen $b_{n,\mu\nu}(s)$.

Der Bereich $\operatorname{Re} s > 1$ wird durch (2) konform auf die längs $\lambda \geq \frac{1}{4}$ geschlitzte λ-Ebene abgebildet. Dem Bereich $\operatorname{Re} s > 2$ entspricht dabei das Äußere der Parabel $\lambda = t^2 + it$ $(-\infty < t < \infty)$. Wir werden oft die Variable λ

anstelle von s benutzen. Zur Bezeichnung dieses Überganges in einer gegebenen Funktion $f(\tau, s)$ vereinbaren wir die Schreibweise

$$f(\tau, s) = f(\tau; \lambda). \tag{5}$$

Bei der analytischen Fortsetzung werden wir im Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ der folgenden Funktionen $f(\tau)$ operieren (vgl. [4]).

$\mathfrak{H}$: 1) $f(\tau)$ ist definiert und Lebesguesch meßbar in der oberen Halbebene;
2) $f(\tau) = f(S\tau)$ für $S \in \Gamma$;
3) $\|f\| = \left(\int\limits_{\mathfrak{F}} |f(\tau)|^2 \omega\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Hierbei ist $\mathfrak{F}$ ein (meßbarer) Fundamentalbereich von Γ und $\omega = \dfrac{dx\,dy}{y^2}$ das invariante hyperbolische Flächenelement. $\|f\|$ heißt die Norm von f; das Skalarprodukt zweier Funktionen $f, g \in \mathfrak{H}$ ist durch

$$(f, g) = \int\limits_{\mathfrak{F}} f(\tau)\,\overline{g(\tau)}\,\omega$$

erklärt. Norm- und Skalarproduktbildung sind ausnahmslos auf das Argument τ der vorkommenden Funktionen zu beziehen.

Der formale Differentialoperator $-\Delta$ wird zu einem im Sinne der Operatorentheorie wesentlich selbstadjungierten Operator in $\mathfrak{H}$ (s. [5], Def. 2.11. [4], § 8), wenn wir $-\Delta$ speziell auf dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ betrachten, der aus folgenden Funktionen $u(\tau)$ besteht.

$\mathfrak{D}$: 1) $u(\tau) \in \mathfrak{H}$;
2) $u(\tau)$ ist zweimal stetig differenzierbar;
3) $-\Delta\, u(\tau) \in \mathfrak{H}$.

Das Spektrum von $-\Delta$ auf $\mathfrak{D}$ besteht aus folgenden reellen Zahlen λ (s. [4], § 10): $\lambda = 0$, $\lambda \geqq \frac{1}{4}$ und evtl. noch weiteren Zahlen $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, die sich höchstens bei $\frac{1}{4}$ häufen können. Die zu den letzteren λ gehörigen Eigenfunktionen haben gemäß [4], § 2 Fourierentwicklungen der Art

$$b_0 y^{1-s/2} + \sum_{n \neq 0} b_n\, y^{\frac{1}{2}}\, K_{\frac{s-1}{2}}(2\pi |n|\, y)\, e^{2\pi i n x}, \tag{6}$$

wobei b_0 insbesondere verschwinden kann und s aus dem Eigenwert λ vermöge (2) mit $\operatorname{Re} s > 1$ zu bestimmen ist.

Satz 1: *$E(\tau, s; A_\nu, \Gamma)$ läßt sich als analytische Funktion von s eindeutig in $\operatorname{Re} s > 1$ fortsetzen. Die in dieses Gebiet fallenden Singularitäten von $E(\tau, s; A_\nu, \Gamma)$ sind ein Pol erster Ordnung bei $s = 2$ und evtl. noch weitere Pole erster Ordnung im Intervall $1 < s < 2$. Das Residuum von E in $s = 2$ ist $4F^{-1}$, wobei $F = \int\limits_{\mathfrak{F}} \omega$ den hyperbolischen Flächeninhalt eines Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ von Γ bezeichnet, und eine Stelle in $1 < s < 2$ ist dann und nur dann Polstelle, wenn der aus (2) hinzubestimmte Wert λ ein Eigenwert von $-\Delta$ ist, zu dem eine in der Spitze ∞ nicht beschränkte Eigenfunktion existiert.*

Beweis: (4) zeigt, daß $E(\tau, s; A_\nu, \Gamma)$ nicht in $\mathfrak{H}$ liegt. Daran ist das für $\mu = \nu$ auftretende Glied $2y^{s/2}$ der Entwicklung schuld. Um unsere Betrachtungen trotzdem in $\mathfrak{H}$ durchführen zu können, bringen wir eine automorphe Hilfsfunktion in Abzug. Zuvor vereinfachen wir unsere Bezeichnungen, indem

wir folgende, die Allgemeinheit nicht einschränkende Voraussetzung machen: In dem zu Beginn eingeführten maximalen System $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ von inäquivalenten Spitzen sei $\tau_1 = \infty$, und die zugehörige Matrix A_1 sei die Einheitsmatrix. Das ist ja durch einfache Transformation von Γ zu erreichen. Wir schreiben dann $E(\tau, s)$ für $E(\tau, s; A_1, \Gamma)$ und betreiben nur noch die Fortsetzung von $E(\tau, s)$. Die Fourierentwicklung zur Spitze ∞ lautet

$$(7) \qquad \begin{aligned} E(\tau,s) &= b_0(s)\, y^{1-s/2} + 2\, y^{s/2} + \\ &+ \sum_{n \neq 0} b_n(s)\, y^{\frac{1}{2}} K_{\frac{s-1}{2}}(2\pi |n|\, y)\, e^{2\pi i n x}. \end{aligned}$$

Zur Definition der angekündigten automorphen Hilfsfunktion $\Phi(\tau, s)$ werde ein festes $Y > 1$ so groß gewählt, daß im Halbstreifen $0 \leqq x \leqq 1$, $y \geqq Y - 1$ nur die beiden vertikalen Randgeraden nach Γ äquivalent sind. Ist $\mathfrak{F}$ ein diesen Halbstreifen enthaltender Fundamentalbereich von Γ, so definieren wir – zunächst für $\tau \in \mathfrak{F}$ –

$$(8) \qquad \Phi(\tau, s) = \begin{cases} 2\, y^{s/2} & \text{für } y \geqq Y, \\ y^{s/2} q(y) & \text{für } Y - 1 \leqq y < Y, \\ 0 & \text{sonst in } \mathfrak{F}. \end{cases}$$

Hierbei sei $q(y)$ eine von s unabhängige, dreimal stetig differenzierbare Funktion von y mit $q(Y-1) = 0$ und $q(Y) = 2$, deren Ableitungen bis zur dritten Ordnung in diesen Punkten verschwinden. In den außerhalb $\mathfrak{F}$ gelegenen Teilen der oberen τ-Halbebene sei $\Phi(\tau, s)$ durch die Forderung der Invarianz bei Γ definiert. $\Phi(\tau, s)$ ist dann eine τ, s-stetige Funktion, die für festes τ eine ganze analytische Funktion in s und für festes s dreimal stetig differenzierbar nach x, y ist. Insbesondere merken wir an

$$(9) \qquad \Psi(\tau, s) = \Delta\, \Phi(\tau, s) + \lambda\, \Phi(\tau, s) \in \mathfrak{H}.$$

Denn nach der letzten Bemerkung ist diese Funktion stetig differenzierbar nach x, y, ferner automorph bezüglich Γ, und nach der ersten und der letzten Zeile von (8) zusammen mit (2) verschwindet sie identisch in der Nähe sämtlicher Spitzen. Ferner ist $\Psi(\tau, s)$ für festes τ eine ganze analytische Funktion in s. Die Differenz

$$(10) \qquad u(\tau, s) = E(\tau, s) - \Phi(\tau, s)$$

liegt nun offenbar in $\mathfrak{H}$. Wegen (3), (8) und (9) ist ferner

$$(11) \qquad \Delta\, u(\tau, s) + \lambda\, u(\tau, s) = -\, \Psi(\tau, s).$$

Im Gegensatz zu (10) ist die rechte Seite von (11) nicht nur für $\operatorname{Re} s > 2$ sinnvoll, sondern für alle s. Daher werden wir von jetzt an alle diejenigen s betrachten, für die eine einfache Auflösungstheorie der Gleichung (11) vorhanden ist. Das ist der Fall, wenn λ nicht zum Spektrum von $-\Delta$ auf $\mathfrak{D}$ gehört. Da insbesondere die Halbgerade $\lambda \geqq \frac{1}{4}$ zum Spektrum gehört und diese Halbgerade durch (2) auf $\operatorname{Re} s = 1$ abgebildet wird, erkennen wir hier einen Grund, weshalb das von uns eingeschlagene Fortsetzungsverfahren an der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ seine Grenze findet. Ein anderer Grund liegt darin, daß der Bestandteil $y^{1-s/2}$ des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (4) in $\operatorname{Re} s \leqq 1$ nicht mehr quadratisch integrierbar ist, so daß die Subtraktion

von Φ nicht mehr genügt, um von E nach $\mathfrak{H}$ zu gelangen. Wir werden die gewünschte Fortsetzung dadurch erreichen, daß wir $u(\tau, s)$ fortsetzen und sodann $E(\tau, s)$ durch (10) definieren.

Da sich das Spektrum von $-\Delta$ auf $\mathfrak{D}$ beim Übergang zur selbstadjungierten Fortsetzung nicht ändert (s. [4], S. 64, Def. 10; S. 56, Satz 22; S. 60, Satz 26), besteht die Resolventenmenge $\mathfrak{R}$ von $-\Delta$ auf $\mathfrak{D}$ (im Sinne von [5], Kap. IV, Def. 1) aus allen Zahlen λ, die nicht zum Spektrum gehören. $\mathfrak{R}$ ist eine offene, zusammenhängende Punktmenge der komplexen λ-Ebene. Bezeichnet G den mit der Greenschen Funktion $G(\tau, \tau')$ von $-\Delta$ auf $\mathfrak{D}$ als Kern gebildeten selbstadjungierten Integraloperator und I den identischen Operator, so existiert $(I - \lambda G)^{-1}$ für alle $\lambda \in \mathfrak{R}$ wegen des in [4], S. 36, Satz 11 ausgesprochenen Zusammenhanges zwischen $-\Delta$ und G und stellt für diese λ einen beschränkten symmetrischen Operator mit Definitionsbereich $\mathfrak{H}$ dar. Das Spektrum von G geht aus dem Spektrum von $-\Delta$ durch die Abbildung $\lambda \to \lambda^{-1}$ und durch Hinzunahme des Punktes $\lambda = 0$ (s. [4], Satz 10) hervor.

Wir benutzen jetzt die in (5) eingeführte Schreibweise und zeigen, daß (11) für $\lambda \in \mathfrak{R}$ genau eine Lösung $u(\tau, s)$ aus $\mathfrak{D}$ (s. S. 123) besitzt. Die Eindeutigkeit einer Lösung folgt bereits aus der Tatsache, daß λ kein Eigenwert von $-\Delta$ ist. Um die Existenz einer Lösung nachzuweisen, bestimmen wir zunächst Bedingungen, denen eine Lösung $u(\tau, s)$ genügen muß. Aus (11) folgt nach [4], S. 36, Satz 11:

$$u(\tau; \lambda) - (u(\tau; \lambda), F^{-1}) = G(\lambda\, u(\tau; \lambda) + \Psi(\tau; \lambda)). \tag{12}$$

In (12) stellt die rechte Seite zunächst nur ein Element aus $\mathfrak{H}$ dar, welches als Funktion von τ nur bis auf Mengen vom Maße 0 eindeutig definiert ist. Man erhält jedoch Eindeutigkeit punktweise in τ, wenn man beachtet, daß allgemein jedes Element Gf mit $f \in \mathfrak{H}$ gemäß [4], S. 25, Satz 7 durch die stetige Funktion $\int\limits_{\mathfrak{F}} G(\tau, \tau') f(\tau')\, \omega'$ dargestellt werden kann. Bei dieser Darstellung der rechten Seite von (12) kann (12) punktweise in τ gelesen werden. In dem eben genannten Sinne sollen auch alle übrigen Gleichungen verstanden werden, in denen Ausdrücke Gf mit $f \in \mathfrak{H}$ auftreten. Aus (12) folgt weiter

$$\begin{aligned} u - \lambda G u &= (u, F^{-1}) + G\, \Psi, \\ u &= (I - \lambda G)^{-1} ((u, F^{-1}) + G\, \Psi). \end{aligned} \tag{13}$$

Nun ist aber gemäß [4], Satz 10 $Gc = 0$ für $c = \text{const}$, d. h.

$$(I - \lambda G)\, c = c, \quad (I - \lambda G)^{-1} c = c.$$

Da ferner G und $(I - \lambda G)^{-1}$ vertauschbar sind, erhalten wir aus (13)

$$u = (u, F^{-1}) + G(I - \lambda G)^{-1}\, \Psi. \tag{14}$$

Aus (11) folgt (s. [4], S. 35, Satz 8)

$$\lambda(u, F^{-1}) = -(\Psi, F^{-1}). \tag{15}$$

Damit geht (14) über in

$$u(\tau; \lambda) = -\lambda^{-1} (\Psi(\tau; \lambda), F^{-1}) + G(J - \lambda G)^{-1}\, \Psi(\tau; \lambda). \tag{16}$$

Hier ist nach wie vor $\lambda \in \mathfrak{R}$.

Wir kehren jetzt die Schlußfolge um. (16) definiert für alle $\lambda \in \mathfrak{R}$ eine Funktion $u(\tau; \lambda)$. Da nach [4], Satz 10

$$(Gf, 1) = (f, G1) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{H}$$

gilt, folgt aus (16) die Gültigkeit von (15), und rückwärtsschließend gelangt man wieder zu (12). Aus (12) schließt man wie in [4], S. 32 ff unter Benutzung der stetigen Differenzierbarkeit von $\Psi(\tau; \lambda)$, daß $u(\tau; \lambda)$ zweimal stetig differenzierbar nach x, y ist. Nach dem zweiten Teil von [4], Satz 11 folgt dann (11). Definiert man sodann $E(\tau, s)$ durch (10), so erhält man aus (11) und (9) die Gleichung (3). Im Falle $\operatorname{Re} s > 2$ muß diese Funktion $E(\tau, s)$ mit der in (1) definierten Funktion übereinstimmen, da ja sonst (11) zwei verschiedene Lösungen $u \in \mathfrak{D}$ besitzen müßte im Widerspruch zu der Tatsache, daß λ für $\operatorname{Re} s > 2$ zu $\mathfrak{R}$ gehört. Als nächstes zeigen wir, daß die durch (16) definierte Lösung $u(\tau; \lambda)$ von (11) in $\mathfrak{R}$ regulär ist. Da $\Phi(\tau; \lambda)$ in der längs $\lambda \geqq \frac{1}{4}$ geschlitzten λ-Ebene regulär ist, wird damit die Regularität von $E(\tau; \lambda)$ in $\mathfrak{R}$ bewiesen sein. Das Glied $\lambda^{-1}(\Psi(\tau; \lambda), F^{-1})$ auf der rechten Seite von (16) ist in der längs $\lambda \geqq \frac{1}{4}$ geschlitzten Ebene regulär, abgesehen von einem Pol erster Ordnung in $\lambda = 0$. Daher brauchen wir nur noch die Regularität des zweiten Gliedes von (16), d. h. von

$$v(\tau; \lambda) = G(I - \lambda G)^{-1} \Psi(\tau; \lambda)$$

in $\mathfrak{R}$ zu zeigen. Für $\lambda, \lambda_0 \in \mathfrak{R}$ ist

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{v(\tau; \lambda) - v(\tau; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= G \frac{(I - \lambda G)^{-1} \Psi(\tau; \lambda) - (I - \lambda_0 G)^{-1} \Psi(\tau; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \\ &= G \frac{(I - \lambda G)^{-1} - (I - \lambda_0 G)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \Psi(\tau; \lambda) + G(I - \lambda_0 G)^{-1} \frac{\Psi(\tau; \lambda) - \Psi(\tau; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}, \end{aligned}$$

was wieder im Sinne der Bemerkung im Anschluß an (12) zu verstehen ist. Strebt hier $\lambda \to \lambda_0$, so strebt

$$\frac{\Psi(\tau; \lambda) - \Psi(\tau; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

im quadratischen Mittel gegen die Funktion $\frac{\partial \Psi(\tau; \lambda_0)}{\partial \lambda}$ aus $\mathfrak{H}$, da ja $\Psi(\tau; \lambda)$ in der Nähe der Spitzen von $\mathfrak{F}$ identisch verschwindet und nach Definition von $\Phi(\tau; \lambda)$ genügende Stetigkeitseigenschaften hat. Bei festem τ strebt also das zweite Glied von (17) für $\lambda \to \lambda_0$ gegen

$$G(I - \lambda_0 G)^{-1} \frac{\partial \Psi(\tau; \lambda_0)}{\partial \lambda}.$$

Das erste Glied von (17) ist gleich $G(I - \lambda G)^{-1}(I - \lambda_0 G)^{-1} \Psi(\tau; \lambda)$. Wie leicht zu sehen, strebt dies für $\lambda \to \lambda_0$ gegen $G(I - \lambda_0 G)^{-2} \Psi(\tau; \lambda_0)$. Mit der Existenz dieser Grenzwerte ist die Regularität von $v(\tau; \lambda)$ und damit auch von $E(\tau; \lambda)$ in $\mathfrak{R}$ bewiesen. Wir weisen das jetzt in Satz 1 behauptete Verhalten von $E(\tau, s)$ nach. Wegen (10) und des über $\Phi(\tau, s)$ Bekannten haben wir zu zeigen, daß $u(\tau, s)$ bei $s = 2$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $4 F^{-1}$ besitzt. Da das zweite Glied der rechten Seite von (16) bei $s = 2$, d. h. bei

$\lambda = 0$ offenbar regulär ist, ist

$$\text{(18)}\qquad \begin{aligned} \operatorname*{Res}_{s=2} u(\tau,s) &= \operatorname*{Res}_{s=2} -\frac{4}{s(2-s)}\,(\Psi(\tau,s), F^{-1}) \\ &= \operatorname*{Res}_{s=2} \frac{2}{s-2}\,(\Psi(\tau,s), F^{-1}). \end{aligned}$$

Hier ist nach (9) und (8) und der Definition von $q(y)$

$$\begin{aligned} (\Psi(\tau,s), 1) &= \int_0^1 \int_{Y-1}^{Y} \Delta\,\Phi(\tau,s)\,\omega + O(s-2) = \int_{Y-1}^{Y} \frac{d^2}{dy^2}\,(y^{s/2}\,q(y))\,dy + O(s-2) \\ &= (s/2\,y^{s/2-1}\,q(y) + y^{s/2}q'(y))\big|_{Y-1}^{Y} + O(s-2) \\ &= s\,Y^{s/2-1} + O(s-2) \text{ für } s\to 2. \end{aligned}$$

Damit folgt aus (18)

$$\operatorname*{Res}_{s=2} u(\tau,s) = \operatorname*{Res}_{s=2}\left(\frac{2}{s-2}\cdot s\,Y^{s/2-1}\cdot F^{-1}\right) = 4\,F^{-1}.$$

Am vollständigen Beweis von Satz 1 fehlt jetzt nur noch der Nachweis des Verhaltens von $E(\tau;\lambda)$ in denjenigen Stellen $0<\lambda<\frac{1}{4}$, welche Eigenwerte von $-\Delta$ sind. Es sei λ_0 ein solcher Eigenwert. Wegen (10) zeigt dort $u(\tau;\lambda)$ dasselbe Verhalten wie $E(\tau;\lambda)$. Da das erste Glied auf der rechten Seite von (16) in $0<\lambda<\frac{1}{4}$ regulär ist, genügt es, $G(I-\lambda G)^{-1}\,\Psi(\tau;\lambda)$ für $\lambda\to\lambda_0$ zu untersuchen. Es bezeichne $\mathfrak{M}_0$ den von den Eigenfunktionen zum Eigenwert λ_0 aufgespannten Unterraum von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}_1$ den zu $\mathfrak{M}_0$ senkrechten Unterraum von $\mathfrak{H}$. Wir zerlegen dann

$$\text{(19)}\qquad \Psi(\tau;\lambda) = \Psi_0(\tau;\lambda) + \Psi_1(\tau;\lambda),$$

wobei Ψ_0, Ψ_1 die Projektionen von Ψ auf $\mathfrak{M}_0$ bzw. $\mathfrak{M}_1$ bezeichnen. Die Einschränkung von $(I-\lambda G)^{-1}$ auf $\mathfrak{M}_1$ existiert noch für $\lambda=\lambda_0$ als beschränkter Operator in $\mathfrak{M}_1$, da λ_0 zur Resolventenmenge der Einschränkung von $-\Delta$ auf $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{D}$ gehört. Definieren wir $H(\lambda)$ als denjenigen beschränkten symmetrischen Operator mit Definitionsbereich $\mathfrak{H}$, der in $\mathfrak{M}_1$ mit $(I-\lambda G)^{-1}$ übereinstimmt und in $\mathfrak{M}_0$ identisch verschwindet, so gilt

$$H(\lambda) - H(\lambda_0) = (\lambda-\lambda_0)\,H(\lambda)\,H(\lambda_0)$$

und ferner

$$H(\lambda_0)\,\Psi_1(\tau;\lambda) = H(\lambda_0)\,\Psi(\tau;\lambda).$$

Damit ist wie auf S. 126 zu schließen, daß $G(I-\lambda G)^{-1}\,\Psi_1(\tau;\lambda)$ im Punkte $\lambda=\lambda_0$ regulär ist. Nun zu $G(I-\lambda G)^{-1}\,\Psi_0(\tau;\lambda)$. Nach [4], S. 40, Satz 13 ist $\lambda_0 G\,\Psi_0 = \Psi_0$, also für $\lambda\in\mathfrak{R}$

$$\text{(20)}\qquad \begin{aligned} \lambda\,G\,\Psi_0 &= \Psi_0 + (\lambda-\lambda_0)\,\lambda_0^{-1}\,\Psi_0, \\ (I-\lambda G)^{-1}\,\Psi_0 &= (\lambda_0-\lambda)^{-1}\lambda_0\,\Psi_0, \\ G(I-\lambda G)^{-1}\,\Psi_0 &= (\lambda_0-\lambda)^{-1}\,\Psi_0. \end{aligned}$$

Falls nun alle zu λ_0 gehörigen Eigenfunktionen in der Spitze ∞ beschränkt sind, d. h. b_0 in (6) verschwindet, so ist $\Psi_0 = 0$, da Ψ von x unabhängig ist und innerhalb $\mathfrak{F}$ nur in dem Rechteck $0\le x\le 1$, $Y-1\le y\le Y$ von 0

verschieden ist. In diesem Fall ist dann $G(I - \lambda G)^{-1}\Psi_0 = 0$. Falls aber eine in der Spitze ∞ nicht beschränkte Eigenfunktion $z(\tau)$ zum Eigenwert λ_0 existiert, so ist $\Psi_0(\tau;\lambda)$ nicht identisch gleich 0. Denn das Skalarprodukt von $z(\tau)$ mit $\Psi(\tau;\lambda_0)$ ist

$$(z, \Psi) = \int_0^1 \int_{Y-1}^{Y} z(\tau)\,\overline{\Psi(\tau;\lambda_0)}\,\omega = \int_0^1 \int_{Y-1}^{Y} z\,(\overline{\Delta\Phi + \lambda_0\Phi})\,\omega$$

$$= \int_0^1 z(\tau)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dx\,\Big|_{y=Y-1}^{y=Y} + \int_0^1\int_{Y-1}^{Y} (\Delta z + \lambda_0 z)\,\Phi\,\omega.$$

Das letzte Glied ist 0 wegen $\Delta z + \lambda_0 z = 0$, während das vorletzte Integral nach (6), (8) und der Definition von $q(y)$ gleich

$$b_0 Y^{1-s_0/2}\cdot\tfrac{1}{2}s_0\cdot Y^{s_0/2-1}\cdot 2 = s_0 b_0 \neq 0$$

ist, da ja $\operatorname{Re} s_0 > 1$ und wegen der Unbeschränktheit von $z(\tau)$ der Koeffizient $b_0 \neq 0$ ist. Zusammen mit dem Vorangehenden ergibt dies die letzte Behauptung von Satz 1.

Satz 2: *Ist* $\operatorname{Re} s_0 > 1$ *und* s_0 *eine Regularitätsstelle von* $E(\tau,s)$, *so erfüllt* $E(\tau,s_0)$ *die Differentialgleichung* (3), *und* $E(\tau,s)$ *ist bei* $s = s_0$ *eine* τ,s*-stetige Funktion.*

Beweis: Der zu s_0 gehörige Wert $\lambda_0 = \dfrac{s_0(2-s_0)}{4}$ gehört nach Satz 1 entweder zur Resolventenmenge $\mathfrak{R}$ von $-\Delta$ oder er ist ein Eigenwert von $-\Delta$ im Intervall $0 < \lambda_0 < \frac{1}{4}$, und die zugehörigen Eigenfunktionen sind in der Spitze ∞ sämtlich beschränkt. Im ersten Fall ist (3) nach Konstruktion von $E(\tau,s)$ erfüllt. Im zweiten Fall kann $u(\tau;\lambda)$ zwar nicht mehr durch (16) definiert werden, da $(I-\lambda_0 G)^{-1}$ nicht mehr sinnvoll ist, aber wie wir am Ende des Beweises von Satz 1 gesehen, ist in (19) $\Psi_0 = 0$ und also $\Psi \in \mathfrak{M}_1$, so daß (16) dasselbe besagt wie

$$u(\tau;\lambda) = -\lambda^{-1}(\Psi(\tau;\lambda), F^{-1}) + G\,H(\lambda)\,\Psi(\tau;\lambda) \tag{21}$$

mit $H(\lambda)$ von S. 127. (21) liefert für $\lambda = \lambda_0$ die analytische Fortsetzung von $u(\tau;\lambda)$ in λ_0 hinein. Aus (21) folgt aber (13) in der abgeänderten Form

$$u(\tau;\lambda_0) = H(\lambda_0)\,((u, F^{-1}) + G\,\Psi(\tau;\lambda_0)).$$

Nach Definition von $H(\lambda_0)$ folgen hieraus (12) und (11) mit s_0, λ_0 anstelle von s, λ. Wegen (10) bedeutet das aber, daß die Fortsetzung $E(\tau,s_0)$ die Differentialgleichung (3) mit s_0, λ_0 anstelle von s, λ erfüllt.

Beim Beweis der τ,s-Stetigkeitsaussage des Satzes beschränken wir uns auf den Fall, daß $\lambda_0 = \dfrac{s_0(2-s_0)}{4}$ kein Eigenwert von $-\Delta$ ist. Denn die folgenden Betrachtungen lassen sich leicht auf den übrigbleibenden Fall übertragen, wobei wieder $H(\lambda)$ die Rolle von $(I-\lambda G)^{-1}$ übernimmt. Nach (10) und (16) genügt es, die Behauptung für

$$v(\tau,s) = G(I-\lambda G)^{-1}\Psi(\tau,s)$$

anstelle von $E(\tau,s)$ zu beweisen. Es ist

$$\begin{aligned} v(\tau_1,s_1)-v(\tau_0,s_0) = G(I-\lambda_1 G)^{-1}\,[\Psi(\tau_1,s_1)-\Psi(\tau_1,s_0)] + \\ + G\,[(I-\lambda_1 G)^{-1}-(I-\lambda_0 G)^{-1}]\,\Psi(\tau_1,s_0) + \\ + G(I-\lambda_0 G)^{-1}\,[\Psi(\tau_1,s_0)-\Psi(\tau_0,s_0)]. \end{aligned}$$

Hierbei sind die Argumente τ_0, τ_1 anstelle von τ in den Funktionen erst nach Ausübung der davorstehenden Operatoren eingetragen zu denken. Wegen

$$\overline{Gf(\tau_1)} = (G(\tau_1,\tau), f(\tau))$$

ist dann

$$\begin{aligned} |v(\tau_1,s_1)-v(\tau_0,s_0)| \leq |(G(\tau_1,\tau), (I-\lambda_1 G)^{-1}\,[\Psi(\tau,s_1)-\Psi(\tau,s_0)])| + \\ + |(G(\tau_1,\tau), [(I-\lambda_1 G)^{-1}-(I-\lambda_0 G)^{-1}]\,\Psi(\tau,s_0))| + \\ + |(G(\tau_1,\tau)-G(\tau_0,\tau), (I-\lambda_0 G)^{-1}\,\Psi(\tau,s_0))|. \end{aligned} \tag{22}$$

Dies schätze man mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung ab. Beachtet man, daß nach [4], (41) und (42) $\|G(\tau_1,\tau)\|$ beschränkt ist, wenn τ_1 in der Nachbarschaft von τ_0 variiert, und daß

$$\lim_{\tau_1\to\tau_0} \|G(\tau_1,\tau)-G(\tau_0,\tau)\| = 0$$

ist, so erhält man leicht, daß die rechte Seite von (22) für $\tau_1\to\tau_0$, $s_1\to s_0$ nach 0 strebt.

Literatur

[1] Petersson, H.: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, I. Math. Ann. 115, 23—67 (1938). — [2] Petersson, H.: Über den Bereich absoluter Konvergenz der Poincaréschen Reihen. Acta Math. 80, 23—63 (1948). — [3] Maass, H.: Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen . . . . Math. Ann. 121, 141—183 (1949). — [4] Roelcke, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Sitzber. Heidelbg. Akad. Wiss. (1956), 4. Abh. — [5] Stone: Linear Transformations in Hilbert Space. New York 1932.

(Eingegangen am 8. September 1955)

van der Waerden, B. L.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 130—133 (1956)

Berichtigung und Ergänzung zur Arbeit „Die Cohomologietheorie der Polyeder", Math. Ann. Bd. 130, S. 87 (1955)

Von

B. L. van der Waerden in Zürich

Der nachfolgende § 9 enthält eine Berichtigung, § 10 eine Ergänzung und § 11 eine Präzisierung der oben genannten Arbeit.

§ 9. Bessere Definition der Verbindungskette

Wie in § 3 der genannten Arbeit gezeigt wurde, genügt es für den Beweis der Homologie (12) § 3, zu jedem Term b_q eine $(q+1)$-Kette θb_q zu konstruieren, die der Verbindungsregel (10) genügt. Ist $b_q = s_{(0)} s_{(1)} \ldots s_{(q)}$ und sind die Ecken $s_{(k)}$ von b_q zufällig gerade in dieser Reihenfolge Schwerpunkte von Simplices von K von nicht abnehmender Dimension, so ist die durch (6) § 3 definierte „Verbindungskette" $v b_q$ eine Summe von „gemischten Termen" im Sinne von § 2 und infolgedessen ist die „unterteilte Verbindungskette" $\theta b_q = \sigma v b_q$ tatsächlich eine Kette von σK. Ist aber b_q ein Term, dessen Ecken in einer anderen Reihenfolge hingeschrieben sind, so braucht das nicht der Fall zu sein. (Auf diese Tatsache hat mich T. van Aardenne-Ehrenfest hingewiesen.) Ist z. B. $b_q = s_{012} s_1$ und wird e_0 als simpliziale Approximation von s_{012} gewählt, so ist nach (6) § 3

$$v b_q = e_0 s_{012} s_1 - e_0 e_1 s_1 ,$$

und hier ist $e_0 e_1 s_1$ z. B. kein „gemischter Term" im Sinne von § 2, da die Menge $\{0,1\}$ nicht in der Menge $\{1\}$ enthalten ist. Ferner wird

$$\theta b_q = \sigma v b_q = s_0 s_{012} s_1 - s_0 s_{01} s_1 + s_1 s_{10} s_1 ;$$

folglich ist θb_q nicht eine Kette von σK, da s_1 und s_0 nicht beide einem und demselben Simplex Y^p angehören können.

Die Verbindungskette θb_q soll jetzt anders definiert werden, wobei die „gemischten Terme" ganz entbehrlich werden. Für die neue Verbindungskette wird der Beweis der Verbindungsregel (10) § 3 sehr einfach.

In § 3 ist der Text zwischen Formel (5) und Formel (12) zu ersetzen durch das Folgende.

Im Pflasterlemma wird die Kette c zuerst unterteilt und dann approximiert. Wird aber ein Zykel z_p von σK zuerst auf K simplizial approximiert und dann baryzentrisch unterteilt, so erhält man einen Zykel $\sigma \tau z_p$, von dem wir zeigen werden, daß er zu z_p homolog ist. Wir werden nämlich zu jedem Zykel $z_p = \Sigma b_p \gamma$ (wobei die γ ganze Zahlen oder Elemente von Γ sein können) eine *Verbindungskette* θz_p konstruieren, mit folgenden Eigenschaften:

1. θz_p ist eine $(p+1)$-Kette auf σK.
2. θz_p ist eine lineare Funktion der Koeffizienten des Zykels z_p.
3. Wenn z_p auf einem Simplex X von K liegt, so liegt θz_p auch auf X.
4. Der Rand von θz_p ist $z_p - \sigma \tau z_p$:

$$\partial \theta z_p = z_p - \sigma \tau z_p . \tag{6}$$

Wir beweisen die Existenz von θz_p durch vollständige Induktion nach p, indem wir zunächst für jeden einzelnen Term b_p die Verbindungskette θb_p als ganzzahlige $(p+1)$-Kette auf σK definieren und die Formel

$$\partial \theta b_p = b_p - \sigma \tau b_p - \theta \partial b_p \tag{7}$$

beweisen. Ist dann $c = \Sigma b_p \gamma$ irgendeine p-Kette auf σK, so setzen wir

$$\theta c = \Sigma (\theta b_p) \gamma . \tag{8}$$

Aus (7) folgt dann durch Multiplikation mit γ und Addition

$$\partial \theta c = c - \sigma \tau c - \theta \partial c . \tag{9}$$

Ist insbesondere c ein Zykel z_p, so hebt sich das letzte Glied rechts weg, und man erhält (6).

Es handelt sich also nur noch darum, θb_p als ganzzahlige $(p+1)$-Kette auf σK so zu definieren, daß 3. (mit b_p statt z_p) und (7) erfüllt sind, wobei für ganzzahlige Zykel z_{p-1} die Gültigkeit von (6) als Induktionsvoraussetzung angenommen werden darf.

Der Fall $p = 0$ ist leicht. In diesem Fall ist b_p eine Ecke s von σK, und $\sigma \tau s = \tau s = e$ ist die approximierende Ecke zu s. Man braucht dann nur für θb_p den Term $e s$ zu nehmen, um (7) zu erfüllen. Das Glied $-\theta \partial b_p$ rechts in (7) fällt natürlich weg, da ein Punkt keinen Rand hat.

Für $p > 0$ verwenden wir eine Projektionsmethode, die Alexander und andere zum gleichen Zwecke schon angewandt haben. Unter den Ecken von b_p wählen wir eine, s, die Schwerpunkt eines X^r von der höchsten vorkommenden Dimension r ist. Dann liegen alle Ecken von b_p auf X^r. Der Rand ∂b_p ist ein ganzzahliger Zykel z_{p-1}. Zu ihm gibt es also nach der Induktionsvoraussetzung eine Verbindungskette

$$\theta z_{p-1} = \theta \partial b_p ,$$

die auf X^r liegt und die Eigenschaft (6) hat:

$$\begin{aligned} \partial \theta z_{p-1} = z_{p-1} - \sigma \tau z_{p-1} &= \partial b_p - \sigma \tau \partial b_p \\ &= \partial (b_p - \sigma \tau b_p) . \end{aligned}$$

Also hat die Kette

$$d_p = b_p - \sigma \tau b_p - \theta z_{p-1} = b_p - \sigma \tau b_p - \theta \partial b_p$$

den Rand Null. Unsere Aufgabe besteht darin, eine Verbindungskette θb_p auf σX^r zu konstruieren, deren Rand genau gleich d_p ist.

Um das zu erreichen, projizieren wir d_p aus dem Punkt s, dem Schwerpunkt von X^r. Unter der Projektion eines Termes t_p aus s versteht man einfach den Term $s t_p$. Wenn t_p ein Term von σX^r ist, ist $s t_p$ es auch. Der Rand

von $s\,t_p$ ist

(10) $$\partial\,(s\,t_p) = t_p - s(\partial\,t_p)\,.$$

Die Projektion der ganzzahligen Kette $d_p = \Sigma\, t_p\, \beta$ aus s wird durch

$$s\,d_p = \Sigma\,(s\,t_p)\,\beta$$

definiert. Die Formel (10) überträgt sich auf $s\,d_p$:

(11) $$\partial\,(s\,d_p) = d_p - s(\partial\,d_p)\,.$$

Ist d_p insbesondere ein Zykel, so fällt das letzte Glied weg, und man erhält

$$\partial\,(s\,d_p) = d_p = b_p - \sigma\,\tau\,b_p - \theta\,\partial\,b_p\,.$$

Setzt man also $\theta\,b_p = s\,d_p$, so ergibt sich die Formel (7). Aus ihr folgen, wie angegeben, (9) und (6). Damit ist die Induktion vollständig.

Aus (6) folgt die Homologie

(12) $$z_p \sim \sigma\,\tau\,z_p\,.$$

Hier schließt sich der ursprüngliche Text (S. 93, Mitte) wieder an.

§ 10. Die Isomorphie der geordneten zur alternierenden Homologiegruppe

Als Ergänzung möge hier ein einfacher Beweis der Isomorphie

$$H_p(K) \cong H_{*p}(K)$$

angegeben werden.

Wenn die Ecken von K irgendwie geordnet werden, so kann man bei jedem Simplex von der *ersten Ecke* reden, die den anderen in der Ordnung vorangeht. Sodann kann man den Komplex *pro forma baryzentrisch unterteilen*, indem man jedem Simplex X^p als „Schwerpunkt" s seine erste Ecke zuordnet:

$$s_{01\ldots p} = e_0\,.$$

Jeder Term a_p von K ergibt bei der pro-forma Unterteilung eine ganzzahlige Kette $\bar\sigma\,a_p$, die analog zu (1) § 2 definiert wird:

(1) $$\bar\sigma\,a_p = \Sigma\, s_{0'}\, s_{0'1'} \ldots s_{0'1'\ldots p'}\ \mathrm{sign}\,(0'1'\ldots p')$$

Die Formeln (2)—(4) § 2 übertragen sich ohne weiteres auf diese pro-forma Unterteilung:

(2) $\bar\sigma\,a_p = 0,$ wenn a_p ausgeartet

(3) $\bar\sigma\,\pi\,a_p = \bar\sigma\,a_p \cdot \mathrm{sign}\,\pi,$ wenn a_p nicht ausgeartet

(4) $\partial\,\bar\sigma\,a_p = \bar\sigma\,\partial\,a_p\,.$

Die durch (1) definierte Operation $\bar\sigma$ (sie ist natürlich mit der früheren $\tau\,\sigma$ identisch) bildet also die alternierende Kettengruppe C_{*p} von K in die volle Kettengruppe C_p von K ab. Dabei gehen Zykel wegen (4) in Zykel über; $\bar\sigma$ bildet also Z_{*p} in Z_p ab. Ferner gehen nullhomologe Zykel nach (4) in nullhomologe über; $\bar\sigma$ bildet also H_{*p} in H_p ab.

Definiert man nun $\theta\, b_\nu$ wie in § 9 rekursiv durch Projektion von $b_\nu - \bar{\sigma}\, b_\nu - \theta\, \partial\, b_\nu$ aus dem Schwerpunkt von b_ν, so gilt die zu (7) § 9 analoge Verbindungsregel

$$\theta\, b_\nu = b_\nu - \bar{\sigma}\, b_\nu - \theta\, \partial\, b_\nu\,. \tag{5}$$

Durch Summation erhält man für Zykel z_ν die Formel

$$\partial\, \theta\, z_\nu = z_\nu - \bar{\sigma}\, z_\nu \tag{6}$$

und daraus die Homologie

$$z_\nu \sim \bar{\sigma}\, z_\nu\,. \tag{7}$$

Aus (7) folgt direkt, daß $H_{*\nu}$ durch $\bar{\sigma}$ *auf* H_ν abgebildet wird. Weiter sieht man, daß die Abbildung isomorph ist. Ist nämlich $\bar{\sigma}\, z_\nu \sim 0$, so folgt daraus nach (7) $z_\nu \sim 0$, also $z_{*\nu} \sim 0$.

Damit ist die Isomorphie $H_\nu \cong H_{*\nu}$ bewiesen.

§ 11. Voraussetzungen über die Topologie von T

Die Topologie des Polyeders T wurde in meiner Arbeit nicht genau definiert, sondern es wurde nur verlangt, daß die offenen Simplexsterne des Komplexes K offene Mengen von T sind (S. 89). Auf S. 101 im Beweis des Satzes 8 muß aber etwas mehr vorausgesetzt werden, damit der Beweis richtig wird. Es heißt dort: „Es sei ... S der Stern von s in der baryzentrischen Unterteilung von $\sigma' K$. Dann ist der Durchschnitt von U mit S eine Umgebung V der verlangten Art". Dieser Schluß beruht offenbar auf der Annahme (A), *daß der zur Ecke s gehörige offene Simplexstern S der Unterteilung $\sigma\,\sigma' K$ immer eine Umgebung von s ist.*

Ob diese Annahme erfüllt ist, das hängt von der Topologie von T und der Konstruktion von $\sigma' K$ ab. Unter allen Topologien von T, die mit der Topologie der einzelnen Simplices X verträglich sind, gibt es eine *schwächste Topologie*[1]), die so definiert wird: *Offene Mengen auf T sind diejenigen, deren Durchschnitt mit jedem abgeschlossenen Simplex X stets eine offene Menge auf X ist.*

Für diese schwächste Topologie ist die Voraussetzung (A) offenbar immer erfüllt. In diesem Fall ist also alles in Ordnung. Auch im Fall eines lokal endlichen Komplexes ist die Voraussetzung (A) immer erfüllt.

In anderen Fällen muß man vorsichtiger sein. Bei der „metrischen Topologie" von Eilenberg-Steenrod[1]) hängt es von der Konstruktion der Unterteilung $\sigma' K$ ab, ob (A) erfüllt ist oder nicht. Man kann, wenn die lokale Dimension von T in jedem Punkte endlich ist, die Unterteilung $\sigma' K$ immer so einrichten, daß (A) erfüllt ist. Ob dasselbe allgemein für jede Topologie gilt, weiß ich nicht. Wichtig scheint mir diese Frage nicht.

(Eingegangen am 29. Mai 1956)

---

[1]) Weak topology nach S. Eilenberg and N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, p. 75. Mein Satz 6 (§ 7) ist dort, wie ich erst jetzt bemerke, als Exercise 5 formuliert.

KLINGEN, H.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 134—144 (1956)

Über die analytischen Abbildungen verallgemeinerter Einheitskreise auf sich

Von

HELMUT KLINGEN in Göttingen

Es werden Bereiche $\mathfrak{E}_{pq}$ in pq komplexen Dimensionen behandelt. Bezeichnet man mit $E^{(q)}$ die q-reihige Einheitsmatrix, mit Z die p-zeilige und q-spaltige Koordinatenmatrix und mit $\tilde{\bar{Z}} = \bar{Z}'$ die zu Z konjugiert komplexe transponierte Matrix, so besteht $\mathfrak{E}_{pq}$ aus allen Punkten Z, für welche die hermitische Matrix $E^{(q)} - \tilde{\bar{Z}}Z$ positiv definit ist. In der Bezeichnungsweise von E. CARTAN [1][1]) ist $\mathfrak{E}_{pq}$ beschränkt und symmetrisch. Für $p = q = 1$ erhält man den gewöhnlichen Einheitskreis. In einer früheren Arbeit [2] wurden die umkehrbar eindeutigen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf sich für den Fall $p = q$ behandelt. Die volle Gruppe dieser Abbildungen lautet:

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \tag{1}$$

$$W = (AZ' + B)(CZ' + D)^{-1} \tag{2}$$

mit konstanten p-reihigen Matrizen A, B, C, D, welche Lösungen der Gleichung

$$\widetilde{\overline{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}}\, K \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = K, \quad K = \begin{pmatrix} -E^{(p)} & 0 \\ 0 & E^{(p)} \end{pmatrix}$$

sind. In der vorliegenden Note wird die volle Gruppe der eineindeutigen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf sich für $p \neq q$ aufgestellt. Im ersten Teil schließt man mit funktionentheoretischen Methoden ähnlich wie im Falle $p = q$ oder in der symplektischen Geometrie [3], daß die Abbildungen mit dem Fixpunkt Null linear sind. Der zweite Teil der Untersuchung ist algebraischer Natur und erfordert andersartige und langwierigere Betrachtungen als im Fall $p = q$. Insbesondere wird dabei das frühere Resultat für $p = q$ benutzt. Es stellt sich heraus, daß für $p \neq q$ die (1) entsprechenden Abbildungen bereits die volle Gruppe der umkehrbar eindeutigen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf sich ausmachen; es gibt also kein Analogon zu den Abbildungen (2). Mit Hilfe dieses Ergebnisses lassen sich die Bereiche $\mathfrak{E}_{pp}$ durch eine gewisse Symmetrieeigenschaft unter allen Bereichen $\mathfrak{E}_{pq}$ charakterisieren.

Zur Erläuterung der Bezeichnungen seien einige Bemerkungen vorausgeschickt. Für Matrizen werden große lateinische und für Spaltenvektoren kleine deutsche Buchstaben verwendet. E sei die Einheits- und 0 die Null-

---

[1]) Siehe Literaturverzeichnis

matrix. Falls die Zeilenanzahl r und die Spaltenanzahl s einer Matrix A nicht aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, werde $A^{(r,s)}$ geschrieben. Der Einfachheit halber sei weiter verabredet, gleichlautende Doppelindizes durch einen einfachen Index zu ersetzen, $z_{11}=z_1$, $A^{(r,r)}=A^{(r)}$, $\mathfrak{E}_{pp}=\mathfrak{E}_p$ usw. Ferner werden noch die Abkürzungen $A\{B\}$ für $\tilde{B}AB$, $D=[d_1,\ldots,d_n]$ für eine Diagonalmatrix D mit den Diagonalelementen $d_1,\ldots,d_n$, $|A|$ für die Determinante von A und $H>0$ für eine positiv definite hermitische Matrix H verwendet.

Man betrachte für natürliche Zahlen p,q die $(p+q)$-reihige Matrix

$$K_{pq}=\begin{pmatrix}-E^{(p)} & 0\\ 0 & E^{(q)}\end{pmatrix}$$

und die Gruppe Ω_{pq} aller komplexen Lösungen M der Matrizengleichung

$$K_{pq}\{M\}=K_{pq}\,. \tag{3}$$

Setzt man

$$M=\begin{pmatrix}A^{(p)} & B^{(p,q)}\\ C^{(q,p)} & D^{(q)}\end{pmatrix},$$

so ist (3) gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$\tilde{A}A-\tilde{C}C=E^{(p)},\quad \tilde{D}D-\tilde{B}B=E^{(q)},\quad \tilde{A}B=\tilde{C}D \tag{4}$$

oder wegen $K_{pq}\{\tilde{M}\}=K_{pq}$ mit

$$A\tilde{A}-B\tilde{B}=E^{(p)},\quad D\tilde{D}-C\tilde{C}=E^{(q)},\quad A\tilde{C}=B\tilde{D}\,. \tag{5}$$

Mit den Matrixvariablen $X^{(p,q)}$, $Y^{(q)}$ betrachte man die Abbildung

$$\begin{cases}X_1=AX+BY\\ Y_1=CX+DY\end{cases},\quad M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\Omega_{pq}\,. \tag{6}$$

Dabei ist der Ausdruck $\tilde{Y}Y-\tilde{X}X$ invariant; denn nach (4) gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_1Y_1-\tilde{X}_1X_1&=(\tilde{X}\tilde{C}+\tilde{Y}\tilde{D})(CX+DY)-(\tilde{X}\tilde{A}+\tilde{Y}\tilde{B})(AX+BY)\\ &=\tilde{Y}(\tilde{D}D-\tilde{B}B)Y+\tilde{X}(\tilde{C}C-\tilde{A}A)X+\\ &\quad+\tilde{Y}(\tilde{D}C-\tilde{B}A)X+\tilde{X}(\tilde{C}D-\tilde{A}B)Y\\ &=\tilde{Y}Y-\tilde{X}X\,.\end{aligned}$$

Insbesondere wird also der durch $\tilde{Y}Y-\tilde{X}X>0$ charakterisierte Bereich durch (6) auf sich abgebildet. Dort ist $|Y|\neq 0$, und es lassen sich die „inhomogenen Koordinaten“ $Z=XY^{-1}$, $W=X_1Y_1^{-1}$ einführen. Schreibt man (6) auf diese Koordinaten um, so erhält man in

$$W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1},\quad M\in\Omega_{pq} \tag{7}$$

eine Gruppe Ω_{pq}^{*} umkehrbar eindeutiger analytischer Abbildungen des Bereiches $E^{(q)}-\tilde{Z}Z>0$ auf sich. Dieser Bereich $\mathfrak{E}_{pq}$ läßt sich auch durch $E^{(p)}-Z\tilde{Z}>0$ beschreiben. Die Gleichwertigkeit der beiden Bedingungen

$E^{(q)} - \tilde{Z}Z > 0$ und $E^{(p)} - Z\tilde{Z} > 0$ folgt aus der Identität

$$\begin{pmatrix} E^{(p)} & 0 \\ 0 & E^{(q)} - \tilde{Z}Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{(p)} - Z\tilde{Z} & 0 \\ 0 & E^{(q)} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} E^{(p)} & -Z \\ \tilde{Z} & E^{(q)} - \tilde{Z}Z \end{pmatrix} \right\},$$

da die transformierende Matrix wegen

$$\begin{pmatrix} E^{(p)} & -Z \\ \tilde{Z} & E^{(q)} - \tilde{Z}Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{(p)} - Z\tilde{Z} & Z \\ -\tilde{Z} & E^{(q)} \end{pmatrix} = E$$

nicht ausgeartet ist.

Die Gruppe Ω^*_{pq} ist transitiv auf $\mathfrak{E}_{pq}$. Sei nämlich $Z_0 \in \mathfrak{E}_{pq}$ vorgegeben. Man bestimme die Matrizen $A^{(p)}$, $B^{(p,q)}$, $C^{(q,p)}$, $D^{(q)}$ derart, daß

$$(E^{(p)} - Z_0\tilde{Z}_0)\{\tilde{A}\} = E^{(p)}, \quad (E^{(q)} - \tilde{Z}_0 Z_0)\{\tilde{D}\} = E^{(q)},$$

$$C = -D\tilde{Z}_0, \qquad B = -A Z_0$$

gilt. Dann sind die Gleichungen (5) erfüllt, also ist

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Omega_{pq}.$$

und wegen $B = -A Z_0$ führt die Abbildung $W = (A Z + B)(C Z + D)^{-1}$ den Punkt $Z = Z_0$ in $W = 0$ über.

Wir wollen zeigen, daß für $p \neq q$ die Gruppe Ω^*_{pq} die volle Gruppe der eineindeutigen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf sich ist. Wegen der nachgewiesenen Transitivität von Ω^*_{pq} genügt es, die Abbildungen mit dem Fixpunkt 0 zu betrachten. Bei einer derartigen Abbildung ist in (7) $B = 0$ und wegen (5) $C = 0$, $A = U_1$, $D = U_2^{-1}$ unitär. Folglich lauten die Abbildungen aus Ω^*_{pq} mit dem Fixpunkt 0:

$$W = U_1 Z U_2$$

mit beliebigen konstanten unitären Matrizen $U_1^{(p)}$, $U_2^{(q)}$. Ferner kann man sich auf den Fall $p < q$ beschränken. Denn durch

$$Z^{(p,q)} \to Z_1 = Z'$$

wird eine umkehrbar eindeutige analytische Abbildung mit dem Fixpunkt 0 von $\mathfrak{E}_{pq}$ im Z-Raum auf $\mathfrak{E}_{qp}$ im Z_1-Raum vermittelt. Jeder Abbildung von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf sich mit dem Fixpunkt 0 im Z-Raum entspricht vermöge dieser Zuordnung eine derartige Abbildung von $\mathfrak{E}_{qp}$ auf sich im Z_1-Raum. Setzt man das angekündigte Ergebnis für $p < q$ als richtig voraus, so gilt für $p > q$ und jede solche Abbildung

$$W_1 = U_1^{(q)} Z_1 U_2^{(p)}$$

mit unitären U_1, U_2. Der Übergang zum Transponierten ergibt als einzige eineindeutige analytische Abbildungen von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf sich mit dem Fixpunkt 0:

$$W = U_2' Z U_1'$$

mit konstanten unitären Matrizen U_1, U_2.

Bevor wir mit dem funktionentheoretischen Teil der Untersuchung beginnen, werde der folgende Hilfssatz hergeleitet.

Hilfssatz 1: *Es sei $Z^{(p,q)}$ eine vorgegebene komplexe Matrix, $p \leq q$, und $r_1, \dots, r_p$ seien die Eigenwerte von $Z\tilde{Z}$ in irgendeiner vorgegebenen Reihenfolge. Dann gibt es unitäre Matrizen $U_1^{(p)}$, $U_2^{(q)}$ mit*

$$U_1 Z U_2 = ([r_1^{1/2}, \dots, r_p^{1/2}]\, 0^{(p,q-p)}).$$

Beweis: Z habe den Rang s. Nach den Sätzen über lineare Gleichungssysteme gibt es zunächst ein unitäres $V^{(q)}$, so daß

$$Z V = (Z_1^{(p,s)}\, 0^{(p,q-s)}),$$

und ferner ein unitäres $U^{(p)}$, so daß

$$U Z_1 = \begin{pmatrix} Z_2^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird. Also ist

$$U Z V = \begin{pmatrix} Z_2^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |Z_2| \neq 0.$$

Die Eigenwerte von $Z_2\tilde{Z}_2$ seien $r_1, \dots, r_s$, und es sei $R = [r_1^{1/2}, \dots, r_s^{1/2}]$. Man bestimme $U_3^{(s)}$, so daß $Z_2\tilde{Z}_2 = R^2\{U_3\}$ ist, und setze $U_4 = Z_2^{-1}\tilde{U}_3 R$. Dann ist U_4 unitär, und mit

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_3^{(s)} & 0 \\ 0 & E^{(p-s)} \end{pmatrix} U, \quad U_2 = V \begin{pmatrix} U_4^{(s)} & 0 \\ 0 & E^{(q-s)} \end{pmatrix}$$

folgt die Behauptung. Durch reelle orthogonale Transformation läßt sich die Reihenfolge der Elemente $r_1, \dots, r_p$ beliebig abändern.

Mit funktionentheoretischen Methoden erhält man zunächst folgendes Teilergebnis.

Hilfssatz 2: *Jede eineindeutige analytische Abbildung von $\mathfrak{E}_{pq}$ $(p \leq q)$ auf sich mit dem Fixpunkt 0 ist linear.*

Beweis: Es sei $W = W(Z)$ eine solche Abbildung. Für ein beliebiges vorgegebenes $Z \in \mathfrak{E}_{pq}$ seien $r_1, \dots, r_p$ $(0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_p < 1)$ die Eigenwerte von $Z\tilde{Z}$. Dann gehört mit Z auch tZ zu $\mathfrak{E}_{pq}$ für jede komplexe Zahl t mit $t\bar{t}r_p < 1$. Folglich existiert eine in $|t| < r_p^{-1/2}$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$W(tZ) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k V_k(Z). \tag{8}$$

Dabei sind die Elemente der Matrizen $V_k(Z)$ homogene Polynome der Ordnung k in den Elementen von Z. Nun ist

$$E^{(p)} - W(tZ)\tilde{W} > 0 \qquad (t\bar{t} = 1),$$

also mit (8) nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{t\bar{t}=1} (E^{(p)} - W(tZ)\tilde{W}) \frac{dt}{t} = E^{(p)} - \sum_{k=1}^{\infty} V_k(Z)\tilde{V}_k > 0 \tag{9}$$

für alle $Z \in \mathfrak{E}_{pq}$. Man untersuche zunächst die linearisierte Abbildung

$$V_1 = V_1(Z). \tag{10}$$

Nach (9) ist $E^{(p)} - V_1 \tilde{V}_1 > 0$ für $Z \in \mathfrak{E}_{pq}$. Daher wird durch (10) eine Abbildung von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf einen Teilbereich $\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{E}_{pq}$ vermittelt. Die pq Elemente von V_1 sind lineare Funktionen der Elemente von Z. Es sei D die Determinante dieser linearen Abbildung. Die Funktionaldeterminante von W nach Z an der Stelle 0 ist offenbar ebenfalls D. Indem man evtl. die Umkehrfunktion von $W(Z)$ betrachtet, kann man $D\bar{D} \geqq 1$ annehmen. $v(\mathfrak{E}^*)$ und $v(\mathfrak{E}_{pq})$ seien die euklidischen Volumina von $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{E}_{pq}$. Dann ist einerseits $v(\mathfrak{E}^*) \leqq v(\mathfrak{E}_{pq})$ und andererseits $v(\mathfrak{E}^*) = D\bar{D}\, v(\mathfrak{E}_{pq}) \geqq v(\mathfrak{E}_{pq})$. Also ist $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}_{pq}$, und der Rand von $\mathfrak{E}_{pq}$ wird durch $V_1(Z)$ auf sich abgebildet.

Man setze in $V_1 = V_1(Z)$ speziell

$$Z = U^{*(p)} R\, U^{**(q)}$$

mit festen unitären Matrizen U^*, U^{**} und $R = ([r_1, \ldots, r_p]\, 0^{(p, q-p)})$ für reelle Variable $r_1, \ldots, r_p$. Die Eigenwerte von $Z\tilde{Z}$ lauten $r_1^2, \ldots, r_p^2$. Folglich ist Z innerer Punkt von $\mathfrak{E}_{pq}$, falls $-1 < r_k < 1$ $(k = 1, \ldots, p)$, und Randpunkt, wenn $-1 \leqq r_k \leqq 1$ $(k = 1, \ldots, p)$ und mindestens ein $r_k = \pm 1$ ist. $|E^{(p)} - V_1(Z)\tilde{V}_1|$ ist ein Polynom in den r_k vom Totalgrad $2p$. Daher gilt

$$|E^{(p)} - V_1(Z)\tilde{V}_1| = \prod_{k=1}^{p} (1 - r_k^2) = |E^{(p)} - Z\tilde{Z}|$$

für alle $Z \in \mathfrak{E}_{pq}$. Wegen der Linearität von $V_1(Z)$ haben $V_1 \tilde{V}_1$ und $Z\tilde{Z}$ die gleichen Eigenwerte. Also gibt es zufolge Hilfssatz 1 unitäre Matrizen $U_1^{(p)}$, $U_2^{(q)}$ mit

$$V_1(Z) = U_1 Z\, U_2 . \tag{11}$$

Dabei hängen U_1, U_2 zunächst noch von Z ab.

Es sei

$$X^{(p,q)} = U_3^{(p)} ([e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_p}]\, 0^{(p, q-p)})\, U_4^{(q)}$$

mit reellen Variablen $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ und festen unitären U_3, U_4. $X\tilde{X}$ hat die Eigenwerte $1, \ldots, 1$. Daher liegt $Z = uX$ für $0 \leqq u < 1$ in $\mathfrak{E}_{pq}$. Also gilt nach (9)

$$E^{(p)} - V_1(Z)\tilde{V}_1 - V_k(Z)\tilde{V}_k = (1 - u^2)\, E^{(p)} - V_k(Z)\tilde{V}_k > 0 \quad (k = 2, 3, \ldots) .$$

Der Grenzübergang $u \to 1$ zeigt: $V_k(X) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Nun ist $V_k(X)$ eine reguläre Funktion von $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, die für reelle Werte dieser Variablen identisch verschwindet. Berücksichtigt man nun noch Hilfssatz 1, so folgt $V_k(Z) = 0$ identisch in Z. Damit ist der Beweis von Hilfssatz 2 erbracht.

Die Aufgabe, alle umkehrbar eindeutigen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf sich zu bestimmen, ist nun ein Problem der linearen Algebra. Man setze mit $Z^{(p,q)} = (z_{kl})$, $Y^{(q,p)} = (y_{kl})$:

$$W(Z) = \sum_{\substack{1 \leqq k \leqq p \\ 1 \leqq l \leqq q}} z_{kl} A_{kl}, \qquad W^*(Y) = \sum_{\substack{1 \leqq k \leqq p \\ 1 \leqq l \leqq q}} y_{lk} \tilde{A}_{kl} .$$

Für $Z\tilde{Z} = E$ gilt wegen (11) $W(Z)\tilde{W} = E$ und daher $W(Z)\, W^*(\tilde{Z}) = E$. Hat

speziell Z die Gestalt $Z = (Z_1^{(p)}\, 0^{(p,q-p)})$, $Z_1\tilde{Z}_1 = E$, so folgt

$$W((Z_1^{(p)}\, 0^{(p,q-p)}))\, W^*\left(\begin{pmatrix} Z_1^{-1} \\ 0^{(q-p,p)} \end{pmatrix}\right) = E^{(p)}. \tag{12}$$

Insbesondere gilt also diese Gleichung für

$$Z_1 = U_1\,[e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_p}]\, U_2$$

mit unitären $U_1^{(p)}$, $U_2^{(p)}$ identisch in den reellen Variablen $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen folgt die Richtigkeit von (12) für alle nicht-ausgearteten $Z_1^{(p)}$. Setzt man Z_1 speziell als Diagonalmatrix $Z_1 = [z_1, \ldots, z_p]$ an, so ergibt (12)

$$\sum_{1 \le k, l \le p} z_k z_l^{-1} A_k \tilde{A}_l = E^{(p)},$$

also

$$A_k \tilde{A}_l = 0\ (k \neq l), \qquad \sum_{k=1}^{p} A_k \tilde{A}_k = E\,. \tag{13}$$

Da nach (11) $W(Z)\tilde{W}$ und $Z\tilde{Z}$ die gleichen Eigenwerte haben, sind $1, 0, \ldots, 0$ die Eigenwerte von $A_k\tilde{A}_k\ (k = 1, \ldots, p)$. Indem man Hilfssatz 1 anwendet und W von links und rechts mit geeigneten konstanten unitären Matrizen multipliziert, kann man daher

$$A_1 = ([1, 0, \ldots, 0]\, 0^{(p,q-p)})$$

annehmen. Wegen (13) verschwinden dann die erste Zeile und die erste Spalte von $A_l\ (l = 2, \ldots, p)$, und man kann daher den gleichen Schluß wiederholen. Nach p Schritten hat man als Resultat, daß man nach Multiplikation von W mit geeigneten unitären Matrizen voraussetzen kann:

$$A_1 = ([1, 0, \ldots, 0]\, 0^{(p,q-p)}),\ A_2 = ([0, 1, 0, \ldots, 0]\, 0^{(p,q-p)}), \ldots,$$
$$A_p = ([0, \ldots, 0, 1]\, 0^{(p,q-p)})\,.$$

Es gilt dann also

$$W((Z_1^{(p)}\, 0)) = (Z_1 0) \tag{14}$$

für beliebige Diagonalmatrizen Z_1.

Hilfssatz 3: *Es sei $W = (W_1^{(p)}\, W_2^{(p,q-p)})$, $Z = (Z_1^{(p)} Z_2^{(p,q-p)})$ und $W = W(Z)$ eine umkehrbar eindeutige analytische Abbildung von $\mathfrak{E}_{pq}$ $(p \le q)$ auf sich mit dem Fixpunkt 0. Ferner gelte $W_1 = Z_1$, $W_2 = 0$ für beliebige Diagonalmatrizen Z_1 und $Z_2 = 0$. Dann ist $W_2 = 0$ für beliebige komplexe Matrizen Z_1 und $Z_2 = 0$. und $W_1 = W_1(Z_1)$ ist eine umkehrbar eindeutige analytische Abbildung von $\mathfrak{E}_p$ auf sich.*

Beweis: Man fixiere ein Element $w_{rs}(1 \le r \le p,\ p < s \le q)$ von W_2 und setze $Z_2 = 0$, $Z_1 = (z_{kl})$, $z_{kr} = 0$ $(k = 1, \ldots, p)$. Dann wird wegen der Linearität von $W(Z)$

$$W_1 = [z_1, \ldots, z_{r-1}, 0, z_{r+1}, \ldots, z_p] + A\,,$$

und die Elemente von A und W_2 hängen nicht mehr von $z_1, \ldots, z_p$ ab. Für genügend große $z_1, \ldots, z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots, z_p$ und hinreichend kleine positive $z_{kl}\,(k \neq l)$

hat $Z = (Z_1 0)$ den Rang $p - 1$. Würde nun w_{rs} von $z_{kl}(k \neq l, l \neq r)$ wirklich abhängen, so ließen sich die Variablen so wählen, daß die aus der 1-ten, . . ., $(r-1)$-ten, s-ten, $(r+1)$-ten, . . ., p-ten Spalte gebildete p-reihige Unterdeterminante von W von Null verschieden wäre. Nach (11) hat aber mit Z auch W den Rang $p - 1$. Indem man die Forderung $z_{kr} = 0$ $(k = 1, \ldots, p)$ durch $z_{rk} = 0$ $(k = 1, \ldots, p)$ ersetzt, folgt ebenso, daß w_{rs} von $z_{kr} (k = 1, \ldots, p)$ unabhängig ist. Also gilt $W_2 = 0$ für beliebige komplexe Matrizen Z_1 und $Z_2 = 0$. Sicherlich ist damit $W_1 = W_1(Z_1)$ eine eineindeutige analytische Abbildung von $\mathfrak{E}_p$ in sich. Nun erfüllt mit $W(Z)$ auch die Umkehrfunktion die Voraussetzungen des Satzes. Daher folgt, daß durch $W_1 = W_1(Z_1)$ eine Abbildung von $\mathfrak{E}_p$ auf sich beschrieben wird.

Nach dem Ergebnis von [2] gibt es somit zwei konstante unitäre Matrizen $U_1^{(p)}$, $U_2^{(p)}$ mit

$$U_1 W_1 U_2 = Z_1 \quad \text{oder} \quad U_1 W_1 U_2 = Z_1'$$

identisch in Z_1. Indem man also W von links mit U_1 und von rechts mit

$$\begin{pmatrix} U_2^{(p)} & 0 \\ 0 & E^{(q-p)} \end{pmatrix}$$

multipliziert, kann man annehmen

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} W((Z_1 \; 0^{(p,q-p)})) = (Z_1 \; 0^{(p,q-p)}) & \text{oder} \\ W((Z_1 \; 0^{(p,q-p)})) = (Z_1' \; 0^{(p,q-p)}) \end{cases}$$

identisch in $Z_1^{(p)}$.

Nunmehr ist noch der Beitrag von Z_2 zu W zu untersuchen, d. h. die Matrizen A_{kl} für $l > p$. Setzt man für festes k und $l > p$ alle Elemente von Z Null mit Ausnahme von z_k und z_{kl}, so hat Z den Rang 1. W hat die Gestalt

$$W = \left(\begin{pmatrix} & * & \\ \ldots, & z_k + a z_{kl}, & \ldots \\ & * & \end{pmatrix}^{(p)} z_{kl} C_{kl} \right),$$

wobei $A_{kl} = (B_{kl}^{(p)} \; C_{kl}^{(p,q-p)})$ gesetzt ist und die nicht hingeschriebenen Elemente nur von z_{kl} abhängen. Würde nun ein Element $w_{rs}(r, s \neq k)$ von Null verschieden sein, so wäre die zweireihige Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} z_k + a z_{kl} & w_{ks} \\ w_{rk} & w_{rs} \end{vmatrix} \neq 0$$

für genügend großes z_k und hinreichend kleines $z_{kl} > 0$. Das ist ein Widerspruch zu der Tatsache, daß wegen (11) mit Z auch W den Rang 1 hat. Also verschwinden alle Elemente von A_{kl} außerhalb der k-ten Zeile und k-ten Spalte.

Für den ersten Fall (15), $W((Z_1 0)) = (Z_1 0)$, zeigt der gleiche Schluß für ein $z_{kr}(r \leqq p,\ r \neq k)$ an Stelle von z_k, daß sogar die Elemente außerhalb der k-ten Zeile von A_{kl} verschwinden. Der zweite Fall (15) kann für $p > 1$ in Wahrheit gar nicht eintreten. Denn sei $W((Z_1 0)) = (Z_1' \, 0)$. Man setze alle Elemente von Z gleich Null mit Ausnahme von z_{k1} und z_{kl} für ein festes $k \neq 1$, $l > p$. Z hat wieder den Rang 1. Es wird $w_{1k} = z_{k1} + a\, z_{kl}$ und alle Elemente außerhalb der k-ten Zeile und k-ten Spalte von W sind Null. Da auch W

den Rang 1 hat, verschwinden alle zweireihigen Unterdeterminanten von W und damit C_{kl}. Ein ähnlicher Schluß zeigt, daß auch $C_{1l}=0$ für $l>p$ gilt. Daher folgt $W(Z)=(W_1 0)$ identisch in Z. Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, daß $W(Z)$ eine Abbildung von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf sich ist.

Nun werde für $l>p$ gezeigt, daß $B_{kl}=0$ gilt. Die Elemente der k-ten Zeile von $A_{kl}(l>p)$ seien $a_1,\ldots,a_q$. Alle anderen Elemente von A_{kl} wurden bereits zu Null nachgewiesen. Setzt man in Z alle Elemente 0 bis auf ein $z_{kr}(r\leq p)$ und z_{kl}, so sind alle Elemente von W Null mit Ausnahme der k-ten Zeile. Ihre Elemente lauten

$$a_1 z_{kl},\ldots,a_{r-1}z_{kl},\,a_r z_{kl}+z_{kr},\,a_{r+1}z_{kl},\ldots,a_q z_{kl}\,.$$

Wegen (11) haben $W\tilde{W}$ und $Z\tilde{Z}$ die gleichen Eigenwerte. Also folgt

$$|z_{kr}|^2+|z_{kl}|^2=|a_1 z_{kl}|^2+\cdots+|a_{r-1}z_{kl}|^2+|a_r z_{kl}+z_{kr}|^2+ \\ +|a_{r+1}z_{kl}|^2+\cdots+|a_q z_{kl}|^2$$

identisch in z_{kr}, z_{kl}. Somit ist $a_r=0$, d. h. $B_{kl}=0$. Weiter folgt

$$|a_{p+1}|^2+\cdots+|a_q|^2=1\,.$$

Nunmehr hat $W=W(Z)$ ausführlich geschrieben die folgende Gestalt:

$$w_{kl}=z_{kl}\qquad (1\leq k,l\leq p)\,.$$

$$w_{k,p+l}=a_{kl}z_{k,p+1}+b_{kl}z_{k,p+2}+\cdots+c_{kl}z_{kq}\quad (1\leq k\leq p,\ 1\leq l\leq q-p) \tag{16}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_{kl}, b_{kl},\ldots,c_{kl}$ und

$$\sum_{l=1}^{q-p}|a_{kl}|^2=1,\ \sum_{l=1}^{q-p}|b_{kl}|^2=1,\ldots,\ \sum_{l=1}^{q-p}|c_{kl}|^2=1\,. \tag{17}$$

Man ergänze die Zeile $\mathfrak{a}'=(a_{1,p+1}\ldots a_{1q})$ zu einer unitären Matrix

$$U^{(q-p)}=\begin{pmatrix}\mathfrak{a}'\\ *\end{pmatrix}$$

und multipliziere W von rechts mit

$$\begin{pmatrix}E^{(p)} & 0\\ 0 & U^{-1}\end{pmatrix}.$$

Dann wird $a_{11}=1$, $a_{1l}=0$ $(l=2,\ldots,q-p)$. Es wird behauptet, daß darüber hinaus

$$a_{k1}=1\qquad (1\leq k\leq p) \tag{18}$$

gilt.

Zum Beweise hat man abermals (11) heranzuziehen. Nach dieser Gleichung haben $W\tilde{W}$ und $Z\tilde{Z}$ die gleichen Eigenwerte, insbesondere stimmen also die Summen der zweireihigen Hauptminoren dieser Matrizen identisch in Z überein. In dieser Gleichung hat man nun den Koeffizientenvergleich durchzuführen. Man setze

$$z_{11}=z,\ z_{1,p+1}=1,\ z_{r1}=1,\ z_{r,p+1}=1$$

für ein vorgegebenes r aus $2\leq r\leq p$ und sonst $z_{kl}=0$. Dann wird nach (16)

$$w_{11}=z,\ w_{1,p+1}=1,\ w_{r1}=1,\ w_{r,p+l}=a_{rl}\qquad (1\leq l\leq q-p)$$

und sonst $w_{kl} = 0$. Der beschriebene Koeffizientenvergleich ist an der Gleichung

$$(|z|^2 + 1)(1 + |a_{r1}|^2 + \cdots + |a_{r,q-p}|^2) - |z + \bar{a}_{r1}|^2 = 2(|z|^2 + 1) - |z + 1|^2$$

vorzunehmen. Es folgt in der Tat $a_{r1} = 1$ und wegen (17)

$$a_{kl} = 0 \qquad (1 \leq k \leq p,\ 2 \leq l \leq q - p). \tag{19}$$

Ferner ergibt sich

$$b_{k1} = \cdots = c_{k1} = 0 \qquad (1 \leq k \leq p). \tag{20}$$

Setzt man nämlich etwa für ein vorgegebenes r $(1 \leq r \leq p)$ alle Elemente von Z Null mit Ausnahme von $z_{r,p+1}, z_{r,p+2}$, so ist nach (16), (19)

$$w_{r,p+1} = z_{r,p+1} + b_{r1} z_{r,p+2},\ w_{r,p+2} = b_{r2} z_{r,p+2}, \ldots, w_{rq} = b_{r,q-p} z_{r,p+2},$$

und die übrigen Elemente w_{kl} von W verschwinden. Aus (11) folgt

$$|z_{r,p+1}|^2 + |z_{r,p+2}|^2 = |z_{r,p+1} + b_{r1} z_{r,p+2}|^2 + |b_{r2} z_{r,p+2}|^2 + \cdots + |b_{r,q-p} z_{r,p+2}|^2$$

identisch in $z_{r,p+1}$ und $z_{r,p+2}$ und damit $b_{r1} = 0$.

Die Aussagen (18), (19), (20) besagen, daß W und Z in den ersten $p + 1$ Spalten übereinstimmen und die übrigen Elemente w_{kl} $(1 \leq k \leq p,\ p + 2 \leq l \leq q)$ von W Linearkombinationen von $z_{k,p+2}, \ldots, z_{kq}$ sind. Infolgedessen läßt sich der gleiche Schluß auf die $(p + 2)$-te Spalte von W anwenden. Multipliziert man W von rechts mit einer geeigneten unitären Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} E^{(p+1)} & 0 \\ 0 & U^{(q-p-1)} \end{pmatrix},$$

so erhält man die Übereinstimmung von W und Z in den ersten $p + 2$ Spalten. Nach $q - p$ derartigen Schritten folgt schließlich $W = Z$ identisch in Z. — Damit ist das angekündigte Resultat hergeleitet, das noch einmal explizit formuliert werden soll.

Satz: *Die volle Gruppe der umkehrbar eindeutigen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{E}_{pq}(p \neq q)$ auf sich besteht aus den Abbildungen*

$$W = (A^{(p)} Z + B^{(p,q)})(C^{(q,p)} Z + D^{(q)})^{-1}$$

mit einer beliebigen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Omega_{pq}.$$

Für $p = q > 1$ kommen bekanntlich [2] noch die Abbildungen

$$W = (A Z' + B)(C Z' + D)^{-1}$$

hinzu. Wir wollen das Auftreten dieser weiteren Abbildungen im Falle $p = q$ als eine die Bereiche $\mathfrak{E}_p$ kennzeichnende Symmetrieeigenschaft deuten. Die Abbildungen mit dem Fixpunkt 0, deren Gesamtheit wir als Fixpunktgruppe bezüglich 0 bezeichnen, lauten

$$W = U_1 Z U_2, \tag{21}$$

$$W = U_1 Z' U_2 \tag{22}$$

mit beliebigen konstanten unitären Matrizen $U_1^{(p)}, U_2^{(p)}$. Bekanntlich gibt es

zu jeder unitären Matrix $U^{(p)}$ eine weitere unitäre Matrix L mit

$$U = D\{L\}, \quad D = [e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_p}]$$

und reellen $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Man definiere $D^{1/2} = \left[e^{\frac{i}{2}\varphi_1}, \ldots, e^{\frac{i}{2}\varphi_p}\right]$ und setze $V = \bar{L} D^{1/2} L$. Dann wird $U = V^2$. Jede unitäre Matrix ist also das Quadrat einer unitären Matrix. Wendet man diesen Satz auf U_1 und U_2 in (21) an, so ergibt sich, daß jede dieser Abbildungen Quadrat in der Fixpunktgruppe bezüglich Null ist. In Analogie zum Fall $p = 1$ wollen wir daher die Abbildungen (21) als „Rotationen" bezeichnen. Dagegen ist die Abbildung

$$W = Z'$$

für $p > 1$ nicht Quadrat in der Fixpunktgruppe bezüglich 0. Das folgt einfach aus der Tatsache, daß die Mengen der Abbildungen (21) und (22) disjunkt sind. Ferner ist $W = Z'$ eine Involution. Wegen analoger Eigenschaften bei Spiegelungen wollen wir derartige Abbildungen „analytische Spiegelungen" nennen. Dafür gibt es kein Analogon im Falle $p = 1$. Wegen der Transitivität von Ω_p^* gibt es auch in der Fixpunktgruppe bezüglich eines beliebigen Punktes $Z \in \mathfrak{E}_p$ analytische Spiegelungen.

Für $p \neq q$ machen die Abbildungen

$$W = U_1^{(p)} Z\, U_2^{(q)}$$

bereits die volle Fixpunktgruppe bezüglich 0 aus. Nach dem genannten Satz über unitäre Matrizen ist jedes Element der Fixpunktgruppe Quadrat. Es treten also keine analytischen Spiegelungen auf. Die Bereiche $\mathfrak{E}_p (p > 1)$ sind unter den Bereichen $\mathfrak{E}_{pq}$ durch eine höhere Symmetrie gekennzeichnet, die dadurch zum Ausdruck kommt, daß es in den Fixpunktgruppen analytische Spiegelungen gibt.

Es sei noch erwähnt, daß sich in $\mathfrak{E}_{pq}$ eine Riemannsche Metrik einführen läßt. Durch die Zuordnung

$$Z^{(p,q)} \to Z_1^{(q)} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (p \leq q)$$

wird eine umkehrbar eindeutige analytische Abbildung von $\mathfrak{E}_{pq}$ in $\mathfrak{E}_q$ vermittelt. Daher läßt sich $\mathfrak{E}_{pq}$ als Teilbereich von $\mathfrak{E}_q$ auffassen. Man erkennt nun leicht, daß $\mathfrak{E}_{pq}$ eine geodätische Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{E}_q$ bezüglich der bekannten hermitisch-symplektischen Geometrie ist. Aus dieser Tatsache ergibt sich dann sofort die Übertragung der bekannten geometrischen Sätze für $\mathfrak{E}_q$ auf $\mathfrak{E}_{pq}$. Insbesondere läßt sich die auf geometrischer Grundlage beruhende Theorie der diskontinuierlichen Gruppen für $\mathfrak{E}_{pq}$ durchführen.

Auch die Fortsetzungsmöglichkeit einer analytischen Abbildung von $\mathfrak{E}_{pq}$ auf sich zu einer analytischen Abbildung von $\mathfrak{E}_q$ auf sich läßt sich vollständig diskutieren. Man bekommt als Resultat, daß alle Fortsetzungen von

$$W = (A\,Z + B)\,(C\,Z + D)^{-1}, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Omega_{pq}$$

geliefert werden durch

$$W_1 = (A^* Z_1 + B^*)\,(C^* Z_1 + D^*)^{-1}$$

mit

$$A^* = \begin{pmatrix} A^{(p)} & 0 \\ 0 & U^{(q-p)} \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} B^{(p,q)} \\ 0^{(q-p,q)} \end{pmatrix}, \quad C^* = \left(C^{(q,p)}\ 0^{(q,q-p)}\right), \quad D^* = D\,.$$

Die Art der Fortsetzung hängt dabei noch von einer willkürlichen unitären Parametermatrix $U^{(q-p)}$ ab.

Literatur

[1] Cartan, E.: Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes. Abh. Math. Sem. Hans. Univ. 11, 116—162 (1936). — [2] Klingen, H.: Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen I. Math. Ann. 129, 345—369 (1955). [3] Siegel, C. L.: Symplectic Geometry. Amer. J. Math. 65, 1—86 (1943).

(Eingegangen am 9. Mai 1956)

JACOBSTHAL, E.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 145—147 (1956)

Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Bieberbach über Kreisbogendreiecke

Von

ERNST JACOBSTHAL in Trondheim

In seiner Arbeit „Zur Euklidischen Geometrie der Kreisbogendreiecke"[1]) braucht Herr BIEBERBACH in einem Beweise[2]) die Tatsache, daß

$$F(x) = \frac{x\cos x(\sin x - x\cos x)}{(\sin x\cos x - x)^2} \tag{1}$$

in $0 < x < \pi/2$ monoton abnimmt. Da der im Zähler von $F'(x)$ auftretende Ausdruck

$$x\sin(2x) - \tfrac{1}{4}\sin^2(2x) - x^2 + x^2\sin(2x) + \tfrac{1}{2}x^2\sin^2(2x) - 2x\sin(2x)\sin^2 x \tag{2}$$

ziemlich unhandlich ist, liegt es auf der Hand, daß es nicht ganz einfach ist nachzuweisen, daß der Ausdruck (2) in $0 < x < \pi/2$ durchweg < 0 ist. BIEBERBACH erledigt den Beweis mit Hilfe numerischer Rechnungen durch Aufteilung des Intervalls in mehrere Stücke. Ich will hier einen Beweis mitteilen, der auf einer Umformung des Ausdrucks (2) beruht und die Entscheidung über das Vorzeichen von (2) auf den Nachweis der Ungleichheit

$$\frac{t}{\sin t} - 1 < 2\left(\frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t\right)^2, \quad 0 < t < \pi, \tag{3}$$

zurückführt.

Man kann zunächst das erste und letzte Glied in (2) zusammenfassen zu $x\sin(2x)\cos(2x)$. Multipliziert man dann noch den ganzen Ausdruck in (2) mit 8 und setzt $2x = t$, dann wird das dritte Glied in (2)

$$-8x^2 = -2t^2 = -2t^2(\sin^2 t + \cos^2 t).$$

Dadurch geht der ganze Ausdruck über in

$$\begin{aligned} 4t\sin t\cos t - 2\sin^2 t - 2t^2\sin^2 t - 2t^2\cos^2 t + t^3\sin t + t^2\sin^2 t \\ = -2(\sin t - t\cos t)^2 - t^2\sin^2 t + t^3\sin t. \end{aligned}$$

Durch Ausklammern von $t^2\sin^2 t$ bekommen wir also

$$t^2\sin^2 t\left[\frac{t}{\sin t} - 1 - 2\left(\frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t\right)^2\right]. \tag{2_1}$$

Also ist die Behauptung über das negative Vorzeichen von (2) gezeigt, wenn (3) bewiesen ist. Für (3) will ich zwei Beweise mitteilen. Der erste stützt sich

[1]) Math. Ann. 130, 46—86 (1955).
[2]) l. c. S. 60ff.

auf die in $0 < t < \pi$ geltenden Entwicklungen:

$$(4)\qquad \frac{t}{\sin t} - 1 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda-1} B_{2\lambda} \frac{2^{2\lambda}-2}{(2\lambda)!} t^{2\lambda},$$

$$(5)\qquad \frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda-1} B_{2\lambda} \frac{2^{2\lambda}}{(2\lambda)!} t^{2\lambda-1},$$

worin die $B_{2\lambda}$ die Bernoullischen Zahlen sind. Da nun in $0 < t < \pi$

$$\left(\frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t\right)^2 > \frac{2t}{3}\left(\frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t\right) - \frac{t^2}{9}$$

ist, wird (3) sicher richtig sein, wenn sogar

$$(3_1)\qquad \frac{t}{\sin t} - 1 < \frac{4t}{3}\left(\frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t\right) - \frac{2t^2}{9}$$

in $0 < t < \pi$ gilt. Nach (4) und (5) wird die Potenzreihenentwicklung der Differenz aus der rechten und linken Seite in (3_1)

$$\frac{t^2}{18} + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} B_{2\lambda}}{(2\lambda)!} \, \frac{2^{2\lambda+2} - 3\cdot 2^{2\lambda} + 6}{3} t^{2\lambda}.$$

Da nun bekanntlich für alle natürlichen Zahlen λ stets

$$(6)\qquad (-1)^{\lambda-1} B_{2\lambda} > 0$$

ist, hat die letzte Reihe durchweg positive Koeffizienten und stellt daher für $0 < t < \pi$ eine positive Zahl dar, womit (3_1) und die schwächere Ungleichheit (3) bewiesen ist. — Für den Beweis von (3_1) scheint der Gebrauch von (4), (5), (6) den bequemsten Weg darzustellen. Dagegen läßt sich die schwächere Ungleichheit (3) ohne diese Hilfsmittel elementarer beweisen, was ja für die Zwecke der Bieberbachschen Arbeit ausreicht. Dazu beweisen wir zunächst die in $0 < t < \pi$ geltende algebraische Relation

$$(7)\qquad 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} < \frac{1}{8}\left(\sqrt{64 + t^4} - t^2\right).$$

Sie ist mit

$$(7_1)\qquad 120 - 5t^2 + t^4 < 15\sqrt{64 + t^4}$$

identisch. Da beide Seiten für alle reellen t positiv sind, ist (7_1) mit $y = t^2$, $0 < y < \pi^2$ nach kurzer Rechnung mit

$$(7_2)\qquad y^3 - 10y^2 + 40y < 1200$$

identisch, und dies ist sicher für $0 < y < \pi^2$ richtig, da die linke Seite mit y monoton wächst und für $y = 10 > \pi^2$ noch erfüllt ist. Daher gilt (7) sicher für $0 < t < \pi$. Da nun

$$(8)\qquad \frac{\sin t}{t} < 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}$$

für alle $t \neq 0$ ist, was schon ohne Kenntnis der Reihe für $\sin t$ durch sukzessive Integration von $\cos t \leqq 1$ von 0 bis t folgt, so ergibt (7) und (8), daß

$$(9)\qquad \frac{\sin t}{t} < \frac{1}{8}\left(\sqrt{64 + t^4} - t^2\right), \quad 0 < t < \pi,$$

gilt. Hieraus folgt durch Isolierung der Wurzel und nachfolgendes Quadrieren nach kurzer Rechnung

$$\frac{t\sin t}{4} + \frac{\sin^2 t}{t^2} < 1,$$

$$t^3 \sin t < 4(t^2 - \sin^2 t), \quad 0 < t < \pi,$$

$$1 < \frac{4}{t\sin t} \cdot \frac{t^2 - \sin^2 t}{t^2}, \quad 0 < t < \pi.$$

Multipliziert man dies mit der für die angegebenen Werte von t positiven Funktion

$$\left(\frac{t}{\sin t}\right)' = \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t},$$

so folgt

$$\left(\frac{t}{\sin t}\right)' < 4\,\frac{\sin t - t\cos t}{t\sin t}\,\frac{t^2 - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t}$$

(10)
$$= 4\left(\frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t\right)\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sin^2 t}\right)$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t\right)^2\right)', \quad 0 < t < \pi,$$

und hieraus durch Integration zwischen 0 und t sofort die Richtigkeit der Relation (3).

(Eingegangen am 13. April 1956)

STEIN, S.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 148—149 (1956)

An Application of Topology to Convex Bodies

By

S. STEIN in Davis, California

This note obtains, by theorems related to Brouwer's fixed point theorem, several results at dimension n suggested by the following theorem of MAXIMILIAN KRAFFT [1], p. 433:

The centers of gravity of the subarcs of a closed convex curve, C, furnished with a continuous strictly positive density, fill the interior of C simply.

If A is a subset of n-dimensional Euclidean space E^n, then the closure of the set of points of A lying on one side of an $n-1$ dimensional hyperplane shall be called a cap of A. If A is furnished with a continuous strictly positive density, $\Phi(A)$ shall denote its center of gravity. The unit interval is denoted I.

Theorem 1. *If $K^n \subset E^n$ is an n-dimensional convex body such that each support plane has only one point of contact and whose surface B^{n-1} is furnished with a strictly positive density then the centers of gravity $\Phi(C)$, as C runs through all caps of B^{n-1}, fill K^n in a one-one manner.*

Proof. Define $F\colon B^{n-1} \times I \to K^n$ by setting $F(b,t) = \Phi(C)$ where C is the cap of B^{n-1} containing b and cut off by the $n-1$ dimensional hyperplane parallel to the support at b and a t^{th} of the distance from that support to the second support plane parallel to it.

Observe that $F(b,0) = b$ and $F(b,1) = \Phi(B^{n-1})$ for all $b \in B^{n-1}$.

Assume that F is not onto K^n. Then there is a point $Q \in K^n - B^{n-1}$ which is not in the image of F. If $r\colon K^n - Q \to B^{n-1}$ denotes radial projection from Q then $rF\colon B^{n-1} \times I \to B^{n-1}$ provides a homotopy between the identity mapping of B^{n-1} and a constant mapping. This contradiction shows that F is onto.

Now we show that F, restricted to $B^{n-1} \times [0,1)$, is one-one. Let C and D be distinct caps of B^{n-1}. If C, D, or $C \cap D$ is a point then clearly $\Phi(C) \neq \Phi(D)$. We now consider the non-degenerate cases. If $C \cap D = \Phi$ then clearly, by convexity, $\Phi(C) \neq \Phi(D)$. If $C \supset D$ then $\Phi(C)$, since it lies in the interior of the line segment joining $\Phi(D)$ to $\Phi(C-D)$, is not equal to $\Phi(D)$. Finally, if $C \cap D \neq \Phi$ and $C \not\supset D$, $D \not\supset C$, then $\Phi(D)$ lies in the interior of the line segment joining $\Phi(C \cap D)$ to $\Phi(D-C)$, and $\Phi(C)$ lies in the interior of the line segment joining $\Phi(C \cap D)$ to $\Phi(C-D)$. Since $\Phi(C-D)$, $\Phi(C \cap D)$, $\Phi(D-C)$ are not collinear, $\Phi(C) \neq \Phi(D)$. Thus the restriction of F is one-one. Since $\Phi(B^{n-1}) \notin F(B^{n-1} x\, [0,1))$ the theorem is proved.

An almost identical proof yields

Theorem 2. *If $K^n \subset E^n$ is an n-dimensional convex body such that each support plane has only one point of contact and K^n is furnished with a strictly positive density then the centers of gravity $\Phi(C)$, as C runs through all caps of K^n, fill K^n in a one-one manner.*

Theorem 3. *If K^n and B^{n-1}, satisfying the conditions of Theorems 1 and 2, are each furnished with a strictly positive density, then there is at least one cap of K^n, C_0, which is not simply a point of B^{n-1}, such that $\Phi(C_0) = \Phi(C_0 \cap B^{n-1})$.*

Proof. Define f: $K^n \to K^n$ by setting $f(x) = \Phi(C \cap B^{n-1})$ where C is the cap of K^n such that $\Phi(C) = x$. Since f leaves B^{n-1} point-wise fixed it must have, by a variation of Brouwer's fixed point theorem, a fixed point, x_0, not in B^{n-1}. Then, if $\Phi(C_0) = x_0$, one has $\Phi(C_0 \cap B^{n-1}) = \Phi(C_0)$.

Remark. The function G which assigns to each point of K^n the cap of B^{n-1} of which it is the center of gravity may be used to prove the following: there exists a continuous multi-valued function $H: K^n \to 2^{K^n}$ such that $x \notin H(x)$ for all $x \in K^n$. For H choose λG where $\lambda: B^{n-1} \to B^{n-1}$ has no fixed points (Cf. [2], p. 989 for a similar construction for dimension 1).

Question. Theorem 3 raises the following problem: If B^{n-1} is furnished with a density function, does there exist a density function for K^n such that $\Phi(C) = \Phi(C \cap B^{n-1})$ for all caps C of K^n?

References

[1] Krafft, M.: Geometrische Untersuchungen über Kurvenschwerpunkte. Math. Ann. **97**, 430—453 (1926—1927). — [2] Strother, W. L.: On an open question concerning fixed points. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 988—993 (1953).

(Eingegangen am 21. März 1956)

Stummel, F.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 150—176 (1956)

Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen*

Von

Friedrich Stummel in Göttingen

Einleitung

In einer Arbeit entwickelt T. Carleman in kurzen Zügen eine Theorie des Operators $\Delta u + c(x,y,z)\,u + \lambda u$ (siehe [4]). Die dort angegebene Idee wird im folgenden wieder aufgenommen, und zwar für den Operator

$$A u = -\Delta u + 2i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} u + b u .$$

Dabei ist A erklärt im Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$, d. h. der Menge aller in E_n zweimal stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen, die außerhalb einer individuellen Hyperkugel identisch verschwinden. Unter dieser Voraussetzung ist A ein in $\mathfrak{D}_A$ hermitescher Operator. Der von uns zugrunde gelegte Hilbertsche Raum $\mathfrak{H}$ ist die Menge aller über E_n im Sinne von Lebesgue absolut quadratisch integrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt $(f,g) = \int \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$. Hinsichtlich der Koeffizienten a_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, setzen wir der Einfachheit halber stetige Differenzierbarkeit voraus. Für den Koeffizienten b dagegen sind auch Singularitäten zugelassen; es wird nur verlangt, daß $b(x)$ lokal quadratisch integrierbar ist und ein Integralmittel über b, $\int\limits_{|x-y|\le R} |b(y)|^2 |x-y|^{-n+4-\alpha} dy$ mit einem passenden $\alpha > 0$ beschränkt bleibt.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, den Operator A in $\mathfrak{D}_A$ auf drei Probleme hin zu untersuchen: Bestimmung der Adjungierten A^* des Operators A, nähere Untersuchung des Definitionsbereiches $\mathfrak{D}_{A^*}$ von A^*, insbesondere der Eigenlösungen von A^* zu komplexem Eigenwert, und schließlich die wesentliche Selbstadjungiertheit von A in $\mathfrak{D}_A$.

Die Bestimmung des zu A adjungierten Operators A^* gelingt nach dem Vorbild von T. Carleman durch Fortsetzen von A in $\mathfrak{D}_A$ zu einem Operator $\tilde{A}$ in $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$, welcher durch eine sog. Mittelwertgleichung implizit definiert ist. In § 2 wird gezeigt, daß dieser Operator $\tilde{A}$ mit A^* identisch ist. Aus dieser Tatsache folgt dann sofort, daß die Frage nach der wesentlichen Selbstadjungiertheit von A in $\mathfrak{D}_A$ äquivalent ist mit der Frage nach der Existenz von nichttrivialen, quadratisch integrierbaren Lösungen der Funktionalgleichung $\tilde{A} u = \lambda u$ für komplexe Werte von λ.

* Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

In § 3 wird eingehend diskutiert, unter welchen Voraussetzungen hinsichtlich a_ν, b, f die Lösungen der Gleichung $(A^* - \lambda)\, u = f$ beschränkt bzw. differenzierbar sind (Satz 3.1 und folgende). Dabei interessiert vor allem das Verhalten von u in solchen Punkten oder Unterräumen des E_n, in denen der Koeffizient b singulär wird. Es zeigt sich z. B., daß Lösungen der Gleichung $A^* u = \lambda u$ in jedem beschränkten Gebiet G gleichmäßig beschränkt bleiben, sobald eine Ungleichung der Form

$$\int\limits_{|x-y| \leq R} |b(y)|^2\, |x-y|^{-n+4-\alpha}\, dy \leq M$$

für alle x aus G mit $\alpha > 0$, $0 < R < 1$ und $M < \infty$ erfüllt ist. Hat der Koeffizient b die Gestalt eines in der Physik üblichen Coulombpotentials, so bleiben die Eigenlösungen u von $A^* u = \lambda u$ in den singulären Stellen von b nicht nur beschränkt, sondern erfüllen dort auch noch eine Lipschitzbedingung. Ein Teil der Resultate von § 3 wird in Form eines Weylschen Lemmas zusammengefaßt und zum Schluß noch ein Satz von K. Friedrichs [7] neu bewiesen.

Ist ein linearer Operator selbstadjungiert, so folgt bekanntlich aus dem Spektralsatz die spektrale Zerlegbarkeit des Operators. Daher verdient die Frage nach der Selbstadjungiertheit eines Operators besonderes Interesse. Da aber der von uns definierte Operator A in $\mathfrak{D}_A$ nicht abgeschlossen ist, so zeigen wir in § 4 nur die wesentliche Selbstadjungiertheit von A in einigen Fällen. Die dort bewiesenen Kriterien stellen z. T. eine Verallgemeinerung bereits bekannter Sätze dar. Eines dieser Resultate sei herausgegriffen (Satz 4.2): *Der Operator $A u = -\Delta u + b u$ ist in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert, wenn $b(x)$ die Bedingung*

$$\int\limits_{|x-y| \leq R} |b(y)|^2\, |x-y|^{-n+4-\alpha}\, dy \leq M$$

für alle x aus E_n mit $\alpha > 0$, $0 < R < 1$, $M < \infty$ erfüllt. Ein analoger Satz ist von T. Kato [11] bewiesen worden. Es ist bemerkenswert, daß man unter sehr allgemeinen Voraussetzungen hinsichtlich der Koeffizienten a_ν, b zu der Funktion $b(x)$ eine solche Funktion hinzufügen kann, die im Unendlichen beschränkt bleibt und im Endlichen nicht zu stark singulär wird, ohne daß dadurch die wesentliche Selbstadjungiertheit von A in $\mathfrak{D}_A$ gestört wird (Satz 4.3). Ein anderes Kriterium besagt, daß der Operator $A u = -\Delta u + b_1 u + b_2 u$ in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert ist, wenn b_2 den eben beschriebenen Charakter hat und der Ausdruck $|b_1(x) - b_1(y)|$ für alle x, y aus E_n mit $|x-y| \leq R < 1$ gleichmäßig beschränkt bleibt (Satz 4.4). Als letztes Kriterium wird das schon bei T. Carleman [4] und K. Friedrichs [6] angegebene Resultat bewiesen, wonach dieser Operator in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert ist, falls $b_1(x)$ stetig ist und $b_1(x) \geq c > -\infty$ $(x \in E_n)$ bleibt, b_2 die oben angedeuteten Bedingungen erfüllt (Satz 4.5).

Schließlich wird in § 5 kurz die Anwendbarkeit der vorhergehenden Resultate auf die allgemeine nichtrelativistische Schrödingergleichung diskutiert. Im Falle eines Teilchens läßt sich die wesentliche Selbstadjungiertheit der zugehörigen Operatoren A in $\mathfrak{D}_A$ in vielen Beispielen unmittelbar mit Hilfe der Kriterien des § 4 einsehen. Ein gewöhnliches Coulombpotential

ist hier ohne Einfluß auf die wesentliche Selbstadjungiertheit. Für mehrere Teilchen bietet der Nachweis der wesentlichen Selbstadjungiertheit größere Schwierigkeiten. Ist jedoch $A u = -\Delta u + b u$ und b das übliche Coulombpotential für mehrere Teilchen, so ist der Satz 4.2 anwendbar. Um zu zeigen, wie sich die in den vorangegangenen Paragraphen entwickelten Methoden auch in komplizierteren Fällen handhaben lassen, wird die wesentliche Selbstadjungiertheit des Starkeffektoperators für mehrere Teilchen bewiesen (Satz 5.1).

§ 1. Vorbereitende Sätze

In diesem Paragraphen sollen einige Sätze zusammengestellt werden, die im folgenden wichtig sind und häufig herangezogen werden. Wir wollen dabei als Bezeichnungen vereinbaren:

E_n für die Menge aller Punkte $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqq 2$, mit $-\infty < x_\nu < \infty (\nu = 1, \ldots, n)$; $|x - y|$ für den euklidischen Abstand zweier Punkte x, y des E_n; $d\,x$ bzw. $d\,o$ für das Volumenelement des E_n bzw. das Oberflächenelement einer $(n-1)$-dimensionalen Fläche. Sind G und G' zwei Gebiete des E_n, R eine positive Zahl, dann ist

G_R die Menge aller Punkte x des E_n, für die es ein y aus G gibt mit $|x - y| \leqq R$;

$G - G'$, für $G \supseteqq G'$, die Menge aller Punkte x aus G, die nicht in G' liegen.

Ein Integral, dessen Integrationsgebiet nicht angegeben wird, ist stets über den ganzen E_n erstreckt zu denken.

Die Basis aller späteren Überlegungen wird das Studium einer sog. Mittelwertgleichung[1]) für die Lösungen der Poissonschen Differentialgleichung $-\Delta u = \mu$, mit $\Delta = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}$, sein. Was darunter zu verstehen ist, erläutert der erste Hilfssatz.

Hilfssatz 1.1: *Jede in einem Gebiet G zweimal stetig differenzierbare Funktion u, die der Gleichung $-\Delta u = \mu$ genügt, erfüllt für jede ganz in G gelegene Kugel $|y - x| \leqq R$ die Gleichung*

$$u(x) = \int_G H_R(x,y)\, u(y)\, d\,y + \int_G K_R(x,y)\, \mu(y)\, d\,y\,. \tag{1.1}$$

Die Integralkerne H_R, K_R sind erklärt durch $H_R(x,y) = K_R(x,y) = 0$ für $|x - y| > R$, und für $|x - y| \leqq R$ gelte

$$K_R(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n (n-2)\,|x-y|^{n-2}} + w_R(|x-y|), & n > 2\,, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{|x-y|} + w_R(|x-y|), & n = 2\,, \end{cases} \tag{1.2}$$

und

$$H_R(x,y) = \Delta_y K_R(x,y), \quad x \neq y\,. \tag{1.2'}$$

Die Zahl $\omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ ist die Oberfläche der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel und die Funktion $w_R(r)$ sei in $0 \leqq r < \infty$ zweimal stetig differenzierbar

---

[1]) Es gibt eine gewisse Freiheit in der Wahl solcher Mittelwertgleichungen (vgl. [5], Kap. IV).

und so gewählt, daß $K_R = \frac{\partial K_R}{\partial n} = 0$[2]) wird für $|x - y| = r = R$.

Beweis: Schließt man den Punkt x durch eine kleine Kugel $|x-y| \leq \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < R$ aus dem Gebiet G aus, so besteht wegen $K_R = \frac{\partial K_R}{\partial n} = 0$ für $r = R$ die Gleichung

$$\int\limits_{\varepsilon \leq |x-y| \leq R} K_R(x,y)\, \mu(y)\, dy = -\int\limits_{\varepsilon \leq |x-y| \leq R} H_R(x,y)\, u(y)\, dy + \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \left\{ u(y) \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial n} - K_R(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} \right\} do.$$

Da die Funktion u stetig ist, strebt das Oberflächenintegral in bekannter Weise gegen $u(x)$. Die Funktion $\mu = -\Delta u$ ist ebenfalls stetig, so daß auch die beiden anderen Integrale für $\varepsilon \to 0$ konvergieren und gerade die gewünschte Gleichung (1.1) entsteht.

Die Gleichung (1.1) soll später auf einen umfassenderen Bereich von Funktionen u und μ fortgesetzt werden. Dabei sind vor allem die Eigenschaften von Integralen der Form

$$\int B_R(x,y)\, f(y)\, dy \tag{1.3}$$

von Bedeutung, die daher jetzt näher untersucht werden sollen.

Die von dem reellen Parameter $R > 0$ abhängende Schar von Integralkernen $B_R(x,y)$ möge den folgenden Bedingungen genügen:

1. $B_R(x,y)$ ist definiert für alle $R > 0$ als reelle Funktion von $r = |x - y|$ mit $0 < r < \infty$.
2. Es sei $B_R(x,y) = 0$ für $|x - y| > R$. In $0 \leq |x - y| \leq R$ existiere eine positive Zahl δ mit $0 < \delta < n$, so daß $|x - y|^{n-\delta} B_R(x,y)$ eine stetige Funktion von x, y ist für jedes feste $R > 0$.
3. Sei $\beta_R = \int |B_R(x,y)|\, dy > 0$ für alle $R > 0$, und es gelte $\lim\limits_{R \to 0} \beta_R = \beta_0 < \infty$.

Hilfssatz 1.2: *Ist die Funktion f über jedes beschränkte Gebiet des E_n im Sinne von* Lebesgue *integrierbar, dann gilt:*

(a) *Das Integral* (1.3) *existiert fast überall und ist als Funktion von x für jedes $R > 0$ über jedes beschränkte Gebiet integrierbar.*

(b) *Es sei $f_R(x) = \beta_R^{-1} \int B_R(x,y)\, f(y)\, dy$ mit $\beta_R = \int |B_R(x,y)|\, dy$, so gilt $\int\limits_G |f_R(x)|\, dx \leq M < \infty$ für alle $0 \leq R \leq R_0$.*

Beweis: (a) Für jedes beschränkte Gebiet G gilt die Ungleichung

$$\int\limits_{G_R} |f(x)|\, dx \int |B_R(x,y)|\, dy \leq \beta_R \int\limits_{G_R} |f(x)|\, dx.$$

Nach dem Satz von Fubini existiert dann auch $\int\limits_G dx \int |B_R(x,y)\, f(y)|\, dy$, ist dem obigen Integral gleich, und fast überall in G existiert $\int |B_R(x,y)\, f(y)| dy$.

---

[2]) $\frac{\partial K_R}{\partial n}$ bedeutet die Ableitung der Funktion K_R nach der äußeren Normalen auf der Kugel $|x - y| = r$.

(b) Es wird mittels einfacher Abschätzungen und Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\int\limits_G |f_R(x)|\,dx \leqq \beta_R^{-1} \int\limits_G dx \int |B_R(x,y)\,f(y)|\,dy \leqq \int\limits_{G_R} |f(x)|\,dx,$$

so daß der fragliche Ausdruck für $0 \leqq R \leqq R_0 < \infty$ beschränkt bleibt.

Sei $L^2(E_n)$ der Raum aller in E_n definierten komplexwertigen Funktionen $f(x)$, für die $\int |f(x)|^2 d\,x < \infty$ ausfällt, mit der Norm $\|f\| = \{\int |f(x)|^2 d\,x\}^{\frac{1}{2}}$ und dem Skalarprodukt $(f,g) = \int \overline{f(x)}\,g(x)\,dx$.

Hilfssatz 1.3: *Die Gleichung*[3])

$$g(x) = \int B_R(x,y)\,f(y)\,dy$$

definiert in L^2 eine Schar von Operatoren B_R mit dem Scharparameter $R > 0$, und es gilt:

(a) *B_R ist ein in ganz L^2 definierter, beschränkter, hermitescher Operator mit der Schranke $\|B_R\| \leqq \beta_R$, d. h. es gilt*

$$\|B_R f\| \leqq \beta_R \|f\| \tag{1.4}$$

für alle f aus L^2[4]).

(b) *Sind $B_{R_1}^{(1)}$ und $B_{R_2}^{(2)}$ zwei solche Operatoren, dann sind sie für alle $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ vertauschbar,*

$$B_{R_1}^{(1)} B_{R_2}^{(2)} = B_{R_2}^{(2)} B_{R_1}^{(1)}. \tag{1.5}$$

Beweis: (a) Sei G ein beschränktes Gebiet, so wird mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\int\limits_G \left|\int B_R(x,y)\,f(y)\,dy\right|^2 dx \leqq \beta_R \int\limits_G dx \int |B_R(x,y)|\,|f(y)|^2 dy$$

$$\leqq \beta_R^2 \int\limits_{G_R} |f(y)|^2 dy \leqq \beta_R^2 \|f\|^2$$

für alle $R > 0$ und jedes f aus L^2, woraus die Behauptung folgt. Da der Integralkern $B_R(x,y)$ reell und symmetrisch ist, so gilt für alle f, g aus L^2 die Gleichung $(f, B_R g) = (B_R f, g)$, was mit der Hermitizität des Operators B_R äquivalent ist.

(b) Wir zeigen, daß für feste x, z aus E_n die Gleichung

$$\int B_{R_1}^{(1)}(|x-y|)\,B_{R_2}^{(2)}(|y-z|)\,dy = \int B_{R_2}^{(2)}(|x-y|)\,B_{R_1}^{(1)}(|y-z|)\,dy$$

besteht. Führt man nämlich anstelle der alten Integrationsvariablen y neue y' ein durch $y = x + y'$ im ersten Integral und $y = z - y'$ im zweiten Integral, so erhält man für beide Integrale denselben Ausdruck $\int B_{R_1}^{(1)}(|y'|)\,B_{R_2}^{(2)}(|x + y' - z|)\,dy'$.

Hilfssatz 1.4: *Genügt $B_R(x,y)$ außer den Bedingungen* 1, 2 *und* 3 *noch der Forderung $B_R(x,y) \geqq 0$ für alle x, y aus E_n, dann gilt:*

(a) *Ist $f(x)$ in einem Gebiet G stetig, dann strebt die Funktionenfolge $f_R(x) = \beta_R^{-1} \int B_R(x,y)\,f(y)\,dy$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich G' von G gleichmäßig gegen $f(x)$ für $R \to 0$.*

---

[3]) Die Funktion $f(x)$ ist offenbar über jedes beschränkte Gebiet integrierbar; daher existiert das Integral $\int B_R(x,y)\,f(y)\,d\,y$ für fast alle x aus E_n.

[4]) Vgl. hierzu [14], wo sich ein entsprechender Satz für unendliche Matrizen findet.

(b) *Ist f aus L^2, so gilt für $R \to 0$*

$$\|f - \beta_R^{-1} B_R f\| \to 0 .$$

Beweis: Es sei R_0 eine solche positive Zahl, daß mit G' auch das abgeschlossene Gebiet G'_{R_0} in G liegt. Dann ist die Funktion $f(x)$ in G'_{R_0} gleichmäßig stetig, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon)$, so daß $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ wird für $|x - y| < \delta(\varepsilon)$. Ist dann x aus G' und $R < \mathrm{Min}(R_0, \delta)$, so gilt wegen $\beta_R = \int_{\mathbf{C}} B_R(x, y)\, dy$ die Abschätzung

$$|f_R(x) - f(x)| = \beta_R^{-1} \left| \int B_R(x,y) \{f(y) - f(x)\}\, dy \right| < \varepsilon .$$

(b) Jede Funktion f aus L^2 läßt sich im Quadratmittel beliebig genau durch eine stetige Funktion f' approximieren, für die außerhalb eines beschränkten Gebietes die Gleichung $f'(x) = 0$ gilt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein solches f' und ein zugehöriges Gebiet G, so daß $\|f - f'\| < \frac{\varepsilon}{3}$ wird. Mit Hilfe von (a) folgt dann, daß es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so daß der Ausdruck

$$\left| f'(x) - \beta_R^{-1} \int B_R(x,y) f'(y)\, dy \right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{3^2 m(G_{R_0})}$$

wird für $R < \mathrm{Min}(R_0, \delta)$ gleichmäßig in E_n, wobei $m(G_{R_0})$ das Maß des Gebietes G_{R_0} bedeutet. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|f - \beta_R^{-1} B_R f\| &\leqq \|f - f'\| + \|f' - \beta_R^{-1} B_R f'\| + \|\beta_R^{-1} B_R (f - f')\| \\ &\leqq 2\, \|f - f'\| + \|f' - \beta_R^{-1} B_R f'\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Zum Abschluß dieses Paragraphen sollen drei Integralkerne D_R, H_R, K_R definiert werden. Die beiden letzteren erfüllen die in Hilfssatz 1.1 gestellten Forderungen.

Definition 1.1: *Es sei* $D_R(x,y) = H_R(x,y) = K_R(x,y) = 0$ *in* $|x - y| > R$. *Für* $r = |x - y| \leqq R$ *gelte*

$$D_R(x,y) = 1, \tag{1.6}$$

$$H_R(x,y) = \frac{n(n+2)}{2\,\omega_n R^n} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{1.7}$$

$$K_R(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \left\{ \log \dfrac{R}{r} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{r^2}{R^2} - \dfrac{r^4}{4R^4} \right\}, & n = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{\omega_n} \left\{ \dfrac{1}{n-2} \dfrac{1}{r^{n-2}} - \dfrac{n(n+2)}{8(n-2) R^{n-2}} + \dfrac{n+2}{4} \dfrac{r^2}{R^n} - \dfrac{n}{8} \dfrac{r^4}{R^{n+2}} \right\}, & n \geqq 3 . \end{cases} \tag{1.8}$$

Die Bedingung $\Delta K_R(x,y) = H_R(x,y)$ für $x \neq y$ ist erfüllt. Ferner wird $K_R = \frac{\partial K_R}{\partial r} = \frac{\partial^2 K_R}{\partial r^2} = 0$ für $r = R$. Die Funktionen D_R, H_R, K_R sind positiv für $r = |x - y| < R$, und man berechnet leicht, daß die Integrale

$$\int D_R(x,y)\, dy = \frac{\omega_n R^n}{n}, \quad \int H_R(x,y)\, dy = 1, \quad \int K_R(x,y)\, dy = \frac{R^2}{2(n+4)} \tag{1.9}$$

sind für alle x aus E_n und alle $R > 0$.

§ 2. Definition der Operatoren A und $\tilde{A}$. Die Adjungierte von A

Mit $\mathfrak{H} = L^2(E_n)$ wird der Hilbertsche Raum aller komplexwertigen Funktionen $f(x)$ mit x aus E_n bezeichnet, für die im Sinne von LEBESGUE $\int |f(x)|^2 dx < \infty$ ausfällt und in dem das innere Produkt durch $(f, g) = \int \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$ erklärt ist. In dieser Arbeit soll der nun zu definierende Differentialoperator A in $\mathfrak{D}_A$, $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{H}$, auf einige Eigenschaften hin untersucht werden. In diesem Paragraphen wird der adjungierte Operator mit Hilfe einer Mittelwertgleichung bestimmt.

Definition 2.1: *Der Operator A sei erklärt durch*

$$A u = -\Delta u + 2i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} u + b u \tag{2.1}$$

im Definitionsbereich aller Funktionen $u(x)$ mit $\mathfrak{D}_A$:

1. *$u(x)$ zweimal stetig differenzierbar in E_n,*
2. *$u(x) = 0$ außerhalb eines individuellen beschränkten Gebietes.*

Die Koeffizienten $a_\nu(x)$, $b(x)$ sollen *stets* den folgenden Voraussetzungen genügen:

1. *$a_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ sind in E_n erklärte, reelle, integrierbare Funktionen;*
2. *$a_\nu(x)$ stetig differenzierbar in E_n;*
3. *$b(x)$ sei lokal quadratisch integrierbar*[5]*). Ferner möge es eine positive Zahl α geben, so daß das folgende Integral (2.2) existiert und für alle $0 < R < 1$ und jedes beschränkte Gebiet G gilt*

$$\int\limits_{|x-y| \leq R} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy \leq M < \infty \tag{2.2}$$

mit einer Konstanten $M = M(G)$ für alle x aus G.

Unter diesen Voraussetzungen ist, wie man leicht nachprüfen kann, A in $\mathfrak{D}_A$ ein hermitescher Operator und damit $A \subseteq A^{**} \subseteq A^{*}$[6]). Die in § 1 angekündigte Fortsetzung des Operators A auf einen umfassenderen Definitionsbereich leistet der Operator $\tilde{A}$ in $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$.

Definition 2.2: *Es sei $\tilde{A} u = f$, wenn u und f aus $\mathfrak{H}$ sind und fast überall in E_n der Mittelwertgleichung*

$$\begin{aligned} u(x) = \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy + \int K_R(x,y) \Big\{ f(y) - b(y)\, u(y) + \\ + i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu} u(y) \Big\}\, dy + 2i \int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu} a_\nu(y)\, u(y)\, dy \end{aligned} \tag{2.3}$$

genügen für alle $R > 0$. Der Definitionsbereich von $\tilde{A}$ ist daher erklärt durch

$$\mathfrak{D}_{\tilde{A}}:\ \int |u(x)|^2 dx < \infty,\ \int |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Diese Definition ist sinnvoll: Sämtliche Integrale existieren fast überall und sind lokal quadratisch integrierbare Funktionen von x; denn ist G ein

---

[5]) Es ist also $\int\limits_{|x| \leq R} |b(x)|^2 dx < \infty$ für positive R.

[6]) Bezüglich der hier verwendeten Symbolik siehe etwa [13].

beschränktes Gebiet, so wird z. B.

$$\left|\int K_R(x,y)\, b(y)\, u(y)\, dy\right|^2 \leq \text{const.} \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy \cdot \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|u(y)^2|}{|x-y|^{n+2\delta-\alpha}}\, dy,$$

da $|K_R(x,y)| \leq \text{const.}\, |x-y|^{-n+2-\delta}$ ist für irgendein $\delta > 0$, alle $n \geqq 2$ und alle x, y. Also ist für $0 < 2\delta < \alpha$ mit (2.2)

$$\int\limits_G \left| \int K_R(x,y)\, b(y)\, u(y)\, dy\right|^2 dx \leq \text{const.}\, M \cdot R^{\alpha-2\delta}\, \|u\|^2 < \infty\,.$$

Die Zuordnung von u zu f ist eindeutig. Gäbe es nämlich zu einem u ein f_1 und ein f_2, die (2.3) genügen, so muß für alle $R > 0$ und fast überall $\int K_R(x,y)\,(f_1(y) - f_2(y))\, dy = 0$ sein. Dann folgt aber aus Hilfssatz 1.4 mit $k_R = \int K_R(x,y)\, dy$, daß wegen $\lim\limits_{R\to 0} \|k_R^{-1} K_R(f_1 - f_2)\| = \|f_1 - f_2\| = 0$ die Gleichung $f_1 = f_2$ fast überall gilt. Diese Zuordnung ist auch linear, so daß $\tilde{A}$ in $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ ein eindeutiger linearer Operator ist.

Die nächsten Sätze haben das Ziel, zu zeigen, daß $\tilde{A}$ in $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ der zu A in $\mathfrak{D}_A$ adjungierte Operator A^* ist.

Satz 2.1: *$\tilde{A}$ in $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ ist eine Fortsetzung des Operators A in $\mathfrak{D}_A$, d. h. es gilt*

$$A \subseteq \tilde{A}. \tag{2.4}$$

Beweis: Wird $A\,u = f$ und $-\Delta\, u = \mu$ gesetzt für u aus $\mathfrak{D}_A$, dann ist μ eine stetige Funktion und u und μ genügen nach Hilfssatz 1.1 der Gleichung (1.1). Aus der Definitionsgleichung (2.1) folgt daher

$$u(x) = \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy + \\ + \int K_R(x,y) \left\{ f(y) - b(y)\, u(y) - 2i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(y) \frac{\partial u}{\partial y_\nu} - i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu} u(y) \right\} dy\,.$$

Der Kern $K_R(x,y)$ wird für $y \to x$ nur wie $|x-y|^{2-n}$ bzw. $\log \frac{1}{|x-y|}$ singulär, so daß man einen Bestandteil der obigen Gleichung partiell integrieren kann; und zwar gilt

$$-2i \int K_R(x,y) \frac{\partial (a_\nu u)}{\partial y_\nu}\, dy = 2i \int \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\, a_\nu(y)\, u(y)\, dy\,, \tag{2.5}$$

wodurch die gewünschte Gleichung (2.3) entsteht.

Satz 2.2: *Der Operator $\tilde{A}$ ist eine Fortsetzung der Adjungierten A^* des Operators A, d. h. es gilt*

$$A^* \subseteq \tilde{A}\,. \tag{2.6}$$

Beweis: Es ist zu zeigen, daß für zwei Funktionen g, g^* aus $\mathfrak{H}$, die für alle u aus $\mathfrak{D}_A$ der Gleichung

$$(A\,u, g) = (u, g^*) \tag{2.7}$$

genügen, die Funktion g in $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ liegt und die Gleichung $g^* = \tilde{A}\, g$ besteht.

Zu diesem Zweck konstruieren wir eine Folge von Funktionen $K_{R,\varepsilon}(x,y)$, die nur von $r = |x-y|$ und dem Parameter ε mit $0 < \varepsilon < R$ abhängen und erklärt sind durch die Gleichung

$$K_{R,\varepsilon}(x,y) = \begin{cases} K_R(x,y), & \varepsilon < r, \\ \alpha + \beta(r^2 - \varepsilon^2) + \gamma(r^4 - \varepsilon^4), & 0 \leqq r \leqq \varepsilon, \end{cases} \tag{2.8}$$

mit einer Funktion $K_R(x,y)$ wie in (1.8) und noch passend zu wählenden Konstanten α, β, γ. Dann ist

$$H_{R,\varepsilon}(x,y) = \Delta_y K_{R,\varepsilon}(x,y) = \begin{cases} H_R(x,y), & \varepsilon < r, \\ 2n\beta + 4(n+2)\gamma r^2, & 0 \leqq r \leqq \varepsilon. \end{cases} \tag{2.9}$$

Die Konstanten α, β, γ sollen so gewählt werden, daß $K_{R,\varepsilon}(x,y)$ nach $r = |x-y|$ an der Stelle $r = \varepsilon$ zweimal stetig differenzierbar wird. Damit ist dann für beliebige, aber fest gewählte R, x, ε die Funktion $K_{R,\varepsilon}(x,y)$ zweimal stetig nach $y_1, \ldots, y_n$ differenzierbar und eine Funktion aus $\mathfrak{D}_\Delta$. Die Zahlen α, β, γ hängen von ε ab, und zwar gelten nach Definition 1.1 und (2.8) für $\varepsilon \to 0$ die Relationen

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n\,\varepsilon^{n-2}} + O(1), & n > 2, \quad \beta = -\dfrac{n+2}{4\,\omega_n\,\varepsilon^n} + O(1), \quad n \geqq 2, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{\varepsilon} + O(1), & n = 2, \quad \gamma = \dfrac{n}{8\,\omega_n\,\varepsilon^{n+2}} + O\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad n \geqq 2. \end{cases} \tag{2.10}$$

Die Funktion $K_{R,\varepsilon}(x,y)$ kann man für feste R, ε, x in (2.7) einsetzen und erhält mit der Abkürzung $h = g^* - b\,g + i\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu}\, g$ die Gleichung

$$\begin{aligned} &\int K_{R,\varepsilon}(x,y)h(y)\,dy + 2i\int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_{R,\varepsilon}(x,y)}{\partial y_\nu}\, a_\nu(y)\, g(y)\,dy + \\ &\qquad + \int H_{R,\varepsilon}(x,y)\, g(y)\,dy = 0\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Diese Gleichung gilt für alle $\varepsilon > 0$. Wir wollen versuchen, hierin ε gegen Null streben zu lassen. Unter dem $L^2(G)$-Mittel einer lokal quadratisch integrierbaren Funktion $v(x)$ über ein beschränktes Gebiet G des E_n möge im folgenden

$$\|v\|_G = \left(\int_G |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

verstanden werden.

Das erste Integral in (2.11) konvergiert im $L^2(G)$-Mittel gegen $\int K_R(x,y) \times h(y)\,dy$. Das läßt sich zeigen, indem man dieses Integral der Bedeutung von h nach in drei Summanden zerlegt und die Behauptung für jeden einzeln nachweist. Wie das geschehen kann, sei am Beispiel eines Summanden gezeigt: Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$\left|\int \{K_{R,\varepsilon}(x,y) - K_R(x,y)\}\, b(y)\, g(y)\,dy\right|^2 \leqq$$

$$\leqq \int\limits_{|x-y| \leqq \varepsilon} |x-y|^{n-4+\alpha}\, |K_{R,\varepsilon}(x,y) - K_R(x,y)|^2\, |g(y)|^2\,dy \int\limits_{|x-y| \leqq \varepsilon} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\,dy\,.$$

In $|x-y| \leq \varepsilon$ gilt nach (2.8) und (2.10) die Abschätzung

$$|x-y|^{n-4+\alpha}\,|K_{R,\varepsilon}(x,y)-K_R(x,y)|^2 \leq \text{const.}\ |x-y|^{-n-2\delta+\alpha}$$

für alle $n \geq 2$ und mit einem δ so, daß $0 < 2\,\delta < \alpha$ ist. Somit wird schließlich mit (2.2) und nach Hilfssatz 1.2

$$\int_G \Big|\int \{K_{R,\varepsilon}(x,y)-K_R(x,y)\}\,b(y)\,g(y)\,dy\Big|^2\,dx \leq \text{const.}\ M\,\|g\|^2\,\varepsilon^{\alpha-2\delta}\to 0$$

$$\text{für } \varepsilon \to 0\,.$$

Entsprechend folgt die Konvergenz des zweiten Integrals in (2.11) gegen $2\,i\int\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial K_R}{\partial y_\nu}\,a_\nu g\,dy$. Sei wieder G ein beschränktes Gebiet, dann folgt aus der Stetigkeit der a_ν, daß es eine Konstante $M'(G)$ gibt, so daß $|a_\nu(x)| \leq M' < \infty$ bleibt für $\nu = 1,\ldots,n$ und x aus G_R. Daher ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\Big|\int\Big\{\frac{\partial K_{R,\varepsilon}(x,y)}{\partial y_\nu}-\frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\Big\}\,a_\nu(y)\,g(y)\,dy\Big|^2 \leq$$

$$\leq \text{const.}\ M'^2 \int_{|x-y|\leq\varepsilon}\Big|\frac{\partial K_{R,\varepsilon}(x,y)}{\partial y_\nu}-\frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\Big|\,dy\ \times$$

$$\times \int_{|x-y|\leq\varepsilon}\Big|\frac{\partial K_{R,\varepsilon}(x,y)}{\partial y_\nu}-\frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\Big|\,|g(y)|^2\,dy\,.$$

In $|x-y| \leq \varepsilon$ ist $\Big|\frac{\partial K_{R,\varepsilon}(x,y)}{\partial y_\nu}\Big| \leq \text{const.}\ \varepsilon^{1-n}$ für $n \geq 2$ und $\Big|\frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\Big| \leq \text{const.}\ \times$ $\times\,|x-y|^{1-n}$, so daß man aus der Ungleichung $\Big|\frac{\partial K_{R,\varepsilon}(x,y)}{\partial y_\nu}-\frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\Big| \leq \text{const.}\ \times$ $\times\,|x-y|^{1-n}$ die Abschätzung erhält:

$$\int_G\Big|\int\Big\{\frac{\partial K_{R,\varepsilon}(x,y)}{\partial y_\nu}-\frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\Big\}\,a_\nu(y)\,g(y)\,dy\Big|^2\,dx \leq \text{const.}\ M'^2\,\|g\|^2\cdot\varepsilon^2 \to 0 \text{ für } \varepsilon\to 0.$$

Das dritte Integral in (2.11) endlich strebt gegen $-g(x)+\int H_R(x,y)\ \times$ $\times\,g(y)\,dy$; denn hier ist mit dem in (1.6) erklärten diskontinuierlichen Faktor

$$\int\{H_{R,\varepsilon}(x,y)-H_R(x,y)\}\,g(y)\,dy =$$

$$=\int D_\varepsilon(x,y)\,\{2\,n\,\beta+4(n+2)\,\gamma\,|x-y|^2\}\,g(y)\,dy-\int D_\varepsilon(x,y)\,H_R(x,y)\,g(y)\,dy\,.$$

Offenbar gilt $2\,n\,\beta\int D_\varepsilon(x,y)\,dy \to -\frac{n+2}{2}$ und $4(n+2)\,\gamma\int D_\varepsilon(x,y)\,|x-y|^2\,dy \to$ $\to \frac{n}{2}$ für $\varepsilon \to 0$. Also folgt aus Hilfssatz 1.4 (b), daß das erste Integral der rechten Seite dieser Gleichung sogar im Mittel über den E_n, insbesondere also im Mittel über jedes beschränkte Gebiet G, gegen die Funktion $-g(x)$ konvergiert. Für das zweite Integral der rechten Seite gilt, da aus (1.7) die Ungleichung $|H_R(x,y)| \leq \text{const.}$ folgt, die Abschätzung $\int\big|\int D_\varepsilon(x,y)\,H_R(x,y)\ \times$ $\times\,g(y)\,dy\big|^2 dx \leq \text{const.}\ \varepsilon^{2n}\,\|g\|^2 \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

Daher genügen die Funktionen g und g^* fast überall der Mittelwertgleichung

$$g(x)=\int H_R(x,y)\,g(y)\,dy+\int K_R(x,y)\Big\{g^*(y)-b(y)\,g(y)+$$

$$+\,i\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu}\,g(y)\Big\}\,dy+2i\int\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\,a_\nu(y)\,g(y)\,dy$$

und nach Definition 2.2 folgt somit $\tilde{A}\, g = g^*$.

Satz 2.3: *Die Adjungierte $\tilde{A}^*$ von $\tilde{A}$ ist eine Fortsetzung von A, d. h. es gilt*

$$A \subseteq \tilde{A}^* . \tag{2.12}$$

Beweis: Es ist zu zeigen: Liegt u in $\mathfrak{D}_A$, dann gilt für alle v aus $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$

$$(\tilde{A}\, v, u) = (v, A\, u) . \tag{2.13}$$

Ist die Funktion u aus $\mathfrak{D}_A$, dann ist $-\Delta\, u = \mu$ stetig und es gibt ein beschränktes Gebiet G, außerhalb dessen $u(x) = \mu(x) = 0$ gilt. Die Funktionen u und μ genügen nach Hilfssatz 1.1 der Mittelwertgleichung

$$u(x) = \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy + \int K_R(x,y)\, \mu(y)\, dy$$

für alle $R > 0$. Die Funktionen v und $g = \tilde{A}\, v$ genügen der Gleichung (2.3) Multipliziert man die obige Gleichung mit $\overline{v(x)}$ und integriert so erhält man

$$\begin{aligned} \int u(x)\, \overline{v(x)}\, dx = \int \overline{v(x)}\, dx \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy\, + \\ + \int \overline{v(x)}\, dx \int K_R(x,y)\, \mu(y)\, dy , \end{aligned} \tag{2.14}$$

und aus (2.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int u(x)\, \overline{v(x)}\, dx = \int u(x)\, dx \int H_R(x,y)\, \overline{v(y)}\, dy\, - \\ -2i \int u(x)\, dx \int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\, a_\nu(y)\, \overline{v(y)}\, dy\, + \\ + \int u(x)\, dx \int K_R(x,y) \left\{ \overline{g(y)} - b(y)\, \overline{v(y)} - i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu}\, \overline{v(y)} \right\} dy . \end{aligned} \tag{2.14'}$$

Diese beiden Gleichungen sollen voneinander subtrahiert werden. Dabei erkennt man, daß

$$\int u(x)\, dx \int H_R(x,y)\, \overline{v(y)}\, dy = \int \overline{v(x)}\, dx \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy$$

ist, denn H_R ist ein hermitescher Operator. Wegen $\frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu} = - \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial x_\nu}$ erhält man nach Vertauschung der Integrationsreihenfolgen und durch partielle Integration

$$\begin{aligned} -2i \int u(x)\, dx \int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\, a_\nu(y)\, \overline{v(y)}\, dy \\ = -2i \int \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)\, \overline{v(x)}\, dx \int K_R(x,y)\, \frac{\partial u}{\partial y_\nu}\, dy , \end{aligned}$$

so daß die Subtraktion von (2.14) und (2.14') die Gleichung

$$\begin{aligned} \int \overline{v(x)}\, dx \int K_R(x,y)\, \mu(y)\, dy = -2i \int \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)\, \overline{v(x)}\, dx \int K_R(x,y)\, \frac{\partial u}{\partial y_\nu}\, dy\, + \\ + \int \left\{ \overline{g(x)} - b(x)\, \overline{v(x)} - i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu}\, \overline{v(x)} \right\} dx \int K_R(x,y)\, u(y)\, dy \end{aligned}$$

ergibt. Die Funktionen u, $\frac{\partial u}{\partial x_\nu}$, μ sind stetig. Dividiert man daher die letzte

Gleichung durch $k_R = \int K_R(x, y)\, dy$ und läßt R gegen Null streben, so folgt aus Hilfssatz 1.4 (a)

$$\int \overline{v(x)}\, \mu(x)\, dx = \int \left\{ \overline{g(x)} - b(x)\, \overline{v(x)} - i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} \overline{v(x)} \right\} u(y)\, dx - \\ - 2i \int \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)\, \overline{v(x)}\, \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\, dx .$$

Diese Beziehung aber ist äquivalent mit Gleichung (2.13), womit der Satz 2.3 bewiesen ist.

Satz 2.4: *Die Adjungierte A^* von A ist identisch mit dem Operator $\tilde{A}$, d. h. es gilt*

$$\tilde{A} = A^*. \tag{2.15}$$

Beweis: Aus $A \subseteq \tilde{A}^*$ folgt zunächst, daß $\tilde{A}^*$ als Fortsetzung von A dicht in $\mathfrak{H}$ definiert ist und damit $\tilde{A}^{**}$ existiert und eine Fortsetzung von $\tilde{A}$ ist: $\tilde{A} \subseteq \tilde{A}^{**}$. Aus $A \subseteq \tilde{A}^*$ folgt $\tilde{A}^{**} \subseteq A^*$, was mit der Ungleichung $A^* \subseteq \tilde{A} \subseteq \tilde{A}^{**}$ zusammen die Behauptung ergibt.

§ 3. Der Definitionsbereich von A^*

Die Lösungen u und f der Gleichung $A^* u - \lambda u = f$ genügen nach § 2 einer Mittelwertgleichung der Form (2.3). Diese bietet eine einfache Handhabe, die Funktion u auf Beschränktheit und Differenzierbarkeit bei vorgegebenem f und gegebenen Koeffizienten a_ν, b zu untersuchen und so Aufschlüsse über den Charakter des Definitionsbereiches $\mathfrak{D}_{A^*}$ von A^*, insbesondere der Eigenlösungen von A^* zu irgendeinem komplexen λ, zu gewinnen.

Satz 3.1: *Seien u und f zwei quadratisch integrierbare Funktionen, die der Mittelwertgleichung*

$$\begin{aligned} u(x) = \int H_R(x, y)\, u(y)\, dy + 2i \int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(x, y)}{\partial y_\nu}\, a_\nu(y)\, u(y)\, dy + \\ + \int K_R(x, y) \left\{ f(y) + \lambda\, u(y) - b(y)\, u(y) + i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu} u(y) \right\} dy \end{aligned} \tag{3.1}$$

genügen für $n > 2$[7]) und ein komplexes λ. Es sei ferner G ein (nicht notwendig beschränktes) Gebiet und R_0 irgendeine positive Zahl. Die Koeffizienten a_ν, b mögen der Ungleichung

$$|\lambda|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu(x)|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} \right|^2 + \int\limits_{|x-y| \leq R} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy \leq M \tag{3.2}$$

genügen mit einer Konstanten $M < \infty$ für alle x aus G_{R_0} und $0 < R < R_0$ so, daß die Kugel $|y - x| \leq R$ noch ganz in G_{R_0} liegt. Dann gibt es eine Zahl R^* mit $0 < R^* < R_0$, so daß u in G der Ungleichung

$$|u(x)|^2 \leq c_1 R^\alpha \int\limits_{|x-y| \leq R} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy + c_2 R^{-n} \int\limits_{|x-y| \leq R} |u(y)|^2\, dy \tag{3.3}$$

---

[7]) Der Einfachheit halber soll der Fall $n = 2$ nicht mitbehandelt werden, obwohl dort ganz entsprechende Aussagen gelten.

genügt für alle $0 < R < R^*$, *mit Konstanten* c_1, c_2, *die nicht von* R *abhängen.*

Beweis: Aus (3.1) und (3.2) erhält man für die Funktion $u(x)$ zunächst eine Abschätzung der Form[8])

$$|u(x)|^2 \leq \text{const.}\, R^\alpha \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy + \text{const.}\, R^{-n} \int\limits_{|x-y|\leq R} |u(y)|^2\, dy + $$
$$+ \text{const.} \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

für x aus G und alle $0 < R < R_0$, wobei mit const. nicht von R abhängende Konstanten gemeint sind. Ist $n - \alpha \leq 0$, so folgt die Behauptung (3.3) unmittelbar. Wir dürfen daher $n - \alpha > 0$ voraussetzen. Dann gilt $R^{-n} \leq \leq R^{-\alpha} |x-y|^{-n+\alpha}$ in $|x-y| \leq R$, so daß die Ungleichung

$$\text{(3.4)}\quad |u(x)|^2 \leq c_1' R^\alpha \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy + c_2' R^{-\alpha} \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

entsteht. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\Gamma_{1,R}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c_1' R^\alpha}{|x-y|^{n-4+\alpha}}, & |x-y| \leq R; \\ 0, & |x-y| > R; \end{cases} \quad \Gamma_{2,R}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c_2' R^{-\alpha}}{|x-y|^{n-\alpha}}, & |x-y| \leq R; \\ 0, & |x-y| > R; \end{cases}$$

so erhält die Ungleichung (3.4) die einfache Gestalt

$$\text{(3.4')}\qquad |u(x)|^2 \leq \int \Gamma_{1,R}(x,y)\, |f(y)|^2 dy + \int \Gamma_{2,R}(x,y)\, |u(y)|^2 dy\,.$$

Es sei N die natürliche Zahl, die der Ungleichung $\frac{n}{\alpha} < N \leq \frac{n}{\alpha} + 1$ genügt. Dann erhält man durch Iteration von (3.4') für alle $0 < R < R^*$, mit $R^* = \frac{R_0}{N}$, die Abschätzung

$$|u(x)|^2 \leq \int \Gamma_{1,R}(x,y)\, |f(y)|^2 dy + \int \left\{ \sum_{\nu=1}^{N-1} \int \Gamma_{2,R}^{(\nu)}(x,z)\, \Gamma_{1,R}(z,y)\, dz \right\} |f(y)|^2 dy + $$
$$+ \int \Gamma_{2,R}^{(N)}(x,y)\, |u(y)|^2 dy,$$

wobei mit $\Gamma_{2,R}^{(\nu)}(x,y)$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ der ν-fach iterierte Integralkern $\Gamma_{2,R}(x,y)$ gemeint ist. $\Gamma_{1,R}$ und $\Gamma_{2,R}$ hängen nur von $|x-y|$ ab und daher auch alle daraus gebildeten iterierten Kerne. Da $\Gamma_{1,R} = \Gamma_{2,R} = 0$ ist für $|x-y| > R$, so ist auch $\Gamma_{2,R}^{(N)}(x,y) = 0$ für $|x-y| > N R$ und $\int \Gamma_{2,R}^{(\nu)}(x,z) \times \times \Gamma_{1,R}(z,y)\, dz = 0$ für $|x-y| > (\nu+1) R$. Nach bekannten Sätzen erhält man

$$\left| \int \Gamma_{2,R}^{(\nu)}(x,z)\, \Gamma_{1,R}(z,y)\, dz \right| \leq \text{const.}\, \frac{R^\alpha R^{-\nu\alpha} |x-y|^{\nu\alpha}}{|x-y|^{n-4+\alpha}} \leq \text{const.}\, \frac{R^\alpha}{|x-y|^{n-4+\alpha}}$$

in $|x-y| \leq (\nu+1) R$ für $\nu = 1, \ldots, N-1$ und

$$|\Gamma_{2,R}^{(N)}(x,y)| \leq \text{const.}\, \frac{|x-y|^{\alpha N - n}}{R^{\alpha N}} \leq \text{const.}\, R^{-n}$$

in $|x-y| \leq N R < R_0$, womit Satz 3.1 bewiesen ist.

Aus der Ungleichung (3.3) liest man ab, daß die quadratisch integrierbaren Lösungen der Gleichung (3.1), d. h. von $(A^* - \lambda)\, u = f$, in jedem beschränkten

---

[8]) Nach Hilfssatz 1.2 existieren diese Integrale fast überall.

Gebiet G gleichmäßig beschränkt bleiben, wenn die Funktion $f(x)$ für x aus E_n gleichmäßig beschränkt bleibt. Ist insbesondere $f = 0$, so erkennt man, daß die Eigenlösungen von $A^* u = \lambda u$ zu irgendeinem komplexen λ in jedem beschränkten Gebiet gleichmäßig beschränkt sind, da die Generalvoraussetzungen über die Koeffizienten a_ν, b in jedem solchen Gebiet gelten sollen.

Der nächste Hilfssatz soll erläutern, welche Art von Singularitäten der Koeffizient $b(x)$ etwa besitzen darf, damit die in (2.2) und (3.2) auftretenden Integrale beschränkt bleiben.

Hilfssatz 3.1: *Es sei* $b(x) = \varrho^{-\delta}$ *und* $\varrho(x) = \left\{\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu^2\right\}^{1/2}$ *mit* $\delta \geq 0$ *und* $1 \leq m \leq \leq n$. *Dann gilt für alle* x *aus* E_n *die Ungleichung*

$$\int\limits_{|x-y| \leq R} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy \leq M \tag{3.5}$$

mit einer Konstanten M *für alle* $0 < R < 1$, *wenn* α *und* δ *der Bedingung genügen:*

$$0 < 2\delta < 4 - \alpha \leq m. \tag{3.6}$$

Beweis: Wir führen den Beweis nur für $1 \leq m \leq n-2$. Zunächst läßt sich das Integrationsgebiet dadurch abändern, daß man es durch den Würfel $W: |x_\nu - y_\nu| \leq \leq R$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ ersetzt, wodurch das Integral vergrößert wird. Die Funktion $b(y)$ hängt nur von den ersten m Koordinaten $y_1, \ldots, y_m$ ab. Daher läßt sich die Integration in zwei aufeinander folgende Teilintegrationen über die Würfel W_1: $|x_\nu - y_\nu| \leq R$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ und $W_2: |x_\nu - y_\nu| \leq R$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ zerlegen:

$$\int\limits_{W} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy = \int\limits_{W_1} |b(y)|^2 dy_1 \ldots dy_m \int\limits_{W_2} \frac{dy_{m+1} \ldots dy_n}{|x-y|^{n-4+\alpha}}.$$

Mit den Abkürzungen $r_1^2 = \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - y_\nu)^2$ und $r_2^2 = \sum_{\nu=m+1}^{n} (x_\nu - y_\nu)^2$ wird $|x-y|^2 = r_1^2 + r_2^2$. Führt man nun im zweiten Integral Polarkoordinaten ein und setzt $\gamma = (n-m)^{1/2}$, $\beta = 4 - \alpha$, so gilt die Ungleichung

$$\int\limits_{W_2} \frac{dy_{m+1} \ldots dy_n}{|x-y|^{n-4+\alpha}} \leq \text{const.} \int\limits_{0}^{\gamma R} \frac{r_2^{n-m-1} dr_2}{(r_1^2 + r_2^2)^{\frac{n-\beta}{2}}} \leq \text{const.} \int\limits_{r_2=0}^{r_2=\gamma R} \frac{d(r_2^2)}{(r_1^2 + r_2^2)^{\frac{m-\beta+2}{2}}} \leq$$
$$\leq \text{const.}\, r_1^{\beta - m - \varepsilon}$$

für irgendeine positive Zahl ε und mit $\beta - m \leq 0$. Unter Heranziehung der Hölderschen Ungleichung erhält man daher mit den Abkürzungen $\frac{1}{p} = \frac{2\delta}{2\delta + m - \beta + \varepsilon}$ und $\frac{1}{q} = \frac{m - \beta + \varepsilon}{2\delta + m - \beta + \varepsilon}$ die Abschätzung

$$\int\limits_{|x-y| \leq R} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy \leq \text{const.} \int\limits_{W_1} \frac{dy_1 \ldots dy_m}{\varrho^{2\delta}\, r_1^{m-\beta+\varepsilon}} \leq$$
$$\leq \text{const.} \left\{\int\limits_{W_1} \frac{dy_1 \ldots dy_m}{\varrho^{2\delta + m - \beta + \varepsilon}}\right\}^{1/p} \left\{\int\limits_{W_1} \frac{dy_1 \ldots dy_m}{r_1^{2\delta + m - \beta + \varepsilon}}\right\}^{1/q}.$$

Auf Grund der Voraussetzung (3.6) ist für $\varepsilon = \frac{\beta}{2} - \delta$ die Zahl ε positiv und überdies $2\delta - \beta + m + \varepsilon < m$, womit sich die Beschränktheit des Integrals in (3.5) unmittelbar ergibt.

Satz 3.2: *Es sei G ein beschränktes Gebiet und u sowie f quadratisch integrierbare Lösungen der Mittelwertgleichung* (3.1). *Sei ferner R_0 eine positive Konstante. Sind dann die Funktionen f und b in G_{R_0} stetig, so ist u in G stetig differenzierbar. Darüber hinaus genügen u und f der Gleichung*

$$\int_B \bar{u}\, f\, dx = -\int_O \bar{u}\, \frac{\partial u}{\partial n}\, do + \int_B |\operatorname{grad} u|^2\, dx + i \int_B \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \bar{u}\, \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\, dx + \tag{3.7}$$
$$+ \int_B \left\{ b - \lambda + 2i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} \right\} |u|^2\, dx,$$

wobei B einen abgeschlossenen Teilbereich von G mit stückweise glatter Oberfläche bezeichnet.

Beweis: Nach Satz 3.1 ist eine Lösung $u(x)$ der Gleichung (3.1) unter den obigen Voraussetzungen gleichmäßig beschränkt in einem Gebiet G_{R^*} mit $0 < R^* < R_0$. Im folgenden sei stets R fest und kleiner als R^* gewählt. Dann läßt sich zunächst zeigen, daß u in G Hölderstetig ist.

Nach (3.1) gilt eine Darstellung der Form

$$u(x) = \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy + \int K_R(x,y)\, h(y)\, dy + \tag{3.8}$$
$$+ 2i \int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\, a_\nu(y)\, u(y)\, dy,$$

wobei die Funktionen u und h in G_{R^*} gleichmäßig beschränkt sind. Bekanntlich sind die beiden ersten Integrale in (3.8) in G stetig differenzierbar[9]). Für das dritte Integral der Gleichung (3.8) erhält man für x, y aus G die Abschätzung

$$\left| \int \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \frac{\partial K_R(x,z)}{\partial z_\nu} - \frac{\partial K_R(y,z)}{\partial z_\nu} \right\} a_\nu(z)\, u(z)\, dz \right| \le$$
$$\le \text{const.} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x-z| \le R} \left| \frac{\partial K_R(x,z)}{\partial z_\nu} - \frac{\partial K_R(y,z)}{\partial z_\nu} \right| dz + \text{const.} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{S_R(x,y)} \left| \frac{\partial K_R(y,z)}{\partial z_\nu} \right| dz,$$

wobei $S_R(x,y)$ das Gebiet der Punkte z ist, für die $R - |x-y| \le |y-z| \le$ $\le R + |x-y|$ gilt. Wählt man daher $|x-y| \le \frac{R}{2}$, so ist für z aus $S_R(x,y)$ der Integralkern $\frac{\partial K_R(y,z)}{\partial z_\nu}$ beschränkt und das zweite Integral der rechten Seite läßt sich abschätzen durch const. $|x-y|$. Die Differenz $\left| \frac{\partial K_R(x,z)}{\partial z_\nu} - \frac{\partial K_R(y,z)}{\partial z_\nu} \right|$ im ersten Integral läßt sich vergrößern durch eine Summe von Termen der Form const. $|x-y|^{1/2}\, |x-z|^{-e_1}\, |y-z|^{-e_2}$ mit positiven Zahlen e_1, e_2, für die

9) Vgl. dazu [9], S. 203 und [8], S. 284.

$e_1 + e_2 < n$ ist, so daß sich das Integral $\int\limits_{|x-z|\le R} \left|\frac{\partial K_R(x,z)}{\partial z_\nu} - \frac{\partial K_R(y,z)}{\partial z_\nu}\right| dz$ abschätzen läßt durch const. $|x-y|^{1/2}$, da bekanntlich $\int\limits_{|x-z|\le R} |x-z|^{-e_1}\,|y-z|^{-e_2}\,dz$ beschränkt bleibt für solche e_1, e_2. Somit ist

$$\int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(x,z)}{\partial z_\nu}\, a_\nu(z)\, u(z)\, dz - \int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(y,z)}{\partial z_\nu}\, a_\nu(z)\, u(z)\, dz = O(|x-y|^{1/2})$$

für x, y aus G und $2\,|x-y| \le R < R^*$.

Eine Lösung u der Gleichung (3.1) ist also unter den obigen Voraussetzungen Hölderstetig mit den Exponenten $\frac{1}{2}$. Die Koeffizienten a_ν waren als stetig differenzierbar vorausgesetzt, so daß auch $a_\nu u$ Hölderstetig mit demselben Exponenten wird. Ferner ist $\int K_R(x,y)\, dy$ unabhängig von x und daher $\int \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\, dy = 0$ für alle x aus E_n. Dann folgt aber bekanntlich, daß auch das dritte Integral in (3.8) stetig differenzierbar ist und man für die Ableitung an der Stelle x erhält[9])

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_k} \int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\, a_\nu(y)\, u(y)\, dy \\ &= \int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 K_R(x,y)}{\partial x_k\, \partial y_\nu} \{a_\nu(y)\, u(y) - a_\nu(x)\, u(x)\}\, dy. \end{aligned} \tag{3.8'}$$

Für diejenigen x aus G und $R > 0$, für die auch noch die Kugel $|y-x| \le R$ in G liegt, kann man durch partielle Integration gemäß (2.5) das dritte Integral in (3.8) umformen. Da u Hölderstetig ist, so ist das Integral $\int K_R(x,y)\, u(y)\, dy$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion für x in G. Aus (3.8′) folgt wegen $\int H_R(x,y)\, dy = 1$ die Darstellung

$$\Delta_x \int K_R(x,y)\, u(y)\, dy = -u(x) + \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy,$$

so daß also die Gleichung

$$\begin{aligned} &\int\limits_B \left\{\int K_R(x,y)\, \overline{u(y)}\, dy \left(u(x) - \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy\right)\right\} dx = \\ &-\int\limits_{\dot{B}} \left\{\int K_R(x,y)\, \overline{u(y)}\, dy\, \frac{\partial}{\partial n} \int K_R(x,y)\, u(y)\, dy\right\} do + \\ &+\int\limits_B \left|\operatorname{grad}_x \int K_R(x,y)\, u(y)\, dy\right|^2 dx \end{aligned} \tag{3.9}$$

besteht. Aus (3.1) folgt die Gleichung

$$u(x) - \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy = \int K_R(x,y)\, h(y)\, dy$$

und damit

$$\begin{aligned} &\int\limits_B \left\{\int K_R(x,y)\, \overline{u(y)}\, dy \int K_R(x,y)\, h(y)\, dy\right\} dx = \\ &-\int\limits_{\dot{B}} \left\{\int K_R(x,y)\, \overline{u(y)}\, dy\, \frac{\partial}{\partial n} \int K_R(x,y)\, u(y)\, dy\right\} do + \\ &+\int\limits_B \left|\operatorname{grad}_x \int K_R(x,y)\, u(y)\, dy\right|^2 dx \end{aligned} \tag{3.9'}$$

mit der Abkürzung

$$(3.10)\qquad h = f + \lambda u - b u - 2 i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} - i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} u .$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung (3.9′) durch $k_R^2 = (\int K_R(x, y)\, dy)^2$ und läßt R gegen Null konvergieren, so erhält man nach Hilfssatz 1.4 die gesuchte Gleichung (3.7), wenn man beachtet, daß die Gleichung $\operatorname{grad} \int K_R u\, dy = \int K_R \operatorname{grad} u\, dy$ besteht.

Zusatz zu Satz 3.2: *Eine Lösung u der Gleichung* (3.1) *genügt in G einer Lipschitzbedingung, wenn*

$$(3.11)\qquad b(x) = \varrho^{-\delta},\ \varrho(x) = \left\{ \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu^2 \right\}^{1/2},\quad 0 \leqq \delta \leqq 1,\ 3 \leqq m \leqq n$$

ist.

Beweis: Zunächst ist für $\alpha = 1$ nach Hilfssatz 3.1 die Bedingung (3.5) erfüllt, da die Ungleichung $2\delta \leqq 3 \leqq m$ besteht. Daher ist eine Lösung der Mittelwertgleichung (3.1) in jedem beschränkten Gebiet gleichmäßig beschränkt (Satz 3.1). Um die Hölderstetigkeit von u einzusehen, muß man sich jetzt davon überzeugen, ob auch der Term $v(x) = \int K_R(x, y)\, b(y)\, u(y)\, dy$ Hölderstetig ist; denn für die anderen Integrale aus (3.1) ändern sich die obigen Überlegungen nicht.

Die Hölderstetigkeit von $v(x)$ folgt aber leicht aus der Tatsache, daß man $|K_R(x,z) - K_R(y,z)|$ abschätzen kann durch eine Summe von Termen der Form $\text{const.}\, |x - y|^{1/2}\, |x - z|^{-e_1}\, |y - z|^{-e_2}$ mit positiven Zahlen e_1, e_2 und $e_1 + e_2 \leqq n - \frac{3}{2}$, so daß unter der Voraussetzung (3.11) das Integral $\int |K_R(x,z) - K_R(y,z)|\, |b(z)|\, dz \leqq \text{const.}\, |x - y|^{1/2}$ wird für x, y aus G und hinreichend kleines $R > 0$; denn mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung erhält man mit den Abkürzungen $\frac{1}{p} = \frac{e_1}{e_1 + e_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{e_2}{e_1 + e_2}$ die Abschätzung

$$\int\limits_{G_R} \frac{|b(z)|}{|x - z|^{e_1}\, |y - z|^{e_2}}\, dz \leqq \left\{ \int\limits_{G_R} \frac{b(z)}{|x - z|^{e_1 + e_2}}\, dz \right\}^{1/p} \left\{ \int\limits_{G_R} \frac{|b(z)|}{|y - z|^{e_1 + e_2}}\, dz \right\}^{1/q},$$

so daß diese Integrale auf Grund von Hilfssatz 3.1 beschränkt bleiben, da $e_1 + e_2 \leqq n - \frac{3}{2}$ ist.

Aus der Hölderstetigkeit von $u(x)$ folgt dann, daß $v(x)$ auch einer Lipschitzbedingung genügt. Zerlegt man nämlich $v(x) - v(y)$ in

$$v(x) - v(y) = u(y) \int \{K_R(x,z) - K_R(y,z)\}\, b(z)\, dz + \\ + \int \{K_R(x,z) - K_R(y,z)\}\, b(z)\, \{u(z) - u(y)\}\, dz,$$

so läßt sich der Integrand im zweiten Integral wieder abschätzen durch eine Summe mit Gliedern der Form $\text{const.}\, |x - y|\, |x - z|^{-e_1}\, |y - z|^{-e_2}\, |b(z)|$ und mit $e_1 + e_2 \leqq n - \frac{3}{2}$, da $|u(y) - u(z)| \leqq \text{const.}\, |x - y|^{1/2}$ bleibt, so daß das zweite Integral Lipschitzbeschränkt ist. Ferner gilt für $0 \leqq \delta \leqq 1$ die Gleichung

$$\int K_R(x, y)\, b(y)\, dy = c\, \varrho(x)^{2-\delta} - c \int H_R(x, y)\, \varrho(y)^{2-\delta} dy$$

mit einer Konstanten c, für alle x aus E_n und alle $R > 0$. Daher ist auch

$|\int \{K_R(x,z) - K_R(y,z)\}\, b(z)\, dz| \leq$ const. $|x - y|$. Die anderen Integrale in (3.1) waren sogar stetig differenzierbar, so daß sie insbesondere einer Lipschitzbedingung genügen.

Satz 3.3: *Es seien u und f quadratisch integrierbare Lösungen der Mittelwertgleichung* (3.1). *Ferner seien die Koeffizienten $a_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ in einem Gebiet G $(m+1)$-mal stetig differenzierbar und die Funktionen f, b m-mal stetig differenzierbar. Dann ist u in G $(m+1)$-mal stetig differenzierbar und genügt der Differentialgleichung*

$$-\Delta u + 2i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} u + b u - \lambda u = f.$$

Beweis: Aus Satz 3.2 folgt, daß die Funktion $u(x)$ stetig differenzierbar ist in G und der Gleichung

$$u(x) = \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy + \int K_R(x,y)\, h(y)\, dy \tag{3.12}$$

genügt mit der in (3.10) definierten Funktion h. Wir erhalten also die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \int H_R(x,y) \frac{\partial u}{\partial y_k} dy + \int K_R(x,y) \frac{\partial}{\partial y_k} \Big\{ f + \lambda u - b u + \\ + i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu} u \Big\} dy + 2i \int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_k} \frac{\partial (a_\nu u)}{\partial y_\nu} dy. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Die Argumentfunktionen in diesen Integralen sind stetig und die Funktionen $\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu}$ stetig differenzierbar. Wie im Beweis zu Satz 3.2 schließt man dann, daß die Funktionen $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ stetig differenzierbar nach sämtlichen Variablen sind. Durch einen Induktionsschluß erhält man auf diese Weise die Behauptung für alle m.

Der zweite Teil der Behauptung folgt sehr einfach. Da die Funktion u zweimal stetig differenzierbar ist in G, so ist Δu stetig in G, und u genügt der Gleichung $u(x) = \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy - \int K_R(x,y)\, \Delta u(y)\, dy$ für alle x aus G und $R > 0$ so, daß auch die Kugel $|y - x| \leq R$ noch in G liegt. Andererseits besteht die Gleichung (3.12). Daraus folgt $\int K_R(x,y) \{h(y) + \Delta u(y)\}\, dy = 0$. Anwendung von Hilfssatz 1.4 ergibt, daß dieses Integral, durch $k_R = \int K_R(x,y)\, dy$ dividiert, für $R \to 0$ gegen $h + \Delta u = 0$ konvergiert, was die obige Behauptung darstellt.

Ein Teil der gewonnenen Ergebnisse soll noch einmal zusammengestellt werden[10]).

Es sei $\mathfrak{D}_A$ die Menge aller Funktionen v mit

1. *v zweimal stetig differenzierbar in E_n, $n \geq 3$,*
2. *$v = 0$ außerhalb eines individuellen beschränkten Gebietes.*

Sei A in $\mathfrak{D}_A$ definiert durch

$$A v = -\Delta v + 2i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial v}{\partial x_\nu} + i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} v + b v$$

[10]) Vgl. hierzu [10], S. 152.

mit stetig differenzierbaren Koeffizienten a_ν und einer Funktion b, die der Voraussetzung (2.2) *genügt. Sind dann u und f zwei über E_n quadratisch integrierbare Funktionen, die für alle v aus $\mathfrak{D}_A$ der Gleichung*

$$\int u\overline{(A-\lambda)\,v}\,dx = \int f\,\bar{v}\,dx$$

genügen, dann gelten folgende Aussagen:

1. *Es gilt fast überall die Mittelwertgleichung*

$$u(x) = \int H_R(x,y)\,u(y)\,dy + 2i\int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_\nu}\,a_\nu(y)\,u(y)\,dy +$$
$$+\int K_R(x,y)\left\{f(y) + \lambda\,u(y) - b(y)\,u(y) + i\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu}\,u(y)\right\}dy$$

für alle $R > 0$.

2. *Gibt es ein $\alpha > 0$ und eine Konstante M so, daß*

$$\int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\,dy \leq M, \quad \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\,dy \leq M$$

ist für alle $0 < R < 1$ und alle x aus einem beschränkten Gebiet G, dann ist u in G gleichmäßig beschränkt.

3. *Sind f und b in einem Gebiet G stetige Funktionen, dann ist u in G stetig differenzierbar. Ist B ein beschränkter Teilbereich von G mit stückweise glatter Oberfläche O, so genügen die Funktionen u und f der Gleichung*

$$\int\limits_B \bar{u}f\,dx = -\int\limits_O \bar{u}\frac{\partial u}{\partial n}\,do + \int\limits_B |\operatorname{grad} u|^2\,dx + i\int\limits_B \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\,\bar{u}\,\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\,dx +$$
$$+\int\limits_B \left\{b - \lambda + 2i\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu}\right\}|u|^2\,dx.$$

4. *Sind für $m = 1, 2, \ldots$ die Funktionen f und b m-mal und die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ $(m+1)$-mal stetig differenzierbar in G, dann ist u in G $(m+1)$-mal stetig differenzierbar und genügt der Differentialgleichung*

$$-\Delta u + 2i\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + i\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu}u + b\,u - \lambda\,u = f.$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen möge noch ein Satz bewiesen werden, der sich in etwas allgemeinerer Form bei K. FRIEDRICHS [7] findet.

Satz 3.4: *Es sei der Operator A in $\mathfrak{D}_A$ definiert durch $A\,v = -\Delta\,v$ mit einem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ wie in Definition 2.1. Ist dann u eine Funktion aus $\mathfrak{D}_{(A^*)^\nu}(\nu = 1, \ldots, N)$, so ist für $2N \geq \frac{n}{2} + 3$ die Funktion u zweimal stetig differenzierbar; die Funktion $f_1 = A^* u$ ist stetig und es gilt $-\Delta\,u = f_1$.*

Beweis: Setzt man $(A^*)^\nu u = f_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, N$ und $f_0 = u$, dann ist $A^* f_{\nu-1} = f_\nu$ und $f_{\nu-1}$ sowie f_ν genügen der Mittelwertgleichung

$$f_{\nu-1}(x) = \int H_R(x,y)\,f_{\nu-1}(y)\,dy + \int K_R(x,y)\,f_\nu(y)\,dy$$

für alle $R > 0$ und $\nu = 1, \ldots, N$. Da die Funktionen f_ν in $\mathfrak{D}_{A^*}$ liegen, sind sie

quadratisch integrierbar. Nach Hilfssatz 1.3 läßt sich daher diese Gleichung in der Form $f_{\nu-1} = H_R f_{\nu-1} + K_R f_\nu$ schreiben mit den vertauschbaren Operatoren H_R und K_R. Somit folgt die Gleichung $(1 - H_R)^\mu f_{\nu-\mu} = K_R^\mu f_\nu$ für $\nu \geqq \mu$ und $\nu, \mu = 0, \ldots, N$, wenn man $(1 - H_R)^0 = 1$ und $K_R^0 = 1$ setzt. Für $\nu = \mu = N$ bzw. $\nu - \mu = 1$, $\nu = N$ entstehen daraus die Gleichungen

$$(3.14) \qquad (1 - H_R)^N u = K_R^N f_N, \quad (1 - H_R)^{N-1} f_1 = K_R^{N-1} f_N.$$

Hier ist $(K_R^{N-1} f_N)(x) = \int K_R^{(N-1)}(x,y) f_N(y)\, dy$ und $K_R^{(N-1)}(x,y)$ der $(N-1)$-mal iterierte Kern $K_R(x,y)$. Der Kern $K_R(x,y)$ hat die Ordnung $e_1 = n - 2$, so daß der j-fach iterierte Kern $K_R^{(j)}(x,y)$ die Ordnung $e_j = n - 2j$ hat. Somit wird $e_{N-1} \leqq \frac{n}{2} - 1$ nach der Voraussetzung über N und

$$\left|\int K_R^{(N-1)}(x,y) f_N(y)\, dy\right|^2 \leqq \text{const.}\, \|f_N\|^2.$$

Also ist die Funktion $\tilde{f}(x) = \int K_R^{(N-1)}(x,y) f_N(y)\, dy$ in E_n gleichmäßig beschränkt. Die Funktion $\tilde{f}(x)$ ist auch noch Hölderstetig, was sich wie im Beweis zu Satz 3.2 einsehen läßt.

Aus der zweiten Gleichung in (3.14) folgt

$$f_1 = \tilde{f} + H_R \left\{ \sum_{\nu=0}^{N-2} (-1)^\nu \binom{N-1}{\nu+1} H_R^\nu f_1 \right\},$$

so daß auch die Funktion f_1 Hölderstetig ist. Für u ergibt sich aus (3.14) die Darstellung

$$u = K_R \tilde{f} + H_R \left\{ \sum_{\nu=0}^{N-1} (-1)^\nu \binom{N}{\nu+1} H_R^\nu u \right\}.$$

Aus dieser Gleichung schließt man aber leicht, ähnlich wie es in den früheren Sätzen geschehen ist, daß die Funktion u nach sämtlichen Variablen zweimal stetig differenzierbar ist. Ist aber schließlich f_1 stetig und u zweimal stetig differenzierbar und genügen u sowie f_1 der Mittelwertgleichung $u = H_R u + K_R f_1$, dann ist $-\Delta u = f_1$.

§ 4. Wesentliche Selbstadjungiertheit von A in $\mathfrak{D}_A$

In einer Reihe von Fällen läßt sich die wesentliche Selbstadjungiertheit des Operators A in $\mathfrak{D}_A$ einfach beweisen. In Satz 2.4 wurde gezeigt, daß die Adjungierte des Differentialoperators A identisch ist mit dem durch die Mittelwertgleichung (2.3) definierten Operator $\tilde{A}$ in $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$. Auf Grund dessen folgt unmittelbar:

Satz 4.1: *A in $\mathfrak{D}_A$ ist dann und nur dann wesentlich selbstadjungiert*[11]*, wenn es zwei komplexe Zahlen λ_1, λ_2 mit $Im\ \lambda_1 > 0$, $Im\ \lambda_2 < 0$ gibt, so daß die Mittelwertgleichung*

$$\tilde{A} u = \lambda u$$

für $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ nur die triviale Lösung $u = 0$ besitzt.

[11]) Ein in $\mathfrak{D}_A$ hermitescher Operator A heißt dort „wesentlich selbstadjungiert", falls sich A in $\mathfrak{D}_A$ durch Abschließen zu einem selbstadjungierten Operator fortsetzen läßt (vgl. [16], Kap. IX).

Dieser Satz wird der Ausgangspunkt für alle Untersuchungen sein, die sich mit der wesentlichen Selbstadjungiertheit von A in $\mathfrak{D}_A$ beschäftigen. Dabei setzen wir stets voraus, daß A in dem durch Definition 2.1 erklärten Bereich von Funktionen $\mathfrak{D}_A$ definiert sei und die Koeffizienten a_ν, b stets die dort genannten Voraussetzungen erfüllen.

Die wesentliche Selbstadjungiertheit des Operators $A\,u = -\Delta u$ in $\mathfrak{D}_A$ ist wohlbekannt. Der Vollständigkeit halber wird dafür im nächsten Hilfssatz ein Beweis gegeben, der nur von der Mittelwertgleichung Gebrauch macht.

Hilfssatz 4.1: *Der durch*

$$A\,u = -\Delta u$$

definierte Operator ist in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert.

Beweis: Alle Koeffizienten a_ν, b der Gleichung (2.1) sind hier gleich Null. Mit Hilfssatz 1.3 läßt sich die Mittelwertgleichung (2.3) mit den hermiteschen Operatoren H_R und K_R in der Form

$$u = H_R u + K_R f \tag{4.1}$$

schreiben, wobei $A^* u = f$ gesetzt ist. Gäbe es nun ein λ mit $Im\,\lambda \neq 0$ und eine Eigenlösung u zu $A^* u = \lambda\, u$, so wäre also $u = H_R u + \lambda\, K_R u$ für alle $R > 0$. Daraus folgt die Gleichung

$$(u, (1 - H_R)\, u) = \lambda (u, K_R u), \tag{4.2}$$

also gilt $Im\,\lambda (u, K_R u) = 0$. Der Kern des Integraloperators K_R ist die Funktion $K_R(x, y)$, welche den Voraussetzungen von Hilfssatz 1.4 genügt. Setzt man daher $k_R = \int K_R(x, y)\, dy$, so ergibt sich $k_R^{-1}(u, K_R u) \to \|u\|^2$ für $R \to 0$. Folglich muß $Im\,\lambda\, \|u\|^2 = 0$ sein, was für $Im\,\lambda \neq 0$ aber $\|u\| = 0$ oder $u = 0$ nach sich zieht. Nach Satz 4.1 ist damit die Behauptung bewiesen.

Der folgende Hilfssatz aus der Störungstheorie ist wohlbekannt. Sein einfacher Beweis soll aber der Vollständigkeit halber hier angegeben werden.

Hilfssatz 4.2[12]**):** *Es sei B in $\mathfrak{D}_B$ ein wesentlich selbstadjungierter Operator und C in $\mathfrak{D}_B$ hermitesch. Ist dann*

$$\|C u\| \leq \varepsilon\, \|B\, u\| + \delta\, \|u\| \tag{4.3}$$

für alle u aus $\mathfrak{D}_B$ mit $0 < \varepsilon < 1$, dann ist $B + C$ in $\mathfrak{D}_B$ wesentlich selbstadjungiert.

Beweis: Da B in $\mathfrak{D}_B$ wesentlich selbstadjungiert ist, so ist der Operator $(B + i\,k)^{-1}$ für $k \neq 0$ (k reell) ein in $\mathfrak{H}$ dicht definierter, beschränkter Operator und $\|(B + i\,k)^{-1}\| \leq |k|^{-1}$. Mit $(B + i\,k)^{-1}$ ist dann auch $C\,(B + i\,k)^{-1}$ in $\mathfrak{H}$ dicht definiert, und aus der Ungleichung (4.3) folgt die Abschätzung

$$\|C(B + i\,k)^{-1} f\| \leq \varepsilon\, \|B(B + i\,k)^{-1} f\| + \delta\, \|(B + i\,k)^{-1} f\| \leq (\varepsilon + \delta\, |k|^{-1})\, \|f\|\,.$$

Wählt man daher $|k|$ so groß, daß $\varepsilon + \delta\, |k|^{-1} < 1$ ausfällt, so ist $C(B + i\,k)^{-1}$ beschränkt mit $\|C(B + i\,k)^{-1}\| < 1$. Daher bildet der Operator $1 + C(B + i\,k)^{-1}$ den Wertebereich von $B + i\,k$ auf einen dicht in $\mathfrak{H}$ liegenden Teilraum ab. Wegen

$$(B + C + i\,k)\,\mathfrak{D}_B = (1 + C(B + i\,k)^{-1})\,(B + i\,k)\,\mathfrak{D}_B$$

ist dann $B + C$ wesentlich selbstadjungiert in $\mathfrak{D}_B$.

[12]) Siehe z. B. [11].

Satz 4.2[13]): *Es sei A erklärt durch*

$$A\,u = -\Delta\,u + b\,u\,,$$

und es genüge die Funktion $b(x)$ der Bedingung (2.2) gleichmäßig in E_n, d. h. es soll

$$\int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\,dy \leq M \tag{4.4}$$

sein mit einer Konstanten $M < \infty$ für alle x aus E_n und alle $0 < R < 1$. Dann ist A in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert.

Beweis: Es sei A_0 der durch $A_0 u = -\Delta\,u$ definierte Operator. Nach Hilfssatz 4.1 ist A_0 in $\mathfrak{D}_{A_0} = \mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert. Da $A_0 \subseteq A_0^*$ ist, gilt für alle u aus $\mathfrak{D}_{A_0}$ die Ungleichung (3.3) aus Hilfssatz 3.1 mit $f = A_0 u$, d. h.

$$|u(x)|^2 \leq c_1 R^\alpha \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\,dy + c_2 R^{-n} \int\limits_{|x-y|\leq R} |u(y)|^2\,dy \tag{4.5}$$

mit Konstanten c_1, c_2 gleichmäßig für alle x aus E_n und alle $0 < R < 1$. Multiplikation dieser Ungleichung mit $|b(x)|^2$ und Integration liefert dann

$$\|b\,u\|^2 \leq c_1 R^\alpha M\,\|f\|^2 + \frac{c_2 M}{R^{4-\alpha}}\,\|u\|^2\,, \tag{4.6}$$

da wegen (4.4) das Integral $\int\limits_{|x-y|\leq R} |b(y)|^2 dy \leq M \cdot R^{n-4+\alpha}$ ausfällt. Aus (4.6) ergibt sich schließlich

$$\|b\,u\| \leq c\left(R^{\alpha/2}\,\|f\| + \frac{1}{R^{2-\alpha/2}}\,\|u\|\right) \tag{4.7}$$

mit einer Konstanten c für alle u aus $\mathfrak{D}_{A_0}$ und alle $0 < R < 1$. Daher ist nach Hilfssatz 4.2 auch $A = A_0 + b$ in $\mathfrak{D}_{A_0} = \mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert. Die Multiplikation mit der Funktion $b(x)$ ist in $\mathfrak{D}_{A_0}$ offensichtlich ein hermitescher Operator.

Satz 4.3: *Es sei G ein beschränktes Gebiet und M eine Konstante so, daß die lokal quadratisch integrierbare Funktion $Q(x)$ der Bedingung*

$$x \in G\colon \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{|Q(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\,dy \leq M;\quad x \in E_n - G\colon\ |Q(x)| \leq M \tag{4.8}$$

für alle $0 < R < 1$ genügt. Ist dann A in $\mathfrak{D}_A$ irgendein durch Definition 2.1 erklärter Operator, so ist der durch die Gleichung $B u = A u + Q u$ definierte Operator in $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_B$ dann und nur dann wesentlich selbstadjungiert, wenn A in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert ist.

Beweis: Für ein beschränktes Gebiet G läßt sich auf Grund der Voraussetzungen über die Koeffizienten a_ν, b des Operators A die Bedingung (3.2) in Satz 3.1 stets erfüllen. Daher gilt für alle u aus $\mathfrak{D}_A$, alle x aus G und $0 < R < 1$

---

[13]) Vgl. dazu das Ergebnis von T. Kato in [11].

die Ungleichung (3.3) mit $Au = f$. Aus (3.3) folgt die Abschätzung

$$\int_G |Q(x)\, u(x)|^2 dx \leq c_1 M\, R^\alpha\, \|f\|^2 + \frac{c_2}{R^{4-\alpha}}\, M\, \|u\|^2.$$

In $E_n - G$ dagegen erhält man

$$\int_{E_n - G} |Q(x)\, u(x)|^2 dx \leq M^2\, \|u\|^2,$$

so daß die Addition der beiden Ungleichungen auf $\|Qu\|^2 \leq c_1 M\, R^\alpha\, \|f\|^2 + (c_2 M\, R^{-4+\alpha} + M^2)\, \|u\|^2$ und damit wieder auf eine Ungleichung der Form (4.7) führt, woraus mit Hilfssatz 4.2 die Behauptung folgt.

Satz 4.4: *Es sei A definiert durch*

$$Au = -\Delta u + b_1 u + b_2 u.$$

Der Koeffizient $b_2(x)$ genüge der Voraussetzung (4.8) *aus Satz* 4.3, *die Funktion $b_1(x)$ erfülle für alle x, y aus E_n die Bedingung*

(4.9) $$|b_1(x) - b_1(y)| \leq M \quad \text{für} \quad |x - y| \leq R$$

mit einer Konstanten $M < \infty$ und für alle $0 < R < 1$. *Dann ist A in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis: Nach Satz 4.3 genügt es zu zeigen, daß der durch $A_0 u = -\Delta u + b_1 u$ erklärte Operator in $\mathfrak{D}_{A_0} = \mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert ist. Gibt es also ein λ mit $Im\, \lambda \neq 0$ und eine Eigenlösung u zu $A_0^* u = \lambda u$, dann genügt die Funktion u der Mittelwertgleichung

(4.10) $$u(x) = \int H_R(x, y)\, u(y)\, dy + \int K_R(x, y)\, \{\lambda - b_1(y)\}\, u(y)\, dy$$

für alle $R > 0$. Aus dieser Gleichung liest man ab, daß das Integral $\int K_R(x, y) \times b_1(y)\, u(y)\, dy$ eine quadratisch integrierbare Funktion von x ist, da alle anderen Terme der Gleichung (4.10) diese Eigenschaft haben. Daraus folgt, daß auch $b_1(x) \int K_R(x, y)\, u(y)\, dy$ quadratisch integrierbar ist für alle R mit $0 < R < 1$; denn es wird

$$b_1(x) \int K_R(x,y)\, u(y)\, dy = \int K_R(x,y)\, b_1(y)\, u(y)\, dy + \int K_R(x,y)\, \{b_1(x) - b_1(y)\}\, u(y)\, dy$$

und

(4.11) $$\int \left| \int K_R(x,y)\, \{b_1(x) - b_1(y)\}\, u(y)\, dy \right|^2 dx \leq M^2 k_R^2\, \|u\|^2$$

mit $k_R = \int K_R(x,y)\, dy$. Aus (4.10) erhält man die Gleichung

$$\lambda\, \|K_R u\|^2 = (K_R u, (1 - H_R)\, u) + \int b_1(x) \left|\int K_R(x,y)\, u(y)\, dy\right|^2 dx + \int \left\{\int K_R(x,y)\, \overline{u(y)}\, dy \int K_R(x,y)\, (b_1(y) - b_1(x))\, u(y)\, dy\right\} dx,$$

so daß man mit der Ungleichung (4.11) die Abschätzung

$$|Im\, \lambda|\, \|K_R u\|^2 \leq M\, k_R^2\, \|u\|^2$$

gewinnt, da das Integral $\int b_1(x) \left|\int K_R(x,y)\, u(y)\, dy\right|^2 dx$ existiert und reell ist, und die hermiteschen Operatoren H_R, K_R vertauschbar sind. Dividiert man

schließlich die letzte Ungleichung durch k_R^2 und läßt $R \to 0$ gehen, so folgt mit Hilfssatz 1.4 die Ungleichung $|Im\,\lambda|\,\|u\|^2 \leq M\,\|u\|^2$. Für $|Im\,\lambda| > M$ muß also notwendig $u = 0$ sein.

Zum Abschluß werde noch der folgende bekannte Satz bewiesen:

Satz 4.5[14]**:** *Es sei A definiert durch*

$$A\,u = -\Delta u + b_1 u + b_2 u\,.$$

Die Funktion $b_2(x)$ genüge der Voraussetzung (4.8) *von Satz* 4.3. *Die Funktion $b_1(x)$ sei stetig und erfülle die Bedingung*

$$b_1(x) \geq c > -\infty \quad (x \in E_n)\,. \tag{4.12}$$

Dann ist A in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert.

Beweis: Auf Grund von Satz 4.3 genügt es, die Behauptung für den Operator $A_0 u = -\Delta u + b_1 u$ zu beweisen. Ist u eine Eigenlösung von A_0^*, $A_0^*\,u = \lambda\,u$ mit $Im\,\lambda \neq 0$, dann muß nach Hilfssatz 3.2 die Funktion $u(x)$ stetig differenzierbar sein und der Gleichung

$$\lambda \int_K |u|^2\,dx = -\int_O \bar{u}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,do + \int_K |\operatorname{grad} u|^2\,dx + \int_K b_1\,|u|^2\,dx$$

genügen für jede Kugel K. Daraus folgt bekanntlich[15], daß die Integrale $\int |\operatorname{grad} u|^2 dx$ und $\int b_1 |u|^2 dx$ existieren und die Gleichung

$$\lambda\,\|u\|^2 = \int |\operatorname{grad} u|^2 dx + \int b_1 |u|^2 dx$$

besteht. Daher wird $Im\,\lambda\,\|u\|^2 = 0$, also muß für $Im\,\lambda \neq 0$ auch $u = 0$ sein.

§ 5. Wesentliche Selbstadjungiertheit von Schrödingeroperatoren

Die Beispiele, auf die die früheren Sätze angewandt werden sollen, sind bekannte Schrödingergleichungen. Der Operator A in $\mathfrak{D}_A$ ist so gewählt, daß er die nichtrelativistische Wellengleichung für die Bewegung eines oder mehrerer Teilchen in einem elektromagnetischen Feld zu behandeln gestattet. Für ein Teilchen der Masse m und der Ladung e in einem Feld, das gegeben ist durch die Potentiale $\mathfrak{A}$, φ, mit der potentiellen Energie V, die das Teilchen bindet, wird die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} E\,u = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\,u + \frac{ie\hbar}{mc}\,(\mathfrak{A}, \operatorname{grad})\,u + \frac{ie\hbar}{2mc}\,(\operatorname{div}\mathfrak{A})\,u\,+ \\ + \frac{e^2}{2mc^2}\,\mathfrak{A}^2 u + (e\,\varphi + V)\,u\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

falls $\mathfrak{A}$, φ, V zeitunabhängig sind und man die Zeitvariable absepariert hat[16]. Für mehrere Teilchen gilt eine entsprechende Gleichung.

Als Anwendung der früheren Resultate betrachten wir den Fall mehrerer Teilchen. Hier ist $n = 3\,s$, $s = 2, 3, \ldots$, wenn s die Anzahl der Teilchen bedeutet.

---

[14] Vgl. K. Friedrichs [6], T. Carleman [4].

[15] Siehe z. B. [12], Teil I.

[16] Vgl. etwa [15], S. 138.

Satz 5.1[17]**:** *Ist $b(x)$ das Coulombpotential für mehrere Teilchen, d. h.*

$$b(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{s} \frac{e_{jk}}{r_{jk}},$$

$$r_{0k} = \{x_{3k-2}^2 + x_{3k-1}^2 + x_{3k}^2\}^{1/2}, \quad k = 1, \ldots, s,$$

$$r_{jk} = \{(x_{3j-2} - x_{3k-2})^2 + (x_{3j-1} - x_{3k-1})^2 + (x_{3j} - x_{3k})^2\}^{1/2}, \quad j \neq k,$$

dann ist der Operator $Au = -\Delta u + b\,u$ in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert.

Beweis: Dieses Potential genügt der Voraussetzung (4.4) von Satz 4.2; denn für $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $m = 3$ ist die Bedingung (3.6) aus Hilfssatz 3.1 erfüllt und daher gilt

$$\int\limits_{|x-y| \leq R} \frac{dy}{r_{0k}^2\, |x-y|^{n-3}} \leq M \tag{5.2}$$

für alle x aus E_n und alle R mit $0 < R < 1$. Wie man leicht einsieht, lassen sich die Integrale $\int\limits_{|x-y| \leq R} \frac{dy}{r_{jk}^2\, |x-y|^{n-3}}$ $(j \neq k, j \neq 0, k \neq 0)$ durch eine geeignete, orthogonale Transformation des E_n auf die in (5.2) betrachtete Form bringen.

Nach Satz 4.2 ist daher A in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert.

Wir wollen jetzt eine Verallgemeinerung des Satzes 5.1 beweisen, welche auch den Fall des Starkeffektes umfaßt.

Satz 5.2: *Sei $n = 3\,s$, $s = 1, 2, \ldots$ und A definiert durch*

$$Au = -\Delta u + \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j\, u + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j \neq k}}^{s} \frac{e_{jk}}{r_{jk}}\, u$$

mit Konstanten c_j, e_{jk} und Funktionen r_{jk} wie in Satz 5.1. *Dann ist A in $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis: Sei $Im\, \lambda = \beta$ und $|\beta| \geq \beta_0 > 0$. Außerdem sei u eine Lösung von $A^* u = \lambda\, u$. Dann genügt u der Gleichung

$$u(x) = \int H_R(x,y)\, u(y)\, dy + \int K_R(x,y)\, \{\lambda - b_1(y) - b_2(y)\}\, u(y)\, dy \tag{5.3}$$

mit $b_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ und $b_2(x) = \frac{1}{2} \sum\limits_{\substack{j,k=0 \\ j \neq k}}^{s} \frac{e_{jk}}{r_{jk}}$.

Wir setzen zur Abkürzung $v = (\lambda - b_1)^{-1} u$ und $M(x,y) = \frac{\lambda - b_1(y)}{\lambda - b_1(x)}$. Dann gelten offenbar die Ungleichungen $\|v\| \leq \beta_0^{-1} \|u\|$ und $|M(x,y) - 1| \leq$ $\leq \text{const.} R$ für alle x, y aus E_n mit $|x - y| \leq R$. Aus (5.3) folgt, daß $v(x)$ der Gleichung

$$v(x) = \int H_R(x,y) M(x,y)\, v(y)\, dy + \int K_R(x,y)\, M(x,y)\, \{u(y) - b_2(y)\, v(y)\}\, dy \tag{5.4}$$

genügt. Diese Gleichung liefert drei Ungleichungen für die Funktion $v(x)$:

Die Lösungen $v(x)$ der obigen Gleichung genügen zunächst der Ungleichung

$$|v(x)|^2 \leq c_1 R^{\alpha} \int\limits_{|x-y| \leq R} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}}\, dy + c_2 R^{-n} \int\limits_{|x-y| \leq R} |v(y)|^2\, dy, \tag{5.4'}$$

[17]) Vgl. dazu T. Kato [11], F. Rellich [12], Teil II.

so daß für alle $|\beta| \geqq \beta_0 > 0$ die Beziehung entsteht

$$\|b_2 v\| \leqq \text{const.}\ \|u\| < \infty. \tag{5.5}$$

Multipliziert man die Ungleichung (5.4') mit $|b_2|^2\ |\lambda - b_1|^{-2}$, so erhält man nach einer kleinen Umformung die Abschätzung

$$\left\| \frac{b_2}{\lambda - b_1} v \right\| \leqq \text{const.}\ \|v\|. \tag{5.5'}$$

Eine Lösung u von (5.3) ist nach Satz 3.2 in den Punkten stetig differenzierbar, wo die Funktion b_2 beschränkt ist und nach dem Zusatz zu Satz 3.2 ist u in den singulären Punkten von b_2 noch Lipschitzbeschränkt. Also gilt an allen Punkten, wo b_2 beschränkt ist, die Darstellung

$$(\lambda - b_1(x))^{-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} = (\lambda - b_1(x))^{-1} \int \frac{\partial H_R(x,y)}{\partial x_j} M(x,y)\, v(y)\, dy + \\ + \int \frac{\partial K_R(x,y)}{\partial y_j} M^2(x,y) \left\{ v(y) - \frac{b_2(y)}{\lambda - b_1(y)} v(y) \right\} dy,$$

so daß sich nach (5.5') für $|\beta| \geqq \beta_0$ die Ungleichung $\left\| (\lambda - b_1)^{-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \leqq$ $\leqq \text{const.}\ \|v\|$ $(j = 1, \ldots, n)$ ergibt und damit auch

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} c_j\, (\lambda - b_1)^{-1} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\| \leqq \text{const.}\ \|v\|. \tag{5.5''}$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß die Funktion $v(x)$ für genügend große $|\beta|$ identisch verschwinden muß.

In der Gleichung (5.4) sind alle Integrale über E_n quadratisch integrierbare Funktionen von x. Da H_R ein hermitescher Operator ist, so folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} &Im \int \bar v(x)\, dx \int H_R(x,y) \{M(x,y) - 1\}\, v(y)\, dy \\ &= - Im \int \overline{v(x)}\, dx \int K_R(x,y)\, M(x,y) \{u(y) - b_2(y)\, v(y)\}\, dy. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Für $R \to 0$ und $|x - y| \leqq R$ gilt die Darstellung $M(x,y) = 1 + O(R)$, daher strebt der Ausdruck $k_R^{-1} \int \bar v(x)\, dx \int K_R(x,y)\, M(x,y)\, (u(y) - b_2(y)\, v(y))\, dy$ für $R \to 0$ gegen $(v,u) - (v, b_2 v)$. Das Skalarprodukt $(v, b_2 v)$ ist reell, und für $\lambda = \alpha + i\beta$ wird $(v,u) = i\beta\, \|v\|^2 + \int (\alpha - b_1)\, |v|^2 dy$ also $Im(v,u) = \beta\, \|v\|^2$. Aus (5.6) erhält man daher die Ungleichung

$$|\beta|\ \|v\|^2 \leqq \varliminf_{R\to 0} k_R^{-1}\ \|v\| \{\int dx\ |\int H_R(x,y) \{M(x,y) - 1\}\, v(y)\, dy|^2\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.7}$$

Offenbar ist

$$M(x,y) - 1 = \frac{b_1(x) - b_1(y)}{\lambda - b_1(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j (x_j - y_j)}{\lambda - b_1(x)}.$$

Andererseits hat man für $r = |x - y|$ die Gleichung $\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)(x_j - y_j)$ $= \frac{R^2}{4} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2$, also auch

$$\int\limits_{|x-y| \leqq R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)(x_j - y_j)\, v(y)\, dy = \frac{R^2}{4} \int\limits_{|x-y| \leqq R} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \right\} v(y)\, dy.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß man das letzte Integral partiell integrieren darf, wodurch mit einer Konstanten c die Beziehung

$$\int H_R(x,y)\,\{M(x,y)-1\}\,v(y)\,d\,y = \frac{c R^2}{R^n} \int\limits_{|x-y|\leq R} \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^2 M(x,y) \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\lambda - b_1(y)} \frac{\partial v}{\partial y_j}\,d\,y$$

entsteht. Es ist $k_R = \frac{R^2}{2(n+4)}$, so daß mit einer Konstanten c' und für alle $|\beta| \geqq \beta_0$ nach (5.5″) die Ungleichung $k_R^{-1} \|\int H_R(M-1)\,v\,d\,y\| \leqq c'\,\|v\|$ gilt. Aus (5.7) folgt daher schließlich die Abschätzung

$$|\beta|\cdot\|v\|^2 \leqq c'\,\|v\|^2.$$

Wählt man somit $|\beta| > c'$, so muß notwendig $v = 0$ und damit auch $u = 0$ sein.

Literatur

[1] Brownell, F. H.: Spectrum of the static potential Schrödingerequation over E_n. Ann. of Math. **54**, 554—594 (1951). — [2] Carleman, T.: Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. Upsalla 1923. — [3] Carleman, T.: Verh. internat. Math. Kongr., Bd. I, S. 138. Zürich 1932. — [4] Carleman, T.: Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger. Ark. f. Mat., Astr. og Fys. **24 B**, N 11 (1934). — [5] Courant, R., u. D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. II. Berlin 1937. — [6] Friedrichs, K.: Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Math. Ann. **109**, 465 bis 487, 685—713 (1933—34). — [7] Friedrichs, K.: On differential operators in Hilbert spaces. Amer. J. Math. **61**, 523—544 (1939). — [8] Heinz, E.: Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Math. Ann. **127**, 258—287 (1954). — [9] Hopf, E.: Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **34**, 194—233 (1932). — [10] John, F.: Plane waves and spherical means applied to partial differential equations. New York 1955. — [11] Kato, T.: Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type. Trans. Amer. Math. Soc. **70**, 196—211 (1951). — [12] Rellich, F.: Eigenwerttheorie partieller Differentialgleichungen, Teil I, II. Vorlesungsausarbeitung Göttingen 1952—53. — [13] Riesz, F., et B. v. Sz. Nagy: Leçons d'analyse fonctionelle. Budapest 1953. — [14] Schur, J.: Beschränkte Bilinearformen unendlich vieler Veränderlicher. J. reine u. angew. Math. **140**, 1—28 (1911). — [15] Schiff, L. J.: Quantum mechanics. New York 1949. — [16] Stone, M. H.: Linear transformations in Hilbert space and their application to analysis. New York 1932.

(Eingegangen am 27. Februar 1956)

PIEHLER, J.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 177—179 (1956)

Zur Theorie der binären kubischen Formen

Von

JOACHIM PIEHLER in Leuna

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einem Problem bei binären kubischen Formen, das in Analogie zur Theorie der Charaktere quadratischer Formen steht. Ist φ eine quadratische Form, so gibt es bekanntlich gewisse Primzahlen p, so daß alle durch φ dargestellten zu p primen Zahlen entweder quadratische Reste oder Nichtreste mod p sind. In einer entsprechenden Fragestellung bei kubischen Formen hat man naturgemäß kubische Reste zu betrachten. Da aber für $p = 3$ und alle Primzahlen der Gestalt $3n + 2$ die primen Reste sämtlich kubische Reste sind, spielen in den weiteren Betrachtungen nur die Primzahlen $p = 3n + 1$ eine Rolle. Für diese hat die Faktorgruppe $\mathfrak{R}_p/\mathfrak{K}$ der primen Restklassengruppe mod p nach der invarianten Untergruppe der kubischen Reste die Ordnung 3. Unsere Aufgabe soll es also sein, zu einer gegebenen binären kubischen Form f alle Primzahlen $p = 3n + 1$ zu finden, für welche die durch f dargestellten zu p primen Zahlen einer einzigen Nebenklasse von $\mathfrak{R}_p/\mathfrak{K}$ angehören.

Zunächst einige grundlegende Tatsachen über binäre kubische Formen. $f = a\,x^3 + b\,x^2y + c\,xy^2 + d\,y^3$ sei eine binäre kubische Form mit ganzrationalen Koeffizienten ohne gemeinsamen Teiler; wir wollen dann f primitiv nennen. Mit $h = A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2$ bezeichnen wir die Hessesche Kovariante von f. Darin ist $A = 3ac - b^2$, $B = 9ad - bc$ und $C = 3bd - c^2$. T sei der größte gemeinsame Teiler von A, B und C. Üben wir auf f eine unimodulare Transformation aus, so erhalten wir eine binäre kubische Form f', welche die gleichen Zahlen wie f darstellt; außerdem bleibt T bei einer solchen Transformation ungeändert. Weiterhin sei bemerkt, daß eine primitive binäre kubische Form Zahlen darstellt, die zu einer beliebig vorgegebenen Zahl z teilerfremd sind, außer wenn $a \equiv d \equiv 0, (2)$ und $b \equiv c \equiv 1, (2)$ gilt. Der Ausnahmefall bezieht sich aber nur auf gerade Zahlen z und ist daher für unsere Untersuchungen unwesentlich.

Wir beweisen nun den folgenden

Satz: *a) Ist f eine primitive binäre kubische Form und p eine Primzahl der Gestalt* $3n + 1$, *die in T aufgeht, so gehören alle durch f dargestellten zu p primen Zahlen zu einer Nebenklasse von $\mathfrak{R}_p/\mathfrak{K}$.* Wir verwenden hierfür die kürzere Ausdrucksweise: *f besitzt einen Charakter* mod p.

b) Die unter a) angegebenen Primzahlen sind die einzigen mit dieser Eigenschaft.

Beweis: a) Es gilt die identische Relation

$$27a^2f = (3a\,x + b\,y)^3 + (27a^2c - 9ab^2)\,xy^2 + (27a^2d - b^3)\,y^3.$$

Auf Grund der vorangegangenen Bemerkungen kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $(a,p) = 1$ angenommen werden. Aus $p \mid T$ folgt $p \mid 27a^2c - 9ab^2$ und $p \mid 27a^2d - b^3$ wegen $27a^2c - 9ab^2 = 9aA$ und $27a^2d - b^3 = 3aB + Ab$; daher ergibt sich

$$27a^2 f \equiv (3ax + by)^3, (p),$$

und der erste Teil des Satzes ist bewiesen.

b) Zum Beweis des zweiten Teiles transformieren wir f zunächst in eine Normalform mod p. Wir lösen $27a^2a' \equiv 1, (p)$ nach a' auf und üben auf f die Transformation $x = 9aa'x' - by'$, $y = 3ay'$ aus. Dann erhalten wir

$$(1)\quad \begin{aligned} f' &\equiv a'x'^3 + (3ac - b^2)\,x'y'^2 + (27a^3d - 9a^2bc + 2ab^3)\,y'^3 \\ &\equiv a'x'^3 + A\,x'y'^2 + (3a^2B - 2abA)\,y'^3, (p). \end{aligned}$$

Da es zu einer ganzrationalen Matrix S mit $|S| \equiv 1, (p)$ stets eine mod p kongruente unimodulare Matrix gibt, kann man diese Transformation auch durch eine unimodulare Matrix erreichen. Wegen $(3a,p) = 1$ und $-cA + bB = 3aC$ folgt aus $p \mid A$ und $p \mid B$ auch $p \mid C$. Wir schreiben dann (1) in der Gestalt

$$f' \equiv \alpha x^3 + \gamma xy^2 + \delta y^3, (p),$$

und wenn p nicht in T aufgeht — was wir jetzt annehmen wollen — sind γ und δ nicht beide zugleich durch p teilbar.

Wir behandeln zunächst den Fall $\gamma \equiv 0, (p)$. Hätte p die im Satz angegebene Eigenschaft, so wäre $\alpha\delta^2$ ein kubischer Rest mod p, und es bestünde eine Kongruenz $\alpha\,\delta^2 \equiv k_1^3, (p)$. Bestimmen wir k aus $k\,k_1 \equiv \delta, (p)$, so wäre $k^3\alpha\,\delta^2 \equiv \delta^3, (p)$ und weiter $k^3\alpha \equiv \delta, (p)$. Dann besäße aber $g = x^3 + k^3y^3$ einen Charakter mod p, und alle durch g darstellbaren Zahlen müßten kubische Reste sein. Ist nun r ein kubischer Rest und bestimmen wir y aus $k^3y^3 \equiv 1, (p)$, so stellt g auch Zahlen der Restklasse $r + 1$ dar, die wiederum kubische Reste sein müßten. Dann würde aber im Widerspruch zur Voraussetzung $p = 3n + 1$ folgen, daß alle Zahlen kubische Reste sind.

Im Falle $\gamma \not\equiv 0, (p)$ werden wir zeigen, daß $\alpha x^3 + \gamma xy^2 + \delta y^3$ mehr als $\frac{p-1}{3} + 1$ verschiedene Restklassen mod p darstellt. Zu diesem Zweck setzen wir $y = 1$ und bestimmen γ' und δ' aus den Kongruenzen $\gamma'\alpha \equiv \gamma, (p)$ und $\delta'\alpha \equiv \delta, (p)$. Daher wird unsere Behauptung bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß $x^3 + \gamma' x + \delta'$ oder — noch einfacher — $x^3 + \gamma' x$ mehr als $\frac{p-1}{3} + 1$ verschiedene Restklassen mod p darstellt. Ist $\xi \not\equiv \eta, (p)$, aber $\xi^3 + \gamma'\xi \equiv \eta^3 + \gamma'\eta, (p)$, so folgt $\xi^2 + \xi\eta + \eta^2 \equiv -\gamma', (p)$. Setzen wir für ξ eine bestimmte Restklasse ein, so hat die entstehende quadratische Kongruenz für η

$$1 + \left(\frac{-3\xi^2 - 4\gamma'}{p}\right)$$

Lösungen. Durchläuft ξ die primen Restklassen mod p, so liefert $-3\xi^2$ alle quadratischen Reste, die wir mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_{\frac{p-1}{2}}$ bezeichnen wollen. Unter den Zahlen $\varrho_1 - 4\gamma', \ldots \varrho_{\frac{p-1}{2}} - 4\gamma'$ kommt nun entweder ein quadratischer

Nichtrest oder die Nullrestklasse mod p vor. Wäre das nämlich nicht der Fall, so wäre auch $\varrho_1 - 4\,\gamma' = \varrho_i$ ein quadratischer Rest. Dann wäre aber auch $\varrho_i - 4\,\gamma' = \varrho_1 - 8\,\gamma'$ quadratischer Rest und durch sukzessives Anwenden dieses Verfahrens würde sich ergeben, daß die Zahlen $\varrho_1 - 4\,n\,\gamma'$ für $n = 1, \ldots, p$ sämtlich quadratische Reste sind, was offenbar unmöglich ist.

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen wollen wir zwei verschiedene Restklassen ξ und η zusammengehörig nennen, falls $\xi^3 + \gamma'\xi \equiv \eta^3 + \gamma'\eta, (p)$ gilt. Die Anzahl der Restklassen, die zu je drei zusammengehören, ist dann höchstens $p - 2$. Da aber diese Anzahl durch 3 teilbar sein muß, kann man die Schranke durch $p - 4$ ersetzen.

Kommt unter den Zahlen $\varrho_i - 4\,\gamma'$ ein Nichtrest vor, so haben wir zwei Restklassen, die mit keiner weiteren zusammengehören. Die beiden noch verbleibenden Restklassen können zusammengehören oder auch nicht, die Anzahl der durch $x^3 + \gamma' x$ dargestellten Restklassen ist dann sicher größer als $\frac{p-4}{3} + 2 = \frac{p-1}{3} + 1$.

Tritt unter den Zahlen $\varrho_i - 4\,\gamma'$ kein Nichtrest auf, so kommt jedenfalls die Nullrestklasse vor. Dann muß aber $-4\,\gamma'$ quadratischer Nichtrest mod p sein. Wäre nämlich $-4\,\gamma'$ quadratischer Rest, so gälte dasselbe für $-8\,\gamma'$, $-12\,\gamma'$ usw. Das ist aber nicht möglich, da man ja auf diese Weise alle primen Restklassen mod p erhält.

Auch jetzt kommen wieder höchstens $p - 4$ Restklassen vor, die zu je drei zusammengehören; eine Restklasse gehört mit keiner weiteren zusammen, und die nun noch verbleibenden drei Restklassen können nicht alle denselben Kongruenzwert von $x^3 + \gamma' x$ mod p liefern. Das heißt aber wieder, daß $x^3 + \gamma' x$ mehr als $\frac{p-1}{3} + 1$ verschiedene Restklassen mod p darstellt. Unser Satz ist somit vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 21. April 1956)

KLINGENBERG, W.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 180—200 (1956)

Projektive Geometrien mit Homomorphismus

Von

WILHELM KLINGENBERG in Göttingen

Wir betrachten eine Verallgemeinerung und gleichzeitig Bereicherung des Begriffs Projektive Geometrie, die wir als Projektive Geometrie mit Homomorphismus (abgekürzt: Projektive Geometrie m. H.) bezeichnen. Die projektive Geometrie im üblichen Sinne[1]) bezeichnen wir in unserem Zusammenhang auch als gewöhnliche projektive Geometrie.

Unter einem projektiven Raum mit Homomorphismus $\mathcal{P}_3$ verstehen wir eine Menge $\mathcal{P}_3$ von Punkten, in denen zwei Sorten von Teilmengen, Geraden und Ebenen genannt, ausgezeichnet sind. Dazu ist eine Inzidenz-erhaltende Abbildung, Homomorphismus genannt, der Punkte, Geraden und Ebenen von $\mathcal{P}_3$ auf die Punkte, Geraden und Ebenen eines gewöhnlichen projektiven Raums $\overline{\mathcal{P}}_3$ gegeben und es gelten folgende Axiome:

R 1: Zu zwei Punkten (bzw. drei Punkten) in $\mathcal{P}_3$ gibt es genau eine Gerade (bzw. eine Ebene), die sie enthält, wenn diese Aussage für die Bilder dieser zwei (bzw. drei) Punkte in $\overline{\mathcal{P}}_3$ gilt.

R 2: Zwei Ebenen (bzw. drei Ebenen) in $\mathcal{P}_3$ haben genau eine Gerade (bzw. einen Punkt) gemeinsam, wenn diese Aussage für die Bilder dieser zwei (bzw. drei) Ebenen in $\overline{\mathcal{P}}_3$ gilt.

R 3: Jede Verbindungsgerade zweier Punkte einer Ebene in $\mathcal{P}_3$ gehört ganz der Ebene an, wenn diese Aussage für die Bilder der Punkte und das Bild der Ebene in $\overline{\mathcal{P}}_3$ gilt.

R 4: Die zu R 3 duale Aussage[2]).

Wir nennen ($\mathcal{P}_3$, $\overline{\mathcal{P}}_3$) ein Paar homomorpher projektiver Räume[3]).

Diese Definition umfaßt insbesondere den Begriff des gewöhnlichen projektiven Raums, indem man für den Homomorphismus speziell die identische Abbildung nimmt, also $\mathcal{P}_3$ gleich $\overline{\mathcal{P}}_3$ setzt[4]).

---

[1]) Siehe etwa die Definition bei HILBERT [6] oder BAER [3].

[2]) Vgl. hiermit die Formulierung der Axiome in II. 1.

[3]) Indem man zwei Punkte, Geraden oder Ebenen äquivalent nennt, wenn sie dasselbe Bild in $\overline{\mathcal{P}}_3$ haben, ist auf $\mathcal{P}_3$ ein Tripel von Äquivalenzrelationen definiert, das (in einem wohlbestimmten Sinn) verträglich ist mit der Struktur von $\mathcal{P}_3$. Umgekehrt bestimmt dieses Tripel strukturverträglicher Äquivalenzrelationen den Raum $\overline{\mathcal{P}}_3$ bis auf einen Isomorphismus. Ganz allgemein induziert eine inzidenzerhaltende Abbildung von $\mathcal{P}_3$ auf einen Raum $\mathcal{P}'_3$ ein Tripel von strukturverträglichen Äquivalenzrelationen, welches seinerseits $\mathcal{P}'_3$ bis auf einen Isomorphismus bestimmt. Man wird so auf einen „Homomorphiesatz für projektive Geometrien m. H." geführt, der ein Gegenstück zu dem Homomorphiesatz für algebraische Strukturen darstellt, vgl. BOURBAKI [4], § 4.

[4]) Allgemeiner fallen hierunter die Paare gewöhnlicher projektiver Räume, die durch einen Isomorphismus aufeinander bezogen sind.

Der gewöhnliche projektive Raum $\overline{\mathcal{P}}_3$ besitzt bekanntlich als Modell den projektiven Raum $\overline{\mathcal{P}}_3(K)$ über einem wohlbestimmten Körper K [5]) [6]) und umgekehrt ist für jeden Körper K $\overline{\mathcal{P}}_3(K)$ ein gewöhnlicher projektiver Raum[1]).

Ein Hauptresultat dieser Note ist nun die algebraische Beschreibung eines projektiven Raums m. H. $\mathcal{P}_3 : \mathcal{P}_3$ besitzt als Modell den projektiven Raum $\mathcal{P}_3(A)$ über einem wohlbestimmten Ring A [7]) mit Eins und einem Ideal I, welches gleichzeitig größtes Links- und größtes Rechtsideal ist; wir sprechen künftig von I einfach als dem größten Ideal[8]). A nennen wir Koordinatenring von $\mathcal{P}_3$. $\mathcal{P}_3(A)$ ist ganz entsprechend zu dem bekannten Spezialfall, daß A ein Körper ist, definiert (vgl. die Definition in II. 4).

Der gewöhnliche projektive Raum $\overline{\mathcal{P}}_3$ besitzt als Modell den projektiven Raum $\overline{\mathcal{P}}_3(\bar{A})$ über einem zu A/I isomorphen Körper $\bar{A}$, so daß der Homomorphismus $\mathcal{P}_3 \to \overline{\mathcal{P}}_3$ durch den natürlichen Homomorphismus von $\mathcal{P}_3(A)$ auf $\overline{\mathcal{P}}_3(\bar{A})$ beschrieben wird.

Ist umgekehrt ein Ring A mit Eins und größtem Ideal I sowie ein Homomorphismus $A \to \bar{A}$ von A auf einen zu A/I isomorphen Körper $\bar{A}$ gegeben, so ist $\mathcal{P}_3(A)$ ein projektiver Raum mit dem durch $A \to \bar{A}$ induzierten Homomorphismus auf den gewöhnlichen projektiven Raum $\overline{\mathcal{P}}_3(\bar{A})$.

Damit haben wir die projektiven Räume mit Homomorphismus algebraisch mit Hilfe der "local rings" charakterisiert. Es versteht sich, daß sich diese Betrachtungen auf projektive Geometrien mit mehr als drei Dimensionen ausdehnen lassen; für die Ebenen siehe unten.

Von besonderem Interesse sind solche Paare $(\mathcal{P}_3, \overline{\mathcal{P}}_3)$ von homomorphen projektiven Räumen, in denen $\mathcal{P}_3$ ein gewöhnlicher projektiver Raum ist. Für den Koordinatenring A bedeutet dies folgendes: A enthält keine Nullteiler und je zwei Elemente aus A sind rechtsvergleichbar und linksvergleichbar[9]). Wegen dieser Eigenschaften läßt sich A zu einem Linksquotientenkörper K erweitern, der gleichzeitig Rechtsquotientenkörper ist[10]), und K ist der Koordinatenkörper von $\mathcal{P}_3$, als gewöhnlicher projektiver Raum betrachtet. Solche homomorphen Paare $(\mathcal{P}_3, \overline{\mathcal{P}}_3)$ von gewöhnlichen projektiven Räumen meinten wir, als wir eingangs von einer Bereicherung des Begriffs Projektive Geometrie sprachen.

Falls insbesondere für $\mathcal{P}_3$ der Satz von Pappos-Pascal gilt, können wir dies Ergebnis auch folgendermaßen formulieren: *Ein Homomorphismus*

---

[5]) Bei dem Begriff Körper setzen wir nicht das kommutative Gesetz der Multiplikation voraus.

[6]) Zum Begriff des projektiven Raums über einem Körper, vgl. neben Baer [3] auch Bourbaki [5], App. III.

[7]) Bei dem Begriff Ring setzen wir nicht das kommutative Gesetz der Multiplikation voraus.

[8]) Das zweiseitige Ideal I ist auch dadurch gekennzeichnet, daß jedes Element aus $A—I$ invertierbar ist (vgl. den Beweis von Satz 14). Bei Cartan-Eilenberg [5a] heißt A: local ring.

[9]) Zwei Elemente a, b eines Ringes A nennen wir rechtsvergleichbar, wenn es ein $b' \in A$ gibt mit $a = bb'$ oder wenn es ein $a' \in A$ gibt mit $b = aa'$. Entsprechend ist der Begriff linksvergleichbar definiert.

[10]) Über Bedingungen, unter denen man einen Ring zu einem Rechts- oder einem Linksquotientenkörper erweitern kann, vgl. Bourbaki [4], § 9, exerc. 8.

des gewöhnlichen projektiven Raums $\mathcal{P}_3$ mit dem kommutativen Koordinatenkörper K auf den projektiven Raum $\overline{\mathcal{P}}_3$ mit dem Koordinatenkörper $\overline{K}$ ist gleichbedeutend mit der Auszeichnung eines Bewertungsringes[11]) *A in K derart, daß K Quotientenkörper von A ist und $\overline{K}$ isomorph A/I, wo I das Ideal der Nichteinheiten in A ist.*

So gehört z. B. zu jeder Primzahl p ein Homomorphismus des projektiven Raumes $\mathcal{P}_3(\mathbf{Q})$ über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen auf den projektiven Raum $\mathcal{P}_3(\mathbf{F}_p)$ über dem Primkörper $\mathbf{F}_p$ der Charakteristik p: Sei nämlich $\mathbf{Z}_p$ der Ring der rationalen Zahlen mit einem p-Betrag $\leqq 1$, so induziert der natürliche Homomorphismus von $\mathbf{Z}_p$ auf $\mathbf{F}_p$ einen Homomorphismus von $\mathcal{P}_3(\mathbf{Z}_p)$ auf $\mathcal{P}_3(\mathbf{F}_p)$. Ein Beispiel für einen Endomorphismus erhalten wir, wenn wir im Körper $K = \overline{K}(X)$ der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten X über dem Körper $\overline{K}$ den Bewertungsring K_X der Elemente mit einem zu X teilerfremden Nenner betrachten. Dem natürlichen Endomorphismus von K_X auf $\overline{K}$ entspricht ein Endomorphismus des projektiven Raums über K auf den projektiven Unterraum über $\overline{K}$.

In Teil I betrachten wir projektive Ebenen mit Homomorphismus $\mathcal{P}_2$: $\mathcal{P}_2$ ist eine Menge von Punkten, in der eine Sorte von Teilmengen, Geraden genannt, ausgezeichnet sind. Dazu ist eine Abbildung, Homomorphismus genannt, der Punkte und Geraden von $\mathcal{P}_2$ auf die Punkte und Geraden einer gewöhnlichen projektiven Ebene $\overline{\mathcal{P}}_2$[12]) gegeben und es gelten die Axiome:

E 1: Zu zwei Punkten in $\mathcal{P}_2$ gibt es genau eine Gerade, die sie enthält, wenn diese Aussage für die Bilder dieser zwei Punkte in $\overline{\mathcal{P}}_2$ gilt.

E 2: Zwei Geraden in $\mathcal{P}_2$ haben genau einen Punkt gemeinsam, wenn diese Aussage für die Bilder der Geraden in $\overline{\mathcal{P}}_2$ gilt[13]).

$(\mathcal{P}_2, \overline{\mathcal{P}}_2)$ nennen wir ein Paar homomorpher projektiver Ebenen[14]).

Damit eine gewöhnliche projektive Ebene $\overline{\mathcal{P}}_2$ ein Modell $\overline{\mathcal{P}}_2(K)$ über einem Körper K besitzt, ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß $\overline{\mathcal{P}}_2$ desarguessch ist[15]). Wir wählen für diese Eigenschaft eine von ARTIN stammende Formulierung[16]), die sich unmittelbar auf projektive Ebenen m. H. übertragen läßt.

Dazu fixieren wir in $\mathcal{P}_2$ eine Gerade g^* als ausgezeichnete uneigentliche Gerade und erklären dazu in naheliegender Weise die affine Ebene mit Homomorphismus $\mathcal{A}_2$, deren Bild $\overline{\mathcal{A}}_2$ in $\overline{\mathcal{P}}_2$ die gewöhnliche affine Ebene in $\overline{\mathcal{P}}_2$ bezüglich der Geraden $\overline{g^*}$ ist.

Wir fordern nun, daß auf $\mathcal{A}_2$ eine transitive Gruppe $\mathfrak{T}$ von Translationen existiert[16]) [Axiom (d); Kleiner affiner Satz von DESARGUES]. Es folgt, daß $\mathfrak{T}$

---

[11]) Vgl. hierzu KRULL [9].

[12]) Zum Begriff der (gewöhnlichen) projektiven Ebene siehe HILBERT [6] und PICKERT [10].

[13]) Vgl. hiermit die Formulierung der Axiome in I. 1.

[14]) Der Homomorphismus $\mathcal{P}_2 \to \overline{\mathcal{P}}_2$ induziert strukturverträgliche Äquivalenzrelationen auf den Punkten und auf den Geraden von $\mathcal{P}_2$, welche ihrerseits die gewöhnliche projektive Ebene $\overline{\mathcal{P}}_2$ wiederum bis auf einen Isomorphismus bestimmen (vgl. auch Anm. 3).

[15]) Siehe HILBERT [6] oder PICKERT [10].

[16]) Siehe ARTIN [2].

kommutativ ist. $\mathcal{A}_2$ läßt sich als homogener Raum unter $\mathfrak{T}$ auffassen, bei dem nur die 0-Translation einen Punkt festläßt. Der Homomorphismus $\mathcal{A}_2 \to \bar{\mathcal{A}}_2$ induziert einen Homomorphismus $\mathfrak{T} \to \bar{\mathfrak{T}}$ der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ auf die Translationsgruppe $\bar{\mathfrak{T}}$ von $\bar{\mathcal{A}}_2$.

Die Menge der Translationen in einer festen Richtung bildet eine Untergruppe in $\mathfrak{T}$; wir sprechen von einer Richtungsuntergruppe in $\mathfrak{T}$. Sind $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ zwei Richtungsuntergruppen von $\mathfrak{T}$ derart, daß ihre Bilder $\bar{\mathfrak{U}}$, $\bar{\mathfrak{U}}'$ in $\bar{\mathfrak{T}}$ verschieden sind, so ist $\mathfrak{T}$ direkte Summe von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$[17]).

Auf der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ betrachten wir den Ring A derjenigen Endomorphismen, die jede Richtungsgruppe in sich überführen. Dem Ring A entspricht homomorph ein Ring $\bar{A}$ ebensolcher Endomorphismen von $\bar{\mathfrak{T}}$. Der Kern des Homomorphismus $A \to \bar{A}$ ist ein größtes Ideal; $\bar{A}$, isomorph zu A/I, ist also ein Körper.

Wir betrachten $\mathfrak{T}$ jetzt als A-Modul und fordern: Jede Richtungsuntergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{T}$ wird von einem beliebigen ihrer Elemente τ mit $\bar{\tau} \neq 0$ erzeugt: $A\tau = \mathfrak{U}$ [Axiom (D); Großer affiner Satz von Desargues][16]). Axiom (D) gilt dann auch für $\bar{\mathcal{A}}_2$.

Damit läßt sich $\mathfrak{T}$ nach Wahl zweier Translationen, deren Bilder in $\bar{\mathfrak{T}}$ linear unabhängig sind, durch die additive Gruppe von $A \times A$ repräsentieren. Nach Wahl eines Punktes P_0 in $\mathcal{A}_2$ gelangen wir dann zur Darstellung von $\mathcal{A}_2$ als affine Ebene $\mathcal{A}_2(A)$ über dem Ring A.

Diese Darstellung von $\mathcal{A}_2$ läßt sich fortsetzen zu einer Darstellung von $\mathcal{P}_2$ als projektive Ebene $\mathcal{P}_2(A)$ über A. Umgekehrt ist zu jedem Ring A mit Eins und größtem Ideal I durch $\mathcal{P}_2(A)$ eine projektive Ebene mit dem Homomorphismus auf die gewöhnliche projektive Ebene $\bar{\mathcal{P}}_2(A/I)$ über dem Körper A/I erklärt. Dabei gelten in jeder zu $\mathcal{P}_2(A)$ gehörenden affinen Ebene m. H die Axiome (d) und (D).

In Teil II betrachten wir die Paare $(\mathcal{P}_3, \bar{\mathcal{P}}_3)$ homomorpher projektiver Räume. Wir zeigen, daß jede Ebene von $\mathcal{P}_3$ desarguessch ist, daß also jede Ebene in $\mathcal{P}_3$ als projektive Ebene $\mathcal{P}_2(A)$ über einem Ring A mit Eins und größtem Ideal I dargestellt werden kann. Da nun je zwei Ebenen in $\mathcal{P}_3$ isomorph sind, folgt, daß $(\mathcal{P}_3, \bar{\mathcal{P}}_3)$ das Paar $(\mathcal{P}_3(A), \bar{\mathcal{P}}_3(\bar{A}))$, mit $\bar{A}$ isomorph A/I, als Modell besitzt.

Hiermit haben wir die bekannte Kennzeichnung der desarguesschen unter den gewöhnlichen projektiven Ebenen auf projektive Ebenen m. H. erweitert: *Eine projektive Ebene m. H. ist dann und nur dann desarguessch, wenn sie sich als Ebene in einen projektiven Raum m. H. einbetten läßt*[18]).

In Teil III bringen wir einige Ergänzungen: Wenn etwa das Axiom R 1 für $\mathcal{P}_3$ dahingehend verschärft wird, daß je zwei (je drei) Punkte von $\mathcal{P}_3$ stets in einer Geraden (in einer Ebene) enthalten sind, so entspricht dem im Koordinatenring A von $\mathcal{P}_3$, daß je zwei Elemente rechtsvergleichbar sind.

---

[17]) Vgl. die entsprechenden Sätze für gewöhnliche affine Translationsebenen bei André [1], dargestellt bei Pickert [10].

[18]) Siehe Hilbert [6].

Eine analoge Verschärfung von R 2 bedeutet für den Koordinatenring A, daß je zwei Elemente linksvergleichbar sind.

Wenn zwei verschiedene Punkte von $\mathcal{P}_3$ stets höchstens eine Verbindungsgerade besitzen sollen, so entspricht dem, daß der Koordinatenring A von $\mathcal{P}_3$ nullteilerfrei ist.

In zwei früheren Noten[19]) hatten wir folgenden Spezialfall einer projektiven Ebene m. H. betrachtet: Zwei Punkte von $\mathcal{P}_2$ sollen stets eine Verbindungsgerade besitzen und zwei Geraden von $\mathcal{P}_2$ sollen stets einen Punkt gemeinsam haben. Die Verbindungsgerade und der Schnittpunkt sollen dann und nur dann eindeutig bestimmt sein, wenn dies für die Bilder der zwei Punkte und die Bilder der zwei Geraden in $\overline{\mathcal{P}}_2$ gilt, d. h., wenn die Bilder der Punkte und die Bilder der Geraden in $\overline{\mathcal{P}}_2$ verschieden sind.

Wir hatten ein $\mathcal{P}_2$ mit diesen Eigenschaften Projektive Ebene mit Nachbarelementen genannt und die desarguesschen unter ihnen algebraisch gekennzeichnet [8]: Im zugehörigen Koordinatenring A mit Eins und größtem Ideal I sind je zwei Elemente rechts- und linksvergleichbar und jedes Element aus I, verschieden von Null, ist zweiseitiger Nullteiler. Aus unseren Überlegungen ergibt sich, daß hierdurch auch die Koordinatenringe A der entsprechend definierten projektiven Räume mit Nachbarelementen gekennzeichnet sind.

I. Projektive Ebenen mit Homomorphismus

I.1. Definition der projektiven Ebene mit Homomorphismus.

Definition: Unter einer projektiven Ebene mit Homomorphismus $\mathcal{P}_2$ verstehen wir eine Menge $\mathcal{P}_2$ von *Punkten* $P, Q, R, \ldots$, in der gewisse Teilmengen, die *Geraden* $g, h, j, \ldots$, ausgezeichnet sind. Dazu ist eine Inzidenz-erhaltende Abbildung[20])

$$P \to \overline{P};\; g \to \overline{g},$$

Homomorphismus genannt, der Punkte und Geraden von $\mathcal{P}_2$ auf die Punkte $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \ldots$ und Geraden $\overline{g}, \overline{h}, \overline{j}, \ldots$ einer gewöhnlichen projektiven Ebene $\overline{\mathcal{P}}_2$ gegeben und es gelten folgende Axiome:

E 1: Zu zwei Punkten P und Q von $\mathcal{P}_2$ gibt es genau eine Gerade g, die sie enthält, wenn ihre Bilder $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ in $\overline{\mathcal{P}}_2$ verschieden sind.

E 2: Zwei Geraden g und h in $\mathcal{P}_2$ haben genau einen Punkt P gemeinsam, wenn die Bilder $\overline{g}$ und $\overline{h}$ der Geraden in $\overline{\mathcal{P}}_2$ verschieden sind.

Wir nennen $(\mathcal{P}_2, \overline{\mathcal{P}}_2)$ ein Paar homomorpher projektiver Ebenen.

Ergänzungen: Die unter den Voraussetzungen von E 1 bestimmte Gerade g nennen wir Verbindungsgerade von P und Q und schreiben dafür auch

---

[19]) Siehe [7] und [8]. In [7] hatten wir diejenigen Ebenen mit Nachbarelementen, in denen der Satz von Pappos-Pascal gilt, algebraisch gekennzeichnet. In [8] hatten wir die Desarguesschen Ebenen mit Nachbarelementen durch ihren Koordinatenring charakterisiert. In Teil I der vorliegenden Arbeit lehnen wir uns oft an die Beweise aus [8] an, welche ihrerseits wiederum verschiedentlich auf die Note von Artin [2] zurückgehen.

[20]) Die Eigenschaft inzidenzerhaltend bedeutet: Aus $P \in g$ folgt $\overline{P} \in \overline{g}$. Wenn man die Abbildung $g \to \overline{g}$ der Geraden von $\mathcal{P}_2$ auf die Geraden von $\overline{\mathcal{P}}_2$ als *Fortsetzung* der Abbildung $P \to \overline{P}$ auf die Geraden (als Punktmengen) auffaßt, ist die Implikation Aus $P \in g$ folgt $\overline{P} \in \overline{g}$ trivial.

$P \neq Q$. Den unter den Voraussetzungen von E 2 bestimmten Punkt P nennen wir Schnittpunkt von g und h und schreiben dafür auch $g \cap h$.

Bemerkung: Die Definition läßt offen, ob im Falle $\bar{P} = \bar{Q}$ die Punkte P und Q überhaupt einer Geraden oder gar mehreren Geraden angehören; Entsprechendes gilt für zwei Geraden g, h mit $\bar{g} = \bar{h}$.

Da der Homomorphismus eine Abbildung auf ist, gilt der

Satz 1: Jede Gerade in $\mathcal{P}_2$ enthält drei Punkte, deren Bilder in $\bar{\mathcal{P}}_2$ verschieden sind und jeder Punkt in $\mathcal{P}_2$ ist in drei Geraden mit verschiedenen Bildern enthalten. Es gibt vier Punkte in $\mathcal{P}_2$, deren Bilder sich in „allgemeiner Lage" befinden.

I.2. Die affine Ebene mit Homomorphismus.

Definition: Es sei g^* eine Gerade in $\mathcal{P}_2$. Unter der zu g^* gehörenden *affinen Ebene mit Homomorphismus* $\mathcal{A}_2$ verstehen wir die Menge $\mathcal{A}_2$ derjenigen Punkte von $\mathcal{P}_2$, deren Bild nicht zum Bild $\overline{g^*}$ von g^* in $\bar{\mathcal{P}}_2$ gehören[21]). Diejenigen Teilmengen von $\mathcal{A}_2$, die sich als nichtleerer Durchschnitt von Geraden aus $\mathcal{P}_2$ mit $\mathcal{A}_2$ ergeben, nennen wir *Geraden von* $\mathcal{A}_2$[22]). Die Einschränkung des Homomorphismus $\mathcal{P}_2 \to \bar{\mathcal{P}}_2$ auf $\mathcal{A}_2$ liefert einen Homomorphismus von $\mathcal{A}_2$ auf die zu der Geraden $\overline{g^*}$ gehörende gewöhnliche affine Ebene $\bar{\mathcal{A}}_2$ in $\bar{\mathcal{P}}_2$.

In Übereinstimmung mit der üblichen Terminologie nennen wir diejenigen Punkte und Geraden von $\mathcal{P}_2$, denen nicht Punkte und Geraden in $\mathcal{A}_2$ entsprechen, *uneigentliche* Punkte und Geraden von $\mathcal{A}_2$. Die Punkte von g^* und g^* selber nennen wir auch *ausgezeichnet uneigentlich*. Zwei Geraden von $\mathcal{A}_2$ nennen wir *parallel*, wenn sie einen Punkt auf g^* gemeinsam haben.

Bemerkung: Man beachte, daß es für $\mathcal{A}_2$ außer den ausgezeichneten uneigentlichen Punkten auf g^* noch weitere uneigentliche Punkte geben kann. In einem solchen Falle gibt es dann außer den Paaren verschiedener paralleler Geraden noch andere Geradenpaare in $\mathcal{A}_2$, die keinen Punkt gemeinsam haben.

Aus der Definition folgt unmittelbar der

Satz 2: In $\mathcal{A}_2$ gibt es zu einer Geraden g durch einen Punkt P genau eine Gerade h, die zu g parallel ist.

Denn h ist als Verbindungsgerade von P mit dem ausgezeichneten uneigentlichen Punkt $T^* = g \cap g^*$ von g eindeutig bestimmt.

I.3. Translationen.

Definition: Unter einer *Translation* τ der affinen Ebene m. H. $\mathcal{A}_2$ verstehen wir eine Abbildung $P \to P^\tau$, $g \to g^\tau$ der Punkte und Geraden von $\mathcal{A}_2$ in sich mit folgenden Eigenschaften:

1. Für jede Gerade g ist das Bild g^τ parallel zu g.
2. Wenn es einen Punkt P und eine Gerade g gibt mit $P \in g$, $P^\tau \in g$, so gilt, für jeden Punkt Q: Die Parallele h zu g durch Q enthält Q^τ.

Eine Translation heißt *einfach*, wenn es ein Punktepaar P, P^τ gibt, für das eine Gerade g existiert mit $P \in g$, $P^\tau \in g$. g heißt dann *Spur* von τ bezüglich P. Es

---

[21]) Vgl. die ganz analoge Definition der affinen Ebene mit Nachbarelementen in [7] und [8].

[22]) Im allgemeinen bezeichnen wir eine Gerade in $\mathcal{A}_2$ ebenso wie die zugehörige Gerade in $\mathcal{P}_2$.

sei $T^* = g \cap g^*$ der ausgezeichnete uneigentliche Punkt von g. Dann gilt wegen 2. für alle Q: $Q^\tau \in Q + T^*$. T^* heißt ***Spurpunkt*** oder ***Richtung*** von τ.

Bemerkung: Es kann zu einer einfachen Translation durchaus mehrere Richtungen geben. So ist z. B. bei der 0-Translation, die jeden Punkt festläßt, jeder Punkt von g^* Spurpunkt.

Satz 3: Eine einfache Translation τ ist festgelegt, wenn man für einen einzigen Punkt P sein Bild P^τ unter τ kennt.

Beweis[23]): P und P^τ und eine Spur g von τ durch P und P^τ seien gegeben. $T^* = g \cap g^*$ sei der Spurpunkt. Dann gilt $Q^\tau \in Q + T^* = h$. Wenn $\overline{Q} \notin \overline{g}$, so existiert eindeutig die Verbindungsgerade $j = P + Q$ und $Q = h \cap j$. Dann ist Q^τ als $h \cap j^\tau$ bestimmt, wo j^τ die Parallele zu j durch P^τ ist. Wenn nun für R gilt $\overline{R} \in \overline{g}$, so ist jedenfalls $\overline{R} \notin \overline{h}$, und R^τ bestimmt sich auf die angegebene Weise aus Q und Q^τ.

Satz 4: Eine einfache Translation ist eine eineindeutige Abbildung der Punkte und Geraden von $\mathcal{A}_2$ auf sich.

Beweis: Es sei τ eine einfache Translation, T^* ein Spurpunkt von τ.

a) Jeder Punkt R' von $\mathcal{A}_2$ besitzt ein Urbild. Es sei nämlich $j = R' + T^*$ und Q ein Punkt mit $\overline{Q} \notin \overline{j}$. Dann ist $Q^\tau \in Q + T^*$. Indem man die vorangehende Konstruktion „rückwärts" durchführt, findet man einen Punkt R auf j mit $R^\tau = R'$.

b) Es seien R_1, R_2 Punkte mit $R_1^\tau = R_2^\tau = R'$. Dann liegt R' auf $R_1 + T^*$ und $R_2 + T^*$, also $R_1, R_2 \in j$. Wenn wir nun zu einem Punkt Q mit $\overline{Q} \notin \overline{j}$ das Bild Q^τ nach dem Verfahren aus dem Beweis von Satz 3 einmal mit Hilfe von R_1, $R_1^\tau = R'$, und das andere Mal mit Hilfe von R_2, $R_2^\tau = R'$, bestimmen, ergibt sich $R_1 = R_2$.

Bemerkung: Die einfachen Translationen erzeugen eine Gruppe $\mathfrak{T}$ in der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen von $\mathcal{A}_2$ auf sich. Während man für gewöhnliche affine Ebenen zeigen kann, daß die Elemente von $\mathfrak{T}$ wieder Translationen sind, scheint dies für affine Ebenen m. H. nicht möglich zu sein. Wir fordern daher ausdrücklich, daß $\mathfrak{T}$ aus Translationen besteht, und verbinden diese Forderung mit einer weiteren zu dem

Axiom (d) (Kleiner affiner Satz von DESARGUES): Die von den einfachen Translationen erzeugte Gruppe $\mathfrak{T}$ ist transitiv auf den Punkten von $\mathcal{A}_2$. Jedes Element von $\mathfrak{T}$ ist eine Translation.

Die Verknüpfung auf $\mathfrak{T}$ schreiben wir additiv.

Satz 5: Wenn es zu einer Translation $\sigma \in \mathfrak{T}$ einen Punkt P gibt mit $P^\sigma = P$, so ist $\sigma = 0$, die 0-Translation. Die Translationen τ von $\mathfrak{T}$ lassen sich also, nach Wahl eines Punktes P_0, durch die Bildpunkte P_0^τ repräsentieren.

Bemerkung: Man sagt deshalb, daß $\mathcal{A}_2$ ein homogener Raum unter $\mathfrak{T}$ ist und daß $\mathfrak{T}$ treu operiert auf $\mathcal{A}_2$[24]).

Beweis: Da P und P^σ in einer Geraden enthalten sind, ist σ eine einfache Translation, und die Behauptung folgt aus Satz 3.

---

[23]) Vgl. [8], Satz 9.

[24]) Vgl. BOURBAKI [4], § 7, No. 6.

Satz 6: Jede Translation $\tau \in \mathfrak{T}$ läßt sich als Summe zweier einfacher Translationen darstellen.

Wir repräsentieren τ durch P_0 und P_0^τ. Es gibt Geraden g, h mit $P_0 \in g$, $P_0^\tau \in h$ und $\bar{g} \neq \bar{h}$[25]). Dann existiert $Q = g \cap h$. Wenn wir ϱ und σ durch $P_0^\varrho = Q$ und $Q^\sigma = P_0^\tau$ erklären, ist $P_0^{\varrho+\sigma} = P_0^\tau$, also nach Satz 5: $\varrho + \sigma = \tau$.

Satz 7: Eine Translation τ von $\mathfrak{T}$ induziert eine Translation $\bar{\tau}$ in der gewöhnlichen affinen Ebene $\bar{\mathcal{A}}_2$, indem man $\bar{P}^{\bar{\tau}}$ durch $\overline{P^\tau}$ erklärt, wobei P ein beliebiges Urbild von $\bar{P}$ ist. Diese Zuordnung $\tau \to \bar{\tau}$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{T}$ auf die Translationsgruppe $\bar{\mathfrak{T}}$ von $\bar{\mathcal{A}}_2$. Der Kern des Homomorphismus besteht aus den Translationen τ mit $\bar{\tau} = 0$, also $\overline{P^\tau} = \bar{P}$.

Beweis: a) Aus $\bar{P} = \bar{P'}$ folgt $\overline{P^\tau} = \overline{P'^\tau}$; das erschließt man etwa aus der Beweisfigur von Satz 3 zunächst für einfache Translationen τ und dann auch für beliebige Translationen τ aus $\mathfrak{T}$. Die Definition von $\overline{P^\tau}$ ist also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten von $\bar{P}$ in $\mathcal{A}_2$.

b) Die Abbildung $\bar{\tau}$ hat die Eigenschaften 1, 2 einer Translation, da τ diese Eigenschaften hat.

c) Die Behauptung $\overline{\sigma + \tau} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}$ folgt aus $\bar{P}^{\overline{\sigma+\tau}} = \overline{P^{\sigma+\tau}} = \overline{(P^\sigma)^\tau} = (\overline{P^\sigma})^{\bar{\tau}} = (\bar{P}^{\bar{\sigma}})^{\bar{\tau}} = \bar{P}^{\bar{\sigma}+\bar{\tau}}$.

d) Das homomorphe Bild $\bar{\mathfrak{T}}$ von $\mathfrak{T}$ ist transitiv auf $\bar{\mathcal{A}}_2$, weil $\mathfrak{T}$ transitiv auf $\mathcal{A}_2$ ist.

Satz 8: Wenn für eine Translation τ gilt $\bar{\tau} \neq 0$, so ist τ eine einfache Translation.

Denn wegen $\overline{P^\tau} \neq \bar{P}$ haben P und P^τ eine Verbindungsgerade.

Satz 9: Die Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ von $\mathcal{A}_2$ ist kommutativ und ebenso die Translationsgruppe $\bar{\mathfrak{T}}$ von $\bar{\mathcal{A}}_2$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß je zwei einfache Translationen vertauschbar sind. Wir betrachten zunächst den Fall, daß σ und τ Spurpunkte S^* und T^* mit $\bar{S}^* \neq \bar{T}^*$ besitzen. Sei P_0 ein Punkt in $\mathcal{A}_2$. $P_0^\sigma + T^*$ und $P_0^\tau + S^*$ schneiden sich eindeutig, also $P_0^{\sigma+\tau} = P_0^{\tau+\sigma}$. Wenn nun $\bar{S}^* = \bar{T}^*$ ist, so setzen wir $\tau = \tau_1 + \tau_2$, wo $\bar{\tau}_1$ und $\bar{\tau}_2$ eine von $\bar{S}^*$ verschiedene Richtung haben. Damit wird $\sigma + \tau = \sigma + \tau_1 + \tau_2 = \tau_1 + \sigma + \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 + \sigma = \tau + \sigma$.

Unmittelbar klar ist die Behauptung von

Satz 10: Die Menge $\mathfrak{U}$ der Translationen aus $\mathfrak{T}$ mit einer festen Richtung T^* bildet eine Untergruppe von $\mathfrak{T}$. Wir nennen $\mathfrak{U}$ eine *Richtungsuntergruppe*. Das Bild $\bar{\mathfrak{U}}$ von $\mathfrak{U}$ in $\bar{\mathfrak{T}}$ ist Richtungsuntergruppe in $\bar{\mathfrak{T}}$.

Satz 11: Es seien $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ zwei Richtungsuntergruppen mit verschiedenen Bildern $\bar{\mathfrak{U}}, \bar{\mathfrak{U}}'$ in $\bar{\mathfrak{T}}$. Dann ist $\mathfrak{T}$ direkte Summe von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$[26]).

Beweis: Wir repräsentieren, nach Wahl eines Punktes P_0 in $\mathcal{A}_2$, die Translationen τ von $\mathfrak{T}$ durch die Punkte P_0^τ. Die Repräsentanten P_0^σ und $P_0^{\sigma'}$ der Translationen $\sigma \in \mathfrak{U}$ und $\sigma' \in \mathfrak{U}'$ bilden dabei zwei Geraden g, g' durch P_0 mit $\bar{g} \neq \bar{g}'$. Da nun jedem Punkt P von $\mathcal{A}_2$ durch „Projektion" umkehrbar eindeutig zwei Punkte Q, Q' auf g und g' entsprechen, entsprechen sich auch die durch P und Q, Q' repräsentierten Translationen τ und σ, σ' eineindeutig.

[25]) Denn in $\bar{\mathcal{A}}_2$ gibt es zu $\bar{P}_0, \bar{P}_0^\tau$ Geraden $\bar{g}, \bar{h}$ mit diesen Eigenschaften.

[26]) Vgl. André [1] oder Pickert [10]. Man zeigt ebenso wie in [1]: Je zwei Richtungsuntergruppen sind isomorph.

I. 4. **Die richtungstreuen Endomorphismen.**

Definition: Wir nennen einen Endomorphismus der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ *richtungstreu*, wenn er jede Richtungsuntergruppe von $\mathfrak{T}$ in sich abbildet[27]).

Satz 12: Die Menge A der richtungstreuen Endomorphismen von $\mathfrak{T}$ bildet im vollen Endomorphismenring von $\mathfrak{T}$ einen Unterring mit Eins.

Beweis: Die Eins ist die identische Abbildung von $\mathfrak{T}$. Seien $a \in A$ und $a' \in A$, d. h., für eine Richtungsuntergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{T}: a\,\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$ und $a'\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$. Hieraus folgt $a\,\mathfrak{U} + a'\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$, also $a + a' \in A$, und $aa'\mathfrak{U} \subset a\,\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$, also $aa' \in A$.

Satz 13: Ein richtungstreuer Endomorphismus a ist vollständig festgelegt, wenn man für eine einzige Translation τ mit $\bar{\tau} \neq 0$ das Bild $a\tau$ kennt. Wenn dann auch $\overline{a\tau} \neq 0$, so ist τ ein Automorphismus. In diesem Falle schreiben wir für den zu a inversen Endomorphismus a^{-1}.

Beweis[28])*:* a) Es sei P_0 ein Punkt in $\mathcal{A}_2$. Wir repräsentieren τ und $a\tau$ durch P_0^τ und $P_0^{a\tau}$. Wegen $\bar{\tau} \neq 0$ ist $\bar{P}_0 \neq \overline{P_0^\tau}$, wir setzen $g = P_0 + P_0^\tau$ und es ist $P_0^{a\tau} \in g$. Wir zeigen, daß sich aus diesen Daten für eine beliebige einfache Translation σ der Bildpunkt $P^{a\tau + a\sigma}$ von $P^{a\tau}$ unter $a\sigma$ bestimmt. Wenn wir für die einfachen Translationen σ das Bild $a\sigma$ kennen, dann auch für beliebige Translationen von $\mathfrak{T}$.

Wir beschränken uns auf solche Translationen σ, die eine Spur h durch P_0^τ mit $\bar{h} \neq \bar{g}$ gestatten; die ausgeschlossenen Fälle lassen sich, indem man an Stelle von τ eine Translation mit einer anderen Richtung wählt, hierauf zurückführen.

Es sei also $P_0^\tau, P_0^{\tau+\sigma} \in h$ mit $\bar{g} \neq \bar{h}$. Wegen $\bar{P}_0 \notin \bar{h}$ existiert $j = P_0 + P_0^{\tau+\sigma}$ und es ist $P_0^{a(\tau+\sigma)} = P_0^{a\tau + a\sigma} \in j$. $P_0^{a\tau + a\sigma}$ ist also Bild von $P_0^{a\tau}$ unter $a\sigma$. Wegen $\bar{h} \neq \bar{j}$ ist auch $\overline{h^a} \neq \bar{j}$, wo h^a die Parallele zu h durch $P_0^{a\tau}$ ist. $P_0^{a\tau + a\sigma}$ ist also bestimmt als $h^a \cap j$.

b) Wenn $\overline{a\tau} \neq 0$, so kann man in der vorstehenden Beweisfigur die Rolle von τ, σ und $a\tau, a\sigma$ vertauschen, d. h.: Zu jeder einfachen Translation σ' existiert genau eine einfache Translation σ mit $a\sigma = \sigma'$.

Satz 14: Jeder richtungstreue Endomorphismus a von $\mathfrak{T}$ induziert einen ebensolchen Endomorphismus $\bar{a}$ auf der Translationsgruppe $\bar{\mathfrak{T}}$ von $\bar{\mathcal{A}}_2$, indem man $\bar{a}\bar{\tau}$ durch $\overline{a\tau}$ erklärt, wo τ ein beliebiges Urbild von $\bar{\tau}$ in $\mathfrak{T}$ ist. Die Abbildung $a \to \bar{a}$ von A in den Ring der richtungstreuen Endomorphismen von $\bar{\mathfrak{T}}$ ist ein Homomorphismus, das Bild von A unter diesem Homomorphismus bezeichnen wir mit $\bar{A}$. Der Kern I des Homomorphismus ist ein größtes Ideal in A, oder, was damit gleichbedeutend ist, $A - I$ besteht aus den invertierbaren Elementen von A. $\bar{A}$, isomorph zu A/I, ist also ein Körper.

Beweis: a) Aus $\bar{\tau} = \bar{\tau}'$ folgt $\overline{a\tau} = \overline{a\tau'}$, oder, aus $\bar{\sigma} = 0$ folgt $\overline{a\sigma} = 0$. Das ergibt sich aus der Beweisfigur von Satz 13.

b) $\bar{a}$ ist ein Endomorphismus, denn $\bar{a}(\bar{\sigma} + \bar{\tau}) = \bar{a}(\overline{\sigma + \tau}) = \overline{a(\sigma + \tau)}$ $= \overline{a\sigma + a\tau} = \overline{a\sigma} + \overline{a\tau} = \bar{a}\bar{\sigma} + \bar{a}\bar{\tau}$. $\bar{a}$ ist richtungstreu: Zu einer Richtungsuntergruppe $\bar{\mathfrak{U}}$ von $\bar{\mathfrak{T}}$ gibt es eine Richtungsuntergruppe $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{T}$ als Urbild. Aus $a\,\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$ folgt dann $\overline{a\,\mathfrak{U}} = \bar{a}\,\bar{\mathfrak{U}} \subset \bar{\mathfrak{U}}$.

---

[27]) In [8] nannten wir solche Endomorphismen spurerhaltend.

[28]) Vgl. [8], Satz 11.

c) $a \to \bar{a}$ ist ein Homomorphismus, denn $(\overline{a+b})\,\bar{\tau} = \overline{(a+b)\,\tau} = \overline{a\,\tau + b\,\tau} = \overline{a\,\tau} + \overline{b\,\tau} = (\bar{a} + \bar{b})\,\bar{\tau}$, also $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$, und $(\overline{ab})\,\bar{\tau} = \overline{(ab)\,\tau} = \overline{a(b\,\tau)} = \bar{a}(\overline{b\,\tau}) = \bar{a}(\bar{b}\,\bar{\tau}) = (\bar{a}\bar{b})\,\bar{\tau}$, also $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$.

d) Das Bild $\bar{A}$ von A ist ein Ring, der Kern des Homomorphismus ist ein zweiseitiges Ideal I derart, daß $a \in I$ bedeutet $\bar{a} = 0$, also $\overline{a\,\tau} = 0$ für alle $\tau \in \mathfrak{T}$, während nach Satz 13 $a \in A - I$ bedeutet, daß das Inverse a^{-1} existiert. Hieraus folgt unmittelbar, daß I größtes Linksideal und größtes Rechtsideal in A ist, wozu wir auch sagen: I ist größtes Ideal in A.

Ist umgekehrt in einem Ring A mit Eins I größtes Ideal, so folgt aus $a \in A - I$ für das von a erzeugte Linksideal Aa, da wegen $a \in Aa$ die Inklusion $Aa \subset I$ ausgeschlossen ist, $Aa = A$. Das Element a besitzt also ein Linksinverses. Ebenso ergibt sich die Existenz eines Rechtsinversen für a, d. h., jedes $a \in A - I$ ist invertierbar.

Bemerkung: Wir können die Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ als A-Linksmodul auffassen. Die Richtungsuntergruppen sind dabei zulässige Untermoduln.

Wir fordern jetzt die Gültigkeit von

Axiom (D) (Großer affiner Satz von Desargues): Jede Richtungsuntergruppe $\mathfrak{U}$ des A-Linksmoduls $\mathfrak{T}$ wird von einem beliebigen ihrer Elemente τ mit $\bar{\tau} \neq 0$ erzeugt: $A\,\tau = \mathfrak{U}$.

Bemerkungen: 1. Wenn in einer affinen Ebene m. H. $\mathcal{A}_2$ die Axiome (d) und (D) gelten, so sagen wir auch: $\mathcal{A}_2$ ist *desarguessch*.

2. Da je zwei Richtungsuntergruppen A-isomorph sind, genügt es, Axiom (D) für eine einzige Richtungsuntergruppe zu fordern.

Eine unmittelbare Folgerung aus Axiom (D) ist der

Satz 15: $\mathfrak{U}$ sei eine Richtungsuntergruppe in $\mathfrak{T}$. Nach Wahl eines Elements τ in $\mathfrak{U}$ mit $\bar{\tau} \neq 0$ erklären wir eine Abbildung von $\mathfrak{T}$ in A, indem wir jedem σ aus $\mathfrak{T}$ das Element a aus A mit $a\,\tau = \sigma$ zuordnen. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{T}$ auf die additive Gruppe von A.

Die Eindeutigkeit der Zuordnung $\sigma \to a$ folgt dabei aus Satz 13.

Zusammen mit Satz 11 ergibt sich der

Satz 16: Nach Wahl zweier Translationen τ, τ', deren Bilder $\bar{\tau}, \bar{\tau}'$ in $\bar{\mathfrak{T}}$ linear unabhängig sind, läßt sich der A-Linksmodul $\mathfrak{T}$ durch den A-Linksmodul $A \times A$ darstellen.

I. 5. Koordinaten in der affinen Ebene mit Homomorphismus.

Definition: Unter einem *Bezugssystem* $\mathfrak{B}$ in einer affinen Ebene m. H. verstehen wir drei Punkte P_0, P_1, P_1' in $\mathcal{A}_2$ derart, daß die Bilder $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_1'$ nicht einer Geraden angehören. Es heißen P_0 der *Ursprung*, P_1, P_1' die *Einheitspunkte* und $g = P_0 + P_1$, $g' = P_0 + P_1'$ die *Achsen* von $\mathfrak{B}$.

Satz 17: Sei P_0, P_1, P_1' ein Bezugssystem $\mathfrak{B}$ in $\mathcal{A}_2$. Die Translationen τ und τ' seien durch $P_0^{\tau} = P_1$ und $P_0^{\tau'} = P_1'$ erklärt. $\bar{\tau}$ und $\bar{\tau}'$ sind linear unabhängig. Nach Satz 16 läßt sich $\mathfrak{T}$ damit durch $A \times A$ darstellen. Wenn wir die durch $\varrho \to P_0^{\varrho}$ vermittelte Darstellung von $\mathfrak{T}$ durch die Punkte von $\mathcal{A}_2$ hinzunehmen, liefert $(a, a') \leftrightarrow \varrho = a\,\tau + a'\,\tau' \leftrightarrow P_0^{\varrho}$ eine Darstellung der Punkte von $\mathcal{A}_2$ durch die Elemente (a, a') von $A \times A$. Die Elemente (a, a') nennen wir die *Koordinaten* von $P = P_0^{\varrho}$ im Bezugssystem $\mathfrak{B}$.

Bei der Darstellung von $\mathfrak{T}$ durch die Punkte von $\mathcal{A}_2$ entsprechen den Geraden g durch P_0 die Richtungsuntergruppen $\mathfrak{U} = A\,\varrho$, $\bar{\varrho} \neq 0$, von $\mathfrak{T}$. Seien (a, a') die Koordinaten des Punktes P_0^{ϱ} auf g. Wegen $\bar{\varrho} \neq 0$ ist $\bar{a} \neq 0$ oder $\overline{a'} \neq 0$. Die Koordinaten der Punkte von g bilden die Menge $A\,(a, a')$ (siehe Satz 16).

Ist nun h eine beliebige Gerade in $\mathcal{A}_2$, so ist die Menge der Translationen von $\mathfrak{T}$, die durch Punkte auf h repräsentiert werden, von der Form $\mathfrak{U} + \varrho_0 = A\,\varrho + \varrho_0$, wobei $P_0^{\varrho_0} \in h$ und $\bar{\varrho} \neq 0$. Das heißt: Die Koordinaten der Punkte von h bilden die Menge $A\,(a, a') + (a_0, a_0')$, wo (a, a') und (a_0, a_0') die Koordinaten von P_0^{ϱ} und $P_0^{\varrho_0}$ sind.

Definition: Es sei A ein Ring mit Eins und größtem Ideal I. Den natürlichen Homomorphismus von A auf A/I bezeichnen wir durch einen Querstrich. Unter der *affinen Ebene über* A, $\mathcal{A}_2(A)$, verstehen wir die Menge der als *Punkte* bezeichneten Elemente von $A \times A$, in der die Teilmengen der Form $A\,(a, a') + (a_0, a_0')$ mit $\bar{a} \neq 0$ oder $\overline{a'} \neq 0$ als *Geraden* ausgezeichnet sind[29]).

In Zusammenfassung der bisherigen Überlegungen erhalten wir den

Hauptsatz 1: Es sei $\mathcal{A}_2$ eine affine Ebene mit dem Homomorphismus auf die gewöhnliche affine Ebene $\overline{\mathcal{A}}_2$. Wenn das Axiom (d) gilt, dann ist $\mathcal{A}_2$ homogener Raum unter einer kommutativen Gruppe $\mathfrak{T}$ von Translationen derart, daß nur die 0-Translation einen Punkt von $\mathcal{A}_2$ festläßt. Der Ring A der richtungstreuen Endomorphismen von $\mathfrak{T}$ ist ein Ring mit Eins und größtem Ideal I[8]). Wenn das Axiom (D) gilt, läßt sich $\mathcal{A}_2$, nach Wahl eines Bezugssystems, als affine Ebene $\mathcal{A}_2(A)$ über A darstellen. Die gewöhnliche affine Ebene $\overline{\mathcal{A}}_2$ besitzt als Modell die affine Ebene $\overline{\mathcal{A}}_2(\bar{A})$ über einem zu A/I isomorphen Körper $\bar{A}$. Der Homomorphismus $\mathcal{A}_2 \to \overline{\mathcal{A}}_2$ stellt sich in diesem Modell durch den natürlichen Homomorphismus $\mathcal{A}_2(A) \to \overline{\mathcal{A}}_2(\bar{A})$ dar.

I.6. Koordinaten in der desarguesschen projektiven Ebene m. H.

Definition: Es sei A ein Ring mit Eins und größtem Ideal I; den natürlichen Homomorphismus von A auf A/I und von $A^3 = A \times A \times A$ auf $(A/I)^3 = A/I \times A/I \times A/I$ bezeichnen wir durch einen Querstrich.

Unter der *projektiven Ebene über* A, $\mathcal{P}_2(A)$, verstehen wir die Menge der als *Punkte* bezeichneten Untermoduln $A\,x$, $\bar{x} \neq 0$, von A^3, in der die durch $A\,x + A\,y$ ($\bar{x}$ und $\bar{y}$ linear unabhängig in A/I) beschriebenen Teilmengen von Punkten als *Geraden* ausgezeichnet sind[30]).

Hauptsatz 2: Es sei $\mathcal{P}_2$ eine projektive Ebene mit dem Homomorphismus auf die gewöhnliche projektive Ebene $\overline{\mathcal{P}}_2$. Die zu einer bestimmten Geraden g^* von $\mathcal{P}_2$ gehörende affine Ebene m. H. $\mathcal{A}_2$ sei desarguessch. Dann läßt sich die Beschreibung von $\mathcal{A}_2$ als affine Ebene $\mathcal{A}_2(A)$ über einem Ring A mit Eins und größtem Ideal I fortsetzen[8]) zu einer Beschreibung von $\mathcal{P}_2$ als projektive Ebene $\mathcal{P}_2(A)$ über A, während $\overline{\mathcal{P}}_2$ das Modell $\overline{\mathcal{P}}_2(\bar{A})$ über einem zu A/I isomorphen Körper $\bar{A}$ besitzt. Der Homomorphismus $\mathcal{P}_2 \to \overline{\mathcal{P}}_2$ wird in diesem Modell durch den natürlichen Homomorphismus von $\mathcal{P}_2(A)$ auf $\overline{\mathcal{P}}_2(\bar{A})$ beschrieben.

---

[29]) Vgl. zum Begriff das affinen Raumes über einem Körper auch BOURBAKI [5], App. II.

[30]) Zum Begriff des projektiven Raums über einem Körper vgl. BOURBAKI [5], App. III.

Ist andererseits ein beliebiger Ring A mit Eins und größtem Ideal I gegeben und ist $\bar{A}$ ein zu A/I isomorpher Körper, so bildet $(\mathcal{P}_2(A), \bar{\mathcal{P}}_2(\bar{A}))$ mit dem natürlichen Homomorphismus $\mathcal{P}_2(A) \to \bar{\mathcal{P}}_2(\bar{A})$ ein Paar homomorpher projektiver Ebenen; jede affine Ebene m. H. in $\mathcal{P}_2(A)$ ist desarguessch.

Bemerkung: Wenn in einer projektiven Ebene m. H. $\mathcal{P}_2$ also nur eine einzige affine Ebene m. H. desarguessch ist, so ist jede affine Ebene m. H. in $\mathcal{P}_2$ desarguessch. Wir nennen daher in diesem Fall eine projektive Ebene m. H. einfach: desarguessch.

Ergänzung: Der Koordinatenring A einer desarguesschen projektiven Ebene m. H. ist bis auf Isomorphismen festgelegt: Wenn $\mathcal{P}_2(A')$ ein Modell von $\mathcal{P}_2(A)$ ist, so sind A' und A isomorph.

Beweis: Die Erweiterung der Beschreibung von $\mathcal{A}_2$ als $\mathcal{A}_2(A)$ zu einer Beschreibung von $\mathcal{P}_2$ vollziehen wir folgendermaßen: Den eigentlichen Punkten von $\mathcal{A}_2$, die in $\mathcal{A}_2(A)$ die Koordinaten (a,a') haben, ordnen wir den Modul $A(a,a',1)$ in A^3 zu. Ein uneigentlicher Punkt P^* von $\mathcal{A}_2$ ist entweder als Schnitt der Verbindungsgeraden

$$A(1,a'); \quad A(1,b') + (0,1), \quad \overline{a'-b'} = 0$$

mit P_0 und P_1' bestimmt, oder, wenn diese sich nicht eindeutig schneiden, als Schnitt der Verbindungsgeraden

$$A(a,1); \quad A(b,1) + (1,0), \quad \overline{a-b} = \bar{a} = 0$$

mit P_0 und P_1 bestimmt. Im ersten Fall ordnen wir P^* den Modul

$$A(1,a',a'-b') \quad \text{mit } \overline{a'-b'} = 0$$

zu, im zweiten Fall den Modul

$$A(a,1,a-b) \quad \text{mit } \bar{a} = \overline{a-b} = 0\,.$$

Den Geraden $A(a,a') + (a_0,a_0')$ ($\bar{a} \neq 0$ oder $\bar{a}' \neq 0$) von $\mathcal{A}_2(A)$ ordnen wir die Geraden $A(a_0,a_0',1) + A(a + a_0, a' + a_0', 1)$ von $\mathcal{P}_2(A)$ zu. Die uneigentlichen Geraden sind durch ihre uneigentlichen Schnittpunkte $(1,0,b)$, $(0,1,b')$ ($\bar{b} = 0, \bar{b}' = 0$) mit den Koordinatenachsen bestimmt. Sie beschreiben wir durch $A(1,0,b) + A(0,1,b')$.

Offenbar ist diese Zuordnung umkehrbar eindeutig.

Die Umkehrung und die Ergänzung des Hauptsatzes werden ebenso bewiesen wie in dem bekannten Fall, daß A ein Körper ist; wir übergehen daher die Einzelheiten.

II. Der projektive Raum mit Homomorphismus

II. 1 Definition des projektiven Raums mit Homomorphismus.

Definition: Unter einem *projektiven Raum mit Homomorphismus* $\mathcal{P}_3$ verstehen wir eine Menge $\mathcal{P}_3$ von *Punkten* $P, Q, R, \ldots$, in der zwei Sorten von Teilmengen, die *Geraden* $g, h, j \ldots$ und die *Ebenen* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ausgezeichnet sind. Dazu ist eine Inzidenz-erhaltende Abbildung[31])

$$P \to \bar{P}; \quad g \to \bar{g}; \quad \alpha \to \bar{\alpha}\,,$$

[31]) Inzidenzerhaltend bedeutet, daß aus jeder der Relationen $P \in g$, $P \in \alpha$, $g \in \alpha$ die entsprechende Relation $\bar{P} \in \bar{g}$, $\bar{P} \in \bar{\alpha}$, $\bar{g} \in \bar{\alpha}$ folgt. Faßt man die Abbildung $g \to \bar{g}$ und $\alpha \to \bar{\alpha}$ als Fortsetzung der Punktabbildung $P \to \bar{P}$ auf, so sind diese Implikationen trivial.

Homomorphismus genannt, der Punkte, Geraden und Ebenen von $\mathcal{P}_3$ auf die Punkte $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \ldots$, Geraden $\overline{g}, \overline{h}, \overline{j}, \ldots$ und Ebenen $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \ldots$ eines gewöhnlichen projektiven Raums $\overline{\mathcal{P}}_3$ gegeben und es gelten folgende Axiome:

R 1: Zu zwei Punkten P und Q (drei Punkten P, Q, R) von $\mathcal{P}_3$ gibt es genau eine Gerade g (genau eine Ebene α), die sie enthält, wenn die Bilder $\overline{P}, \overline{Q}$ ($\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$) der Punkte in $\overline{\mathcal{P}}_3$ verschieden sind (nicht einer Geraden angehören).

R 2: Zwei Ebenen α, β (drei Ebenen α, β, γ) in $\mathcal{P}_3$ haben genau eine Gerade g (genau einen Punkt P) gemeinsam, wenn die Bilder $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ ($\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$) der Ebenen in $\overline{\mathcal{P}}_3$ verschieden sind (nicht eine Gerade gemeinsam haben).

R 3: Es seien P und Q Punkte einer Ebene α von $\mathcal{P}_3$ mit $\overline{P} \neq \overline{Q}$. Dann gehört $P + Q$ zu α.

R 4: Es seien α und β Ebenen durch einen Punkt P von $\mathcal{P}_3$ mit $\overline{\alpha} \neq \overline{\beta}$. Dann enthält die Schnittgerade $g = \alpha \cap \beta$ den Punkt P[32]).

Ergänzungen: Die unter den Voraussetzungen von R 1 durch P, Q bestimmte Gerade g und durch P, Q, R bestimmte Ebene bezeichnen wir auch mit $P + Q$ und $P + Q + R$. Für die unter den Voraussetzungen von R 2 durch α, β bestimmte Gerade g und für den durch α, β, γ bestimmten Punkt P schreiben wir auch $\alpha \cap \beta$ und $\alpha \cap \beta \cap \gamma$.

Bemerkungen: 1. Das Axiom R 4 läßt sich aus den übrigen herleiten.

2. Da der Homomorphismus $\mathcal{P}_3 \to \overline{\mathcal{P}}_3$ eine Abbildung auf ist, erfüllt $\mathcal{P}_3$, ähnlich wie $\mathcal{P}_2$ in Teil I, eine Reihe von Reichhaltigkeitsaussagen; z. B. enthält jede Gerade von $\mathcal{P}_3$ wenigstens drei Punkte, die verschiedene Bilder haben, und ähnliches.

3. Zu g und P mit $\overline{P} \notin \overline{g}$ gibt es genau eine Ebene α mit $P \in \alpha$, $g \in \alpha$: Man wähle zwei Punkte Q, R auf g mit $\overline{Q} \neq \overline{R}$. Dann ist $\alpha = P + Q + R$. Wir schreiben für α auch $P + g$ oder $g + P$.

Satz 18: In dem Paar ($\mathcal{P}_3$, $\overline{\mathcal{P}}_3$) von homomorphen projektiven Räumen sei α_0 eine Ebene in $\mathcal{P}_3$ und $\overline{\alpha}_0$ ihr Bild in $\overline{\mathcal{P}}_3$. Dann ist $(\alpha_0, \overline{\alpha}_0)$ mit dem induzierten Homomorphismus ein Paar homomorpher projektiver Ebenen.

Beweis: Axiom E 1 folgt aus R 1 und R 3. Zu zwei Geraden g, h in α_0 gibt es immer Ebenen α, β in $\mathcal{P}_3$ mit $g = \alpha \cap \alpha_0$ und $h = \beta \cap \alpha_0$. E 2 folgt dann aus R 2 und R 4.

II. 2. Der affine Raum mit Homomorphismus.

Definition: Es sei α^* eine Ebene in $\mathcal{P}_3$. Unter dem zu α^* gehörenden *affinen Raum mit Homomorphismus* $\mathcal{A}_3$ verstehen wir die Menge $\mathcal{A}_3$ derjenigen Punkte von $\mathcal{P}_3$, deren Bild nicht zum Bild $\overline{\alpha^*}$ von α^* in $\overline{\mathcal{P}}_3$ gehört. Diejenigen Teilmengen von $\mathcal{A}_3$, die sich als nichtleerer Durchschnitt von Geraden und Ebenen aus $\mathcal{P}_3$ mit $\mathcal{A}_3$ darstellen, nennen wir *Geraden* und *Ebenen* von $\mathcal{A}_3$[33]). Die Einschränkung des Homomorphismus $\mathcal{P}_3 \to \overline{\mathcal{P}}_3$ auf $\mathcal{A}_3$ liefert einen Homomorphismus von $\mathcal{A}_3$ auf den gewöhnlichen affinen Raum $\overline{\mathcal{A}}_3$, der in $\overline{\mathcal{P}}_3$ durch die Ebene $\overline{\alpha^*}$ erklärt ist.

[32]) Vgl. Anmerkung 3.

[33]) Im allgemeinen bezeichnen wir eine Gerade und eine Ebene in $\mathcal{A}_3$ ebenso wie die zugehörige Gerade bzw. Ebene in $\mathcal{P}_3$.

Wiederum nennen wir diejenigen Punkte, Geraden und Ebenen von $\mathcal{P}_3$, denen nicht Punkte, Geraden oder Ebenen in $\mathcal{A}_3$ entsprechen, *uneigentliche* Punkte, Geraden und Ebenen von $\mathcal{A}_3$. Die Punkte und Geraden von α^* sowie α^* selber nennen wir auch *ausgezeichnet uneigentlich*. Mit Hilfe der Ebene α^* ist wiederum der Begriff *parallel* in $\mathcal{A}_3$ erklärt.

Satz 19: $\mathcal{A}_3$ sei der zu einer Ebene α^* in $\mathcal{P}_3$ gehörende affine Raum m. H., α_0 sei eine Ebene in $\mathcal{P}_3$, die α^* eindeutig in einer Geraden g^* schneidet. Nach Satz 18 ist α_0 eine projektive Ebene m. H. Die Einschränkung von α_0 auf $\mathcal{A}_3$ liefert die zu der Geraden g^* von α_0 gehörende affine Ebene m. H. in α_0. Wir bezeichnen diese affine Ebene m. H. ebenfalls mit α_0. Der Homomorphismus $\mathcal{A}_3 \to \bar{\mathcal{A}}_3$ induziert einen Homomorphismus $\alpha_0 \to \bar{\alpha}_0$ von α_0 auf die zu der Geraden $\bar{g}^*$ gehörende gewöhnliche affine Ebene $\bar{\alpha}_0$ in der gewöhnlichen projektiven Ebene $\bar{\alpha}_0$[34]).

Bemerkung: Wir können jetzt für die affine Ebene m. H. α_0 in $\mathcal{A}_3$ von der Gruppe $\mathfrak{T}$ der Translation und dem Ring A der richtungstreuen Endomorphismen von $\mathfrak{T}$ sprechen. Von größtem Interesse ist nun die Tatsache, daß α_0 desarguessch ist:

Satz 20: Die durch eine Ebene α_0 von $\mathcal{A}_3$ definierte affine Ebene mit Homomorphismus ist desarguessch[35]).

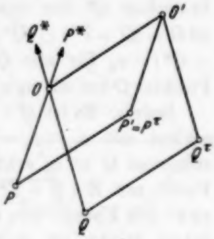


Fig. 1

Beweis: a) (Fig. 1). Wir zeigen, daß es zu je zwei Punkten P, P' von α_0, die eine Verbindungsgerade g in α_0 besitzen, eine Translation τ gibt mit $P^\tau = P'$.

Sei $T^* = g \cap g^*$ der ausgezeichnete uneigentliche Punkt von g. O sei ein Punkt in $\mathcal{A}_3$ mit $\bar{O} \notin \bar{\alpha}_0$. Für jeden Punkt $Q \in \alpha_0$ ist die Gerade $O + Q$ und der ausgezeichnete uneigentliche Punkt Q^* auf $O + Q$ erklärt. α_Q bezeichne die Ebene $Q + O + T^*$; es ist $Q^* \in \alpha_Q$. In der Ebene α_P erklären wir O' durch $(O + T^*) \cap (P' + P^*)$. Es ist $O' \in \alpha_Q$ für alle Q. Wir erklären Q^τ durch $(O' + Q^*) \cap \alpha_0$. Damit ist eine Abbildung $\tau : Q \to Q^\tau$ der Punkte Q von α_0 in sich erklärt, für die $P^\tau = P'$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß τ die Eigenschaften 1, 2 einer Translation hat.

Zu Eigenschaft 1: h sei eine beliebige Gerade in α_0. Die Ebene $\beta = h + O$ habe die ausgezeichnete uneigentliche Gerade $h^* = \beta \cap \alpha^*$. Wenn $R \in h$, so liegt $O' + R^*$ in der Ebene $\beta' = O' + h^*$, also das Bild h^τ von h ist die zu h parallele Gerade $\beta' \cap \alpha_0$.

Zu Eigenschaft 2: Sie ergibt sich unmittelbar aus folgendem Hilfssatz: U^* sei ein ausgezeichneter uneigentlicher Punkt aus g^*. (I) Wenn $O' \in O + U^*$, so folgt $Q^\tau \in Q + U^*$ für alle $Q \in \alpha_0$. (II) Wenn für einen Punkt $Q \in \alpha_0$ gilt: $Q^\tau \in Q + U^*$, so folgt $O' \in O + U^*$.

---

[34]) Wir haben hier mit $\bar{\alpha}_0$ einmal eine (projektive) Ebene in $\bar{\mathcal{P}}_3$ und das andere Mal die zugehörige (affine) Ebene in $\bar{\mathcal{A}}_3$ bezeichnet.

[35]) Der folgende Beweis ist das Kernstück von Teil II. Es wird nicht, wie sonst im allgemeinen bei der Koordinateneinführung im (gewöhnlichen) projektiven Raum, die Gültigkeit der Desargues-Konfiguration gezeigt, sondern direkt für eine Ebene die Existenz einer Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ mit den Eigenschaften von Axiom (d) und (D) nachgewiesen.

Beweis: (I) Es sei $O' \in O + U^*$. Wir betrachten, für jedes $Q \in \alpha_0$, die Ebenen $\beta_Q = Q + O + U^*$. Dann ist auch $O' \in \beta_Q$ und $Q^* \in \beta_Q$, also mit $Q^\tau \in O' + Q^*$ auch $Q^\tau \in \beta_Q$, also $Q^\tau \in \beta_Q \cap \alpha_0 = Q + U^*$. (II) Sei nun andererseits für einen bestimmten Punkt Q von α_0 $Q^\tau \in Q + U^*$. Es folgt $O' \in Q^* + Q^\tau \subset \beta_Q$. α_0' sei die zu α_0 parallele Ebene durch O. Dann ist $\beta_Q \cap \alpha_0' = O + U^*$. Da T^* ausgezeichneter uneigentlicher Punkt von α_0', ist $O + T^* \subset \alpha_0'$, also auch $O' \in \alpha_0'$, also $O' \in \beta_Q \cap \alpha_0' = O + U^*$.

τ ist also eine Translation mit $P^\tau = P'$.

b) Wir zeigen: Es sei τ eine einfache Translation auf α_0 und T^* eine Richtung von τ. O sei ein Punkt in $\mathcal{A}_3$ mit $\overline{O} \notin \overline{\alpha}_0$. Für jeden Punkt $Q \in \alpha_0$ bezeichne Q^* den ausgezeichneten uneigentlichen Punkt von $O + Q$. Dann ist $O' = (O + T^*) \cap (Q^\tau + Q^*)$ ein von Q unabhängiger Punkt, also $Q^\tau = (O' + Q^*) \cap \alpha_0$ für alle $Q \in \alpha_0$. Die Translation τ läßt sich also mit Hilfe des Punktes O auf die in a) angegebene Weise konstruieren.

Beweis: Es ist $Q^\tau \in Q + T^*$ für alle $Q \in \alpha_0$. Für jedes Q ist $\alpha_Q = Q + O + T^*$ erklärt mit $\alpha_Q \cap \alpha_0 = Q + T^*$. Dabei ist $Q^* \in \alpha_Q$ und $Q^\tau \in \alpha_Q$. Für ein bestimmtes Q in α_0 erklären wir O' durch $(O + T^*) \cap (Q^\tau + Q^*)$. Es sei R ein Punkt mit $\overline{R} \notin \overline{Q + T^*}$. Dann existieren $h = Q + R$ und $h^\tau = Q^\tau + R^\tau$, h parallel zu h^τ. Die Ebenen $\gamma = O + Q + R$ und $\gamma' = O' + Q^\tau + R^\tau$ haben den uneigentlichen Punkt Q^* gemeinsam, also auch $R^* \in \gamma'$. Aus $O + T^* = \alpha_Q \cap \alpha_R$, $Q^\tau + Q^* = \alpha_Q \cap \gamma'$, $R^\tau + R^* = \alpha_R \cap \gamma'$ folgt $O' = (O + T^*) \cap (Q^\tau + Q^*) = \alpha_Q \cap \alpha_R \cap \gamma' = (O + T^*) \cap (R^\tau + R^*)$. Wenn jetzt S ein Punkt ist mit $\overline{S} \in \overline{Q + T^*}$, so ist $\overline{S} \notin \overline{R + T^*}$, woraus wie eben $O' = (O + T^*) \cap (S^\tau + S^*)$ folgt.

c) Wir zeigen, daß die von den einfachen Translationen erzeugte Gruppe $\mathfrak{T}$ aus Translationen besteht.

Ein Element τ von $\mathfrak{T}$ ist von der Form $\tau = \tau_1 + \cdots + \tau_n$, wo $\tau_1, \ldots, \tau_n$ einfache Translationen sind. O sei ein Punkt in $\mathcal{A}_3$ mit $\overline{O} \notin \overline{\alpha}_0$. Der in b) formulierte Satz gilt nun auch für ein τ aus $\mathfrak{T}$: $T_1^*, \ldots T_n^*$ bezeichne Richtungen von $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Nach b) ist der Punkt $O_1 = (O + T_1^*) \cap (Q^{\tau_1} + Q^*)$ ein von Q unabhängiger Punkt in der zu α_0 parallelen Ebene α_0' durch O. Es ist also $\overline{O}_1 \notin \overline{\alpha}_0$. Der ausgezeichnete uneigentliche Punkt von $Q^{\tau_1} + O_1$ ist wieder Q^*. Also ist auch $O_2 = (O_1 + T_2^*) \cap (Q^{\tau_1 + \tau_2} + Q^*)$ ein von Q unabhängiger Punkt. Durch Induktion folgt, daß auch $O' = (O_{n-1} + T_n^*) \cap (Q^\tau + Q^*)$ ein von Q unabhängiger Punkt in der zu α_0 parallelen Ebene α_0' durch O ist. Es ist also $Q^\tau = (O' + Q^*) \cap \alpha_0$ für alle $Q \in \alpha_0$.

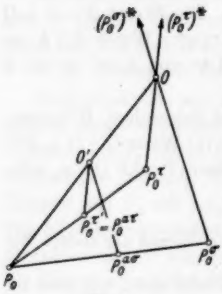


Fig. 2

Die Eigenschaft 1 einer Translation ist für ein τ aus $\mathfrak{T}$ offenbar erfüllt. Es gilt aber auch Eigenschaft 2. Denn wenn es P und g in α_0 gibt mit $P \in g$, $P^\tau \in g$, so lehrt der gerade bewiesene Satz, daß τ sich mit Hilfe eines Punktes O, $\overline{O} \notin \overline{\alpha}_0$, auf die in a) angegebene Weise konstruieren läßt. Für diese Abbildungen τ hatten wir aber in a) gezeigt, daß es Translationen sind.

Hiermit ist gezeigt, daß für α_0 das Axiom (d) gilt.

d) (Fig. 2). Wir zeigen die Gültigkeit von Axiom (D). Dazu wählen wir in α_0 einen Punkt P_0. Nach Satz 5 können wir die Translationen σ von $\mathfrak{T}$

durch die Punkte P_0^σ repräsentieren. O sei ein Punkt in $\mathcal{A}_3$ mit $\overline{O} \notin \overline{\alpha}_0$. Für jedes $P \in \alpha_0$ bezeichnen wir mit P^* den ausgezeichneten uneigentlichen Punkt auf der Geraden $P + O$. Für jede Richtung U^* auf g^* ist die Ebene $\alpha_{U^*} = U^* + O + P_0$ erklärt. Dabei ist $\alpha_{U^*} \cap \alpha_0 = P_0 + U^*$.

Sei τ eine Translation mit $\overline{P_0^\tau} \neq \overline{P_0}$. T^* sei die Richtung von τ. τ' sei eine Translation derselben Richtung: $P_0^{\tau'} \in P_0 + T^*$. Wir erklären den Punkt O' in α_{T^*} durch $(O + P_0) \cap (P_0^{\tau'} + (P_0^\tau)^*)$. Für einen beliebigen Punkt P_0^σ erklären wir $P_0^{a\sigma}$ durch $(O' + (P_0^\sigma)^*) \cap \alpha_0$. Damit ist eine Abbildung $a : \sigma \to a\,\sigma$ von $\mathfrak{T}$ in sich erklärt, für die $a\,\tau = \tau'$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß a ein richtungstreuer Endomorphismus von $\mathfrak{T}$ ist. Den Nachweis führen wir in vier Schritten.

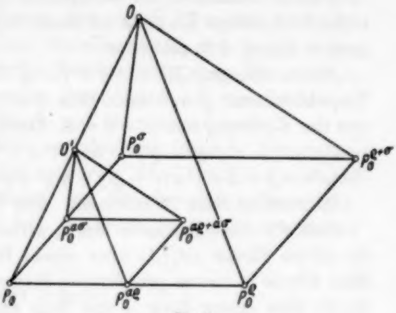


Fig. 3

d 1) a ist richtungstreu. Sei nämlich U^* eine Richtung und $P_0^\sigma \in P_0 + U^*$. Dann ist $(P_0^\sigma)^* \in \alpha_{U^*}$ und $P_0^{a\sigma} \in (P_0^\sigma)^* + O' \subset \alpha_{U^*}$, also $P_0^{a\sigma} \in \alpha_{U^*} \cap \alpha_0 = P_0 + U^*$.

d 2) (Fig. 3). Für zwei einfache Translationen ϱ und σ, die Richtungen R^* und S^* mit $\overline{R^*} \neq \overline{S^*}$ besitzen, gilt $a(\varrho + \sigma) = a\,\varrho + a\,\sigma$.

Beweis: Es gilt $P_0^\varrho, P_0^{a\varrho} \in P_0 + R^*$; $P_0^\sigma, P_0^{a\sigma} \in P_0 + S^*$ und $(P_0^\sigma + R^*) \cap (P_0^\varrho + S^*) = P_0^{\varrho+\sigma}$. Wir setzen $\beta = P_0^\sigma + (P_0^\sigma)^* + R^*$; $\gamma = P_0^\varrho + (P_0^\varrho)^* + S^*$ und $\beta' = P_0^{a\sigma} + (P_0^\sigma)^* + R^*$; $\gamma' = P_0^{a\varrho} + (P_0^\varrho)^* + S^*$. Dann ist $O \in \beta \cap \gamma$, $P^{\varrho+\sigma} \in \beta \cap \gamma$, $O' \in \beta' \cap \gamma'$. Nun ist einmal $\beta' \cap \gamma' \cap \alpha_0 = (\beta' \cap \alpha_0) \cap (\gamma' \cap \alpha_0) = (P_0^{a\sigma} + R^*) \cap (P_0^{a\varrho} + S^*) = P_0^{a\varrho + a\sigma}$; zum anderen ist $\beta' \cap \gamma' \cap \alpha_0 = ((P_0^{\tau+\sigma})^* + O') \cap \alpha_0 = P_0^{a(\varrho+\sigma)}$, also $P_0^{a\varrho+a\sigma} = P_0^{a(\varrho+\sigma)}$.

Hieraus folgt für ein ϱ' mit $\overline{\varrho'} \neq 0$: $a(-\varrho') = -a\,\varrho'$. Wir wählen nämlich eine Translation σ' so, daß $\overline{\sigma'} \neq 0$ und $\overline{\varrho'}, \overline{\sigma'}$ verschiedene Richtungen haben. Dann ist auch $\sigma' - \varrho'$ eine einfache Translation mit einer Richtung „quer" zu der von ϱ'. Aus dem Bewiesenen folgt: $a\,\sigma' = a(\sigma' - \varrho' + \varrho') = a(\sigma' - \varrho') + a\,\varrho' = a\,\sigma' + a(-\varrho') + a\,\varrho'$, also $a(-\varrho') = -a\,\varrho'$.

d 3) Es seien ϱ, σ einfache Translationen mit $\varrho + \sigma$ einfach und mit Richtungen R^*, S^* derart, daß $\overline{R^*} = \overline{S^*}$. Wir wählen eine Translation ϱ' mit $\overline{\varrho'} \neq 0$, deren Richtung „quer" zu den Richtungen von ϱ, σ und $\varrho + \sigma$ verläuft. ϱ' und $\sigma + \varrho'$ sind, da ihre Bilder in $\overline{\mathfrak{T}}$ nicht verschwinden, einfache Translationen; mit den in d 2) hergeleiteten Regeln erhalten wir daher $a(\varrho + \sigma + \varrho') = a(\varrho + \sigma) + a\varrho' = a\,\varrho + a(\sigma + \varrho') = a\,\varrho + a\,\sigma + a\,\varrho'$.

Als Spezialfall ergibt sich für $\sigma = -\varrho$: $a(-\varrho) = -a\,\varrho$ für beliebige einfache Translationen ϱ.

Wir betrachten den noch offenen Fall, daß ϱ, σ einfache Translationen sind mit Richtungen R^*, S^* derart, daß $\overline{R^*} = \overline{S^*}$, und $\varrho + \sigma$ nicht einfach.

Nach Satz 6 gibt es einfache Translationen ϱ', σ' mit Richtungen R'^*, S'^* so, daß $\varrho + \sigma = \varrho' + \sigma'$ und $\overline{R'^*}, \overline{S'^*}, \overline{R^*}$ voneinander verschieden sind. Dann folgt mit $\varrho - \varrho' = \sigma' - \sigma$: $a\varrho - a\varrho' = a\sigma' - a\sigma$, also $a\varrho + a\sigma = a\varrho' + a\sigma' = a(\varrho' + \sigma') = a(\varrho + \sigma)$.

d 4) Schließlich beweisen wir für drei einfache Translationen ϱ, σ, τ die Gleichung $a(\varrho + \sigma + \tau) = a\,\varrho + a\,\sigma + a\,\tau$. Da sich jede Translation als Summe zweier einfacher Translationen schreiben läßt (Satz 6), folgt durch Induktion für irgend zwei Translationen ϱ', σ' aus $\mathfrak{T}$ die Gleichung $a(\varrho' + \sigma') = a\,\varrho' + a\,\sigma'$; a ist dann also ein Endomorphismus von $\mathfrak{T}$.

Beweis: Zunächst sei wenigstens eines der Elemente $\overline{\varrho + \sigma}$, $\overline{\sigma + \tau}$, $\overline{\varrho + \tau}$ nicht Null; dieses Element ist dann eine einfache Translation und wir können nach d 2) und d 3) schließen.

Wenn dagegen $\overline{\varrho + \sigma} = \overline{\sigma + \tau} = \overline{\varrho + \tau} = 0$, so folgt $\bar\varrho = \bar\sigma = \bar\tau$. ϱ' sei eine Translation mit $\overline{\varrho'} \neq 0$ und, falls $\bar\varrho \neq 0$, sei die Richtung von $\overline{\varrho'}$ verschieden von der Richtung von $\bar\varrho = \bar\sigma = \bar\tau$. Dann folgt mit d 2) und d 3): $a(\varrho + \sigma + \tau) = a(\varrho + \sigma + \tau + \varrho' - \varrho') = a(\varrho + \sigma + \tau + \varrho') - a\,\varrho' = a\varrho + a(\sigma + \tau + \varrho') - a\,\varrho' = a\varrho + a\,\sigma + a(\tau + \varrho') - a\,\varrho' = a\,\varrho + a\,\sigma + a\,\tau$.

Hiermit ist Satz 20 bewiesen. Aus Teil I folgt der

Satz 21: Eine Ebene in einem affinen Raum m. H. $\mathcal{A}_3$ besitzt als Modell die affine Ebene $\mathcal{A}_2(A)$ über einem Ring A mit Eins und größtem Ideal I. Eine Ebene in einem projektiven Raum m. H. läßt sich als projektive Ebene $\mathcal{P}_2(A)$ über einem Ring A mit Eins und größtem Ideal I darstellen[8]). Da je zwei Ebenen in $\mathcal{A}_3$ bzw. $\mathcal{P}_3$ durch eine Perspektivität isomorph aufeinander bezogen werden können, sind die Koordinatenringe je zweier Ebenen isomorph.

II.3. Koordinaten im affinen Raum mit Homomorphismus.

Definition: Es sei A ein Ring mit Eins und größtem Ideal I. Den natürlichen Homomorphismus von A auf A/I und von $A^3 = A \times A \times A$ auf $(A/I)^3 = A/I \times A/I \times A/I$ bezeichnen wir durch einen Querstrich. Unter dem *affinen Raum über A*, $\mathcal{A}_3(A)$, verstehen wir die Menge der als *Punkte* bezeichneten Elemente von A^3, in der die Teilmengen der Form

$$A\,x + x_0 \quad (x, x_0 \in A^3 \text{ und } \bar x \neq 0)$$

als *Geraden* und die Teilmengen der Form

$$A\,x + A\,y + y_0 \quad (x, y, y_0 \in A^3;\ \bar x, \bar y \text{ linear unabhängig})$$

als *Ebenen* ausgezeichnet sind[29]).

Definition: Wir führen im affinen Raum m. H. $\mathcal{A}_3$ ein *Bezugssystem* $\mathfrak{B}$ ein, bestehend aus einem Punkt P_0, dem *Ursprung*, und drei Punkten P_1, P_1', P_1'', den *Einheitspunkten*, derart, daß die Bilder der Punkte ein Bezugssystem in $\bar{\mathcal{A}}_3$ bestimmen. Durch $g = P_0 + P_1$, $g' = P_0 + P_1'$, $g'' = P_0 + P_1''$ sind die *Koordinatenachsen* und durch $\alpha = P_0 + P_1 + P_1'$, $\alpha' = P_0 + P_1' + P_1''$, $\alpha'' = P_0 + P_1'' + P_1$ die *Koordinatenebenen* definiert.

Hauptsatz 3: Es sei $\mathcal{A}_3$ ein affiner Raum mit dem Homomorphismus auf den gewöhnlichen affinen Raum $\bar{\mathcal{A}}_3$. Nach Wahl eines Bezugssystems läßt sich $\mathcal{A}_3$ als affiner Raum $\mathcal{A}_3(A)$ über einem Ring A mit Eins und größtem Ideal I darstellen[8]), während $\bar{\mathcal{A}}_3$ das Modell $\bar{\mathcal{A}}_3(\bar A)$ über einem zu A/I

isomorphen Körper $\bar{A}$ besitzt, so daß der Homomorphismus $\mathcal{A}_3 \to \bar{\mathcal{A}}_3$ durch den Homomorphismus $\mathcal{A}_3(A) \to \bar{\mathcal{A}}_3(\bar{A})$ beschrieben wird.

Beweis: Ein Bezugssystem $\mathfrak{B}$ in $\mathcal{A}_3$ induziert in den Koordinatenebenen $\alpha, \alpha', \alpha''$ ein Bezugssystem, bezüglich dessen wir $\alpha, \alpha', \alpha''$ nach Satz 21 als affine Ebene $\mathcal{A}_2(A)$ über einem Ring A mit Eins und größtem Ideal I beschreiben können. Jedem Punkt P in $\mathcal{A}_3$ sind durch „Projektion" umkehrbar eindeutig drei Punkte Q, Q', Q'' in den Koordinatenebenen $\alpha, \alpha', \alpha''$ zugeordnet mit den Koordinaten (a, a'), (a', a''), (a'', a). Wir fassen sie zu dem Tripel (a, a', a'') zusammen; die Punkte von $\mathcal{A}_3$ sind also eineindeutig auf die Elemente von A^3 bezogen. Ebenso erkennt man durch „Projektion" in die Koordinatenebenen, daß die Punkte einer Geraden in $\mathcal{A}_3$ sich in der angegebenen Weise beschreiben lassen. Bei der Beschreibung einer Ebene in $\mathcal{A}_3$ verwendet man zwei in ihr gelegene Geraden, deren Bild in $\bar{\mathcal{A}}_3$ verschieden ist.

II. 4. Koordinaten im projektiven Raum mit Homomorphismus.

Definition: Es sei A ein Ring mit Eins und größtem Ideal I. Den natürlichen Homomorphismus von A auf A/I und von $A^4 = A \times A \times A \times A$ auf $(A/I)^4 = A/I \times A/I \times A/I \times A/I$ bezeichnen wir durch einen Querstrich. Unter dem *projektiven Raum über* A, $\mathcal{P}_3(A)$, verstehen wir die Menge der als *Punkte* bezeichneten Untermoduln

$$A x \quad (x \in A^4 \text{ und } \bar{x} \neq 0),$$

in der die durch

$$A x + A y \quad (x, y \in A^4 \text{ und } \bar{x}, \bar{y} \text{ linear unabhängig})$$

und

$$A x + A y + A z \quad (x, y, z \in A^4 \text{ und } \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \text{ linear unabhängig})$$

beschriebenen Teilmengen von Punkten als *Geraden* bzw. *Ebenen* ausgezeichnet sind[30]).

Hauptsatz 4: Es sei $\mathcal{P}_3$ ein projektiver Raum mit dem Homomorphismus auf den gewöhnlichen projektiven Raum $\bar{\mathcal{P}}_3$. Dann läßt sich $\mathcal{P}_3$ als projektiver Raum $\mathcal{P}_3(A)$ über einem Ring A mit Eins und größtem Ideal I darstellen[8]), während $\bar{\mathcal{P}}_3$ als Modell den projektiven Raum $\mathcal{P}_3(\bar{A})$ über einem zu A/I isomorphen Körper $\bar{A}$ besitzt, so daß der Homomorphismus $\mathcal{P}_3 \to \bar{\mathcal{P}}_3$ durch den natürlichen Homomorphismus $\mathcal{P}_3(A) \to \bar{\mathcal{P}}_3(\bar{A})$ beschrieben wird.

Ist umgekehrt A ein beliebiger Ring mit Eins und größtem Ideal I und ist $\bar{A}$ ein zu A/I isomorpher Körper, so ist $\mathcal{P}_3(A)$ ein projektiver Raum mit dem durch $A \to \bar{A}$ induzierten Homomorphismus auf den gewöhnlichen projektiven Raum $\bar{\mathcal{P}}_3(\bar{A})$.

Beweis: Wir begnügen uns mit den folgenden Hinweisen: Nach Hauptsatz 3 läßt sich ein beliebiger affiner Raum m. H. $\mathcal{A}_3$ in $\mathcal{P}_3$ als $\mathcal{A}_3(A)$ über einem Ring A mit Eins und größtem Ideal I beschreiben. Man muß zeigen, daß sich diese Beschreibung fortsetzen läßt zu einer Beschreibung von $\mathcal{P}_3$ als $\mathcal{P}_3(A)$ (vgl. dazu den Beweis von Hauptsatz 2). Bei dem Beweis der Umkehrung nehme man sich wieder den bekannten Spezialfall, daß A ein Körper ist, zum Vorbild.

III. Ergänzungen

Satz 22: Das Axiom R 1 für den projektiven Raum m. H. $\mathcal{P}_3$ sei dahingehend verschärft, daß es zu je zwei Punkten (zu je drei Punkten) in $\mathcal{P}_3$ stets eine Gerade (eine Ebene) gibt, die sie enthält. Dies ist äquivalent damit, daß im Koordinatenring A von $\mathcal{P}_3$ je zwei Elemente rechtsvergleichbar[9]) sind.

Beweis: Wenn je zwei Punkte in einer Geraden enthalten sind, so auch je drei Punkte in einer Ebene[36]); es genügt also, die auf zwei Punkte bezügliche Bedingung zu betrachten.

Es seien a, b Elemente aus A. Daß es eine Gerade gibt, die die durch $A(1, 0, 0, 0)$ und $A(1, a, b, 0)$ repräsentierten Punkte enthält, bedeutet, daß es ein Quadrupel $(c, d, e, f) \in A^4$ (nicht $\bar{d} = \bar{e} = \bar{f} = 0$) und $s, t \in A$ so gibt, daß gilt

$$s(c, d, e, f) + t(1, 0, 0, 0) = (1, a, b, 0)\,.$$

Falls $a = 0$ und $b = 0$, kann die Gleichung mit $s = 0$, $t = 1$ erfüllt werden. Wenn aber $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, so folgt $s \neq 0$ und $sf = 0$, also $\bar{f} = 0$. Dann ist aber etwa $\bar{d} \neq 0$ und aus $sd = a$, $se = b$ folgt $ad^{-1}e = b$, d. h., b ist Rechtsvielfaches von a.

Seien andererseits in dem Ring A mit Eins und größtem Ideal I je zwei Elemente rechtsvergleichbar. In $\mathcal{P}_3(A)$ betrachten wir die Punkte $A\,x$ und $A\,y$. Wenn $\bar{x}$ und $\bar{y}$ linear unabhängig sind in $(A/I)^4$, so ist $A\,x + A\,y$ eine Verbindungsgerade. Wenn dagegen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ linear abhängig sind, so denken wir uns x und y so normiert, daß eine der Komponenten, etwa die erste, gleich 1 wird: $x_1 = y_1 = 1$. Unter den Elementen $y_j - x_j$ $(2 \leqq j \leqq 4)$ gibt es eines, etwa $y_2 - x_2$, so, daß die anderen Rechtsvielfache davon sind: $y_j - x_j = (y_2 - x_2)\,c_j$ $(2 \leqq j \leqq 4;\ c_2 = 1)$. Wir setzen $z = (0, 1, c_3, c_4)$. Dann ist $A\,x + A\,z$ eine Gerade, die $A\,x$ und $A\,y$ enthält.

Satz 23: Das Axiom R 2 eines projektiven Raums m. H. $\mathcal{P}_3$ sei dahingehend verschärft, daß je zwei Ebenen (je drei Ebenen) in $\mathcal{P}_3$ eine Gerade (einen Punkt) gemeinsam haben. Dies ist äquivalent damit, daß im Koordinatenring A von $\mathcal{P}_3$ je zwei Elemente linksvergleichbar[9]) sind.

Beweis: Wiederum genügt es, die auf zwei Ebenen bezügliche Bedingung zu betrachten. Man benutzt nun die Tatsache, daß die Ebenen und Geraden in $\mathcal{P}_3(A)$ sich auch durch uA und $uA + vA$ darstellen lassen, wo u und v Linearformen sind mit $\bar{u} \neq 0$ bzw. $\bar{u}$ und $\bar{v}$ linear unabhängig[37]). Dann ergibt sich die Behauptung ebenso wie im vorhergehenden Beweis.

Satz 24: Der Koordinatenring A eines projektiven Raumes m. H. $\mathcal{P}_3$ ist dann und nur dann nullteilerfrei, wenn es zu jedem Paar verschiedener Punkte in $\mathcal{P}_3$ höchstens eine Verbindungsgerade gibt.

[36]) P, Q, R seien Punkte des $\mathcal{P}_3$, g eine Gerade mit $P \in g$, $Q \in g$. Falls $\bar{R} \notin \bar{g}$, so ist $g + R$ eine Ebene durch P, Q, R. Falls $R \in g$, enthält eine beliebige Ebene durch g die Punkte P, Q, R. Falls endlich $\bar{R} \in \bar{g}$ und $R \notin g$, so betrachten wir eine Ebene α mit $\bar{g} \notin \bar{\alpha}$ und $R \in \alpha$. Es existiert dann eindeutig der Punkt $S = g \cap \alpha$ und es existiert h mit $R \in h$, $S \in h$. Dann ist, wegen $R \neq S$, $\bar{h} \in \bar{\alpha}$, also $\bar{h} \neq \bar{g}$. Es gibt also einen Punkt T auf h mit $\bar{T} \notin \bar{g}$, so daß die Ebene $g + T$ existiert und die Punkte P, Q, R enthält.

[37]) Wir erinnern daran, daß die Menge der Linearformen $u, v, \ldots$ auf dem A-Linksmodul A^4 einen A-Rechtsmodul, isomorph zum A-Rechtsmodul A^4 bildet, vgl. BOURBAKI [5], § 4.

Beweis: Es sei P, Q ein Paar verschiedener Punkte, das in zwei verschiedenen Geraden g, h enthalten ist. Wir wählen in $\mathcal{P}_3$ einen affinen Raum $\mathcal{A}_3$ so, daß $\mathcal{A}_3$ die Punkte P, Q enthält. In $\mathcal{A}_3$ wählen wir ein Bezugssystem so, daß P der Ursprung P_0 und g die Koordinatenachse $P_0 + P_1$ wird. Q hat also die Koordinaten $(b, 0, 0)$ mit $b \neq 0$. h werde in diesem Koordinatensystem durch $A(a, a', a'')$ beschrieben, nicht $a' = a'' = 0$. $Q \in h$ besagt, daß es $c \in A$ gibt mit $ca = b \neq 0$, $ca' = 0$, $ca'' = 0$; da $c \neq 0$ und nicht $a' = a'' = 0$, ist c Nullteiler. Aus $\overline{a'} = \overline{a''} = 0$ folgt $\bar{a} \neq 0$, also $b(a^{-1}a') = b(a^{-1}a'') = 0$; b wird rechtsseitig annulliert.

Ist umgekehrt ein Paar b, b' mit $b \neq 0$, $b' \neq 0$, $bb' = 0$ gegeben, so haben in $\mathcal{A}_3(A)$ die verschiedenen Punkte $(0, 0, 0)$ und $(b, 0, 0)$ die verschiedenen Verbindungsgeraden $A(1, 0, 0)$ und $A(1, b', 0)$.

Ein projektiver Raum m. H. $\mathcal{P}_3$ läßt sich nun offenbar genau dann auch als gewöhnlicher projektiver Raum interpretieren, wenn die in Satz 22 und 23 formulierten Verschärfungen der Axiome R 1 und R 2 gelten und wenn zwei verschiedene Punkte immer nur eine Verbindungsgerade besitzen (es folgt, daß dann zwei verschiedene Ebenen immer nur eine Gerade gemeinsam haben). Mit Satz 24 erhalten wir somit den

Hauptsatz 5: Die Punkte, Geraden und Ebenen eines projektiven Raumes m. H. $\mathcal{P}_3$ lassen sich dann und nur dann auch als Punkte, Geraden und Ebenen eines gewöhnlichen projektiven Raumes interpretieren, wenn der Koordinatenring A von $\mathcal{P}_3$ nullteilerfrei ist und je zwei Elemente von A rechtsvergleichbar und linksvergleichbar sind.

Ergänzung: Unter diesen Voraussetzungen läßt sich A zu einem Rechtsquotientenkörper K, der gleichzeitig Linksquotientenkörper ist, erweitern[10]. $\mathcal{P}_3(K)$ ist das Modell von $\mathcal{P}_3$, als gewöhnlicher projektiver Raum betrachtet.

Wir betrachten folgende Verschärfungen von Axiom R 1 bzw. R 2:

R 1*: Zu je zwei Punkten (zu je drei Punkten) in $\mathcal{P}_3$ gibt es eine Gerade (eine Ebene), die sie enthält. Diese Gerade (diese Ebene) ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn die Bilder der beiden Punkte (der drei Punkte) in $\overline{\mathcal{P}}_3$ verschieden sind (nicht einer Geraden angehören).

R 2*: Je zwei Ebenen (je drei Ebenen) in $\mathcal{P}_3$ haben eine Gerade (einen Punkt) gemeinsam. Diese Gerade (dieser Punkt) ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn die Bilder der beiden Ebenen (der drei Ebenen) in $\overline{\mathcal{P}}_3$ verschieden sind (nicht eine Gerade gemeinsam haben).

Satz 25: In einem projektiven Raum m. H. $\mathcal{P}_3$ gilt R 1* dann und nur dann, wenn im Koordinatenring A von $\mathcal{P}_3$ mit Eins und größtem Ideal I je zwei Elemente rechtsvergleichbar sind und jedes Element aus I von einem Element $\neq 0$ rechtsseitig annulliert wird.

Ebenso ist die Gültigkeit von R 2* durch die entsprechenden linksseitigen Eigenschaften des Koordinatenrings gekennzeichnet.

Bemerkung: In Übereinstimmung mit einer früher für Ebenen eingeführten Bezeichnung (siehe [7, 8]), nennen wir einen projektiven Raum m. H., für den die Axiome R 1* und R 2* gelten, auch *Projektiven Raum mit Nachbarelementen.* Nach Satz 25 ist der Koordinatenring A eines projektiven Raums

mit Nachbarelementen dadurch gekennzeichnet, daß je zwei Elemente von A rechts- und linksvergleichbar sind und daß das größte Ideal I, falls $\neq (0)$, aus zweiseitigen Nullteilern besteht.

Beweis: Wir beschränken uns auf die Diskussion der Bedingung R 1*. Ein Teil der Behauptung folgt aus Satz 22. Der Rest folgt aus dem Beweis von Satz 24: Wir können jedes Punktepaar P, Q mit $\bar{P} = \bar{Q}$ bei geeigneter Wahl des Bezugssystems durch affine Koordinaten $(0, 0, 0)$ und $(b, 0, 0)$ mit $\bar{b} = 0$ darstellen.

Literatur

[1] André, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. 60, 156—186 (1954). — [2] Artin, E.: Coordinates in affine geometry. Rep. Math. Coll. Notre Dame 2, 15—20 (1940). — [3] Baer, R.: Linear algebra and projective geometry. New York 1952. — [4] Bourbaki, N.: Algèbre Chap. I, 2e éd. Paris 1951. — [5] Bourbaki, N.: Algèbre Chap. II, 2e éd. Paris 1955. — [5a] Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological Algebra. Princeton 1956. — [6] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig 1930. — [7] Klingenberg, W.: Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z. 60, 384—406 (1954). — [8] Klingenberg, W.: Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 20, 97—111 (1955). — [9] Krull, W.: Idealtheorie. Berlin 1935. — [10] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955.

(Eingegangen am 5. Juni 1956)

Leichtweiss, K.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 201—245 (1956)

Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie

III. Natürliche Gleichungen

Von
Kurt Leichtweiss in Freiburg i. Br.

Ein besonders interessantes Anfangswertproblem in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie ist das Problem, irgendeine m-dimensionale Mannigfaltigkeit V_m im n-dimensionalen Raum durch „natürliche Gleichungen", d. h. Beziehungen zwischen geometrischen Invarianten der V_m und speziellen Parametern, eindeutig zu charakterisieren, wie dies bekanntlich für eine Kurve durch Angabe ihrer Krümmungen als Funktionen der Bogenlänge möglich ist. Als Hauptergebnis dieser Arbeit läßt sich feststellen, daß in der Tat für jede analytische Untermannigfaltigkeit des n-dimensionalen euklidischen Raums derartige natürliche Gleichungen gebildet werden können.

Im einzelnen werden wir u. a. zeigen: Jede Hyperfläche eines Raums mit Riemannscher Metrik kann durch Vorgabe einer linear gebrochenen Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen ihrer Hauptkrümmungen in Abhängigkeit von geodätischen Parallelkoordinaten und durch einen Anfangsstreifen charakterisiert werden (Satz 10). Dasselbe gilt in bezug auf ein Hyperflächenpaar in der relativen Differentialgeometrie für zwei gewisse geometrische Invarianten dieses Paars als Funktionen sog. relativgeodätischer Parallelkoordinaten (Satz 11). Durch Spezialisierung lassen sich daraus entsprechende Resultate für die Blaschkesche und für die Salkowskische affine Differentialgeometrie gewinnen (Satz 12 und 13). Weiter wird unter Benutzung der von C. Burstin und W. Mayer aufgestellten Krümmungstheorie auf algebraische Weise ein unabhängiges und vollständiges Invariantensystem einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit V_m im n-dimensionalen euklidischen Raum definiert, aus dem natürliche Gleichungen der V_m gebildet werden können (Satz 15, 16 und 17). Dieses reduziert sich bei Kurven auf gewisse Produkte der Krümmungen und bei Hyperflächen auf die Casorati-Krümmung. Das Verschwinden aller (nichttrivialen) Invarianten dieses Systems charakterisiert die linearen (ebenen) Mannigfaltigkeiten (Korollar zu Satz 18).

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Beweismethode, die Bezeichnungsweise und die verwandten Hilfssätze aus dem in den Math. Annalen **130**, 442 erschienenen ersten Teil dieser Arbeit stammen.

§ 7. Natürliche Gleichungen von Hyperflächen

Wir kommen nun auf ein wichtiges Teilproblem des Problems von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie zu sprechen, nämlich auf das

Problem der Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit durch „natürliche Gleichungen". *Dabei wollen wir im folgenden unter natürlichen Gleichungen einer in einer Mannigfaltigkeit V_n eingebetteten Mannigfaltigkeit V_m in Analogie zur Theorie der Kurven im n-dimensionalen Riemannschen Raum derartige Beziehungen zwischen auf der V_m definierten Invarianten $\underset{\lambda}{I}$ und speziellen Parametern p^a der V_m verstehen, daß die V_m dadurch und durch ein $(m-1)$-dimensionales Anfangselement eindeutig charakterisiert wird.* Auf diese Weise definierten schon F. RELLICH [11] und S. GRÜNBAUM [8] natürliche Gleichungen einer Fläche im 3-dimensionalen euklidischen Raum, weitere natürliche Gleichungen einer Fläche wurden vom Verf. [9] untersucht. Die Invarianten von natürlichen Gleichungen einer Mannigfaltigkeit bilden also ein unabhängiges und (in einer gewissen Weise) vollständiges System, und eine triviale Abzählung ergibt, daß es für eine V_m in V_n genau $n-m$ an der Zahl sein müssen, daß also λ etwa von $m+1$ bis n läuft.

Die Aufgabe dieses Paragraphen sei es nun, natürliche Gleichungen für eine Hyperfläche V_m in V_{m+1} für verschiedene differentialgeometrische Gruppen herzustellen. Wir betrachten zunächst den Fall, daß V_{m+1} eine Mannigfaltigkeit R_{m+1} mit einer (positiv definiten) Riemannschen Metrik ist. Dann wird auf der V_m in natürlicher Weise eine Riemannsche Metrik induziert, und als spezielle Parameter p^a bieten sich die auf eine $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der V_m bezogenen geodätischen Parallelkoordinaten an, die schon GRÜNBAUM auf Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum benutzt hatte. Zur Bildung von natürlichen Gleichungen der Hyperfläche V_m könnte man als Invariante etwa eine der durch

$$(7.1)\quad \prod_{a=1}^{m}\left(y-\frac{1}{R_a}\right)=(y)^m-D_1(y)^{m-1}\pm\cdots+(-1)^m D_m\equiv\frac{1}{g}\,||y g_{ab}-A_{ab}||\ ^{1})^{2})$$

$(g=||g_{ab}||$, g_{ab} und $A_{ab}=\underset{m+1}{A_{ab}}$ sind die erste und zweite Grundform der $V_m)$ definierten elementarsymmetrischen Funktionen D_a der Hauptkrümmungen $\frac{1}{R_a}$ der V_m in bezug auf den R_{m+1} heranziehen; wir beweisen aber gleich allgemeiner in Analogie zu Satz 1 von [9]:

Satz 10.

Vor.: Sei Γ ein durch $x^i(p^{\bar a})$ und $\underset{m+1}{n^i}(p^{\bar a})=n^i(p^{\bar a})$ mit $x^i(0)=0$, Rang $\left(\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar a}}\right)=m-1$, $g^{ij}\frac{\partial x^i}{\partial p^{\bar a}}n^j=0$ gegebener, im Nullpunkt analytischer Streifen des R_{m+1} $(1\leqq\bar a\leqq m-1)$, und sei $\varphi(p^a)$ eine beliebige, im Nullpunkt analytische Funktion.

Beh.: Dann existiert im allgemeinen genau eine (im Nullpunkt) analytische Hyperfläche $x^i(p^a)$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: Sie geht für $p^m=0$ durch Γ, die p^a sind in bezug auf Γ geodätische Parallelkoordinaten, und die

1) Siehe [7], S. 149.

2) Mit $(y)^a$ sind hier die Potenzen von y bezeichnet.

linear gebrochene Funktion

$$\frac{a_1 D_1(p^a) + \ldots + a_m D_m(p^a) + a}{b_1 D_1(p^a) + \ldots + b_m D_m(p^a) + b} \quad (a_1, \ldots, a_m, a, b_1, \ldots, b_m, b = \text{const.})$$

der elementarsymmetrischen Funktionen ihrer Hauptkrümmungen ist gleich der vorgegebenen Funktion $\varphi(p^a)$.

Beweis: Der Beweis von Satz 10 verläuft genau nach dem Muster des Beweises von Satz 7, nur daß jetzt die Größe $A_{mm} = \underset{m+1}{A_{mm}}$ statt durch (5.10) mittels des durch Auflösung der Bedingungsgleichung

$$\text{(7.2)} \qquad \frac{a_1 D_1 + \ldots + a_m D_m + a}{b_1 D_1 + \ldots + b_m D_m + b} = \varphi$$

gewonnenen Ausdrucks $A_{mm} = \Phi(g_{ab}, A_{a\bar{b}}, \varphi)$ (Φ = rational in den angegebenen Argumenten, $1 \leq \bar{b} < m$) eliminiert wird. Die Gleichung (7.2) läßt eine solche Auflösung im allgemeinen zu, da sie auf Grund von (7.1) in A_{mm} linear ist. Nur wenn hierbei der Koeffizient von A_{mm} infolge der Anfangsbedingungen im Nullpunkt Null wird, entsteht ein Ausnahmefall. w.z.b.w.

Korollar: Durch einen beliebigen, analytischen $(m-1)$-dimensionalen Hyperflächenstreifen des R_{m+1} geht im allgemeinen genau eine Hyperfläche, bei welcher eine vorgegebene linear gebrochene Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen ihrer Hauptkrümmungen überall einen vorgegebenen konstanten Wert annimmt (vgl. Korollar zu Satz 7!).

Bemerkung: Daß bei Satz 10 wirklich Ausnahmefälle auftreten können, beweist die Tatsache, daß durch einen ebenen, geradlinigen Streifen des dreidimensionalen euklidischen Raums unendlich viele Torsen gehen, für welche $K \equiv D_2 = 0$ gilt. Im Falle der natürlichen Gleichung $D_1 = \varphi$ gibt es jedoch sicher keine Ausnahmefälle.

Wir wollen jetzt diese Ergebnisse auf Hyperflächen in der Relativgeometrie verallgemeinern. Die Relativgeometrie wurde von E. MÜLLER und W. SÜSS begründet [10, 12] und handelt von der Geometrie einer (orientierten), 4-mal stetig differenzierbaren Hyperfläche $\mathfrak{x}(u^a)$ und einer auf sie durch gleiche Parameterwerte bezogenen, 4-mal stetig differenzierbaren Eichhyperfläche $\mathfrak{e}(u^a)$ des $(m+1)$-dimensionalen affinen Raums A_{m+1}, wobei die Tangentialhyperebenen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ in entsprechenden Punkten parallel sind und überall

$$\text{(7.3)} \qquad F = \left\| \mathfrak{e}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\| > 0$$

gilt. Außerdem soll $\mathfrak{x}$ keine Torse sein; oder analytisch formuliert soll überall

$$\text{(7.4)} \qquad \Lambda = \|\Lambda_{ab}\| \neq 0$$

sein, wenn $\Lambda_{ab} = \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^a \partial u^b}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\|$ ist[3]). Dem Hyperflächenpaar ist

[3]) Dies folgt aus der Tatsache, daß Λ bis auf einen positiven, nichtverschwindenden Faktor gleich dem Verhältnis der Oberflächenelemente bei der sphärischen Abbildung der V_m in den A_{m+1} (mit euklidischer Metrik) ist.

als quadratischer Grundtensor der symmetrische Tensor

$$(7.5)\qquad G_{ab} = \frac{A_{ab}}{F} = \frac{\left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^a \partial u^b}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\|}{\left\| \mathfrak{e}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\|}$$

zugeordnet, wobei allerdings (im Gegensatz zum Maßtensor der Hyperflächen im Riemannschen Raum) G_{ab} nur für gleichsinnige Parametertransformationen, d. h. für Transformationen $\bar{u}^a = \bar{u}^a(u^b)$ mit $\left\| \frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^b} \right\| > 0$ Tensorcharakter besitzt, da wegen Bedingung (7.3) nur derartige Parametertransformationen zugelassen sind. Wegen (7.3) und (7.4) ist $G = \|G_{ab}\| \neq 0$, so daß durch $ds^2 = G_{ab} du^a du^b$ auf dem Paar $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$ eine nichtausgeartete Riemannsche Metrik mit den Christoffelsymbolen erster bzw. zweiter Art $\Gamma_{ab,c}$ bzw. Γ^c_{ab} und dem „Krümmungstensor" R_{abcd} definiert ist, die im Falle einer hyperbolisch gekrümmten Hyperfläche $\mathfrak{x}$ sicher nicht positiv definit ist. Diese Metrik ist gegenüber allen (nichtausgearteten) Affinitäten des A_{m+1}, die den Ursprung von $\mathfrak{e}$ festlassen, invariant. Außerdem wird für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$ der kubische Grundtensor

$$(7.6)\qquad A_{abc} = \frac{\left\| \mathfrak{x}_{a,b,c}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\|}{F}$$

definiert, wobei $\mathfrak{x}_{a,b,c}$ die dreifache kovariante Ableitung von $\mathfrak{x}$ in bezug auf den Tensor G_{ab} bedeutet. A_{abc} ist bekanntlich vollsymmetrisch. Endlich spielt noch der quadratische Tensor

$$(7.7)\qquad B_{ab} = \frac{\left\| \mathfrak{e}_{a,b}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\|}{F}$$

($\mathfrak{e}_{a,b}$ = zweifache kovariante Ableitung von $\mathfrak{e}$!) in der relativen Differentialgeometrie eine wichtige Rolle; er ist wiederum symmetrisch und ist wie auch A_{abc} gegenüber unseren Affinitäten invariant.

Als Invarianten eventueller natürlicher Gleichungen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$ kommen die als positive bzw. negative Koeffizienten des Polynoms $\frac{1}{G}\|y\, G_{ab} - B_{ab}\|$ auftretenden elementarsymmetrischen Funktionen $S_1, S_2, \ldots, S_m$ der sog. Relativhauptkrümmungen von $\mathfrak{x}$ in Betracht[4]); dies gilt ebenso für die Picksche Invariante

$$(7.8)\qquad J = \frac{1}{m(m-1)} A_{abc} A^{abc} = \frac{1}{m(m-1)} G^{ad} G^{be} G^{cf} A_{abc} A_{def}\ ^{5)}.$$

Aber auch die Größe $\frac{F}{|G|^{\frac{1}{2}}} > 0$[6]) [vgl. (7.3)!] ist gegen gleichsinnige Parametertransformationen und inhaltstreue, den Ursprung von $\mathfrak{e}$ festlassende Affini-

---

[4]) Vgl. die Definition (7.1) der entsprechenden Größen $D_1, D_2, \ldots, D_m$ in der gewöhnlichen Differentialgeometrie.

[5]) Siehe [1], S. 168.

[6]) Mit gebrochenem Exponenten bezeichnen wir in Zukunft stets die positiv reelle Wurzel der zugehörigen reinen Gleichung.

täten invariant, so daß wir als weitere Invariante etwa

$$\tau = \log \frac{F}{|G|^{\frac{1}{2}}} \tag{7.9}$$

wählen können.

Gilt nun für ein Hyperflächenpaar $\mathfrak{x}, \mathfrak{e}$: $\tau = 0$, so folgt nach (7.5):

$$F = |F| = |G|^{\frac{1}{2}} = \frac{|A|^{\frac{1}{2}}}{|F|^{\frac{m}{2}}}, \text{ oder } F = |F| = |A|^{\frac{1}{m+2}}, \text{ d. h. } G_{ab} = \frac{A_{ab}}{|A|^{\frac{1}{m+2}}}. \tag{7.10}$$

Weiter ist nach (7.5) und (7.6):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^a \partial u^b} = (\Gamma^c_{ab} + G^{cd} A_{abd})\, \mathfrak{x}_c + G_{ab}\, \mathfrak{e}$$[7]),

wonach wegen (7.9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u^b} = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial u^b} - \frac{1}{|G|^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial u^b} \left(|G|^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\sum_{a=1}^{m} \Gamma^a_{ab} + G^{ad} A_{abd}\right) - \\ - \sum_{a=1}^{m} \Gamma^a_{ab} = G^{ad} A_{adb} = 0 \end{aligned} \tag{7.11}$$

und damit

$$\mathfrak{e} = \frac{1}{m} G^{ab} (G_{ab}\, \mathfrak{e}) = \frac{1}{m} G^{ab}\, \mathfrak{x}_{a,b} \tag{7.12}$$

folgt. Aus (7.10) und (7.12) ergibt sich also, daß $\mathfrak{e}$ im Falle $\tau = 0$ gleich dem durch (7.10) und (7.12) allein mit Hilfe von $\mathfrak{x}(u^a)$ gebildeten Affinnormalvektor $\mathfrak{y}$ der Blaschkeschen raumtreuen, affinen Differentialgeometrie ist[8]). Umgekehrt rechnet man im Falle $\mathfrak{e} = \mathfrak{y}$ sofort $\tau = 0$ nach. Die Gleichung $\tau = 0$ kennzeichnet daher die Blaschkesche affine Differentialgeometrie in der Relativgeometrie.

τ läßt jetzt folgende relativgeometrische Deutung zu: Man definiert als sog. „Relativabstand" r_e des Ursprungs von der Hyperfläche $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{e}$ den euklidischen Abstand des Ursprungs von $\mathfrak{x}$ von einer Tangentialhyperebene an $\mathfrak{x}$, dividiert durch den euklidischen Abstand des Ursprungs von $\mathfrak{e}$ von der entsprechenden Tangentialhyperebene an $\mathfrak{e}$, oder in einer Formel ausgedrückt:

$$r_e = \frac{\left\| \mathfrak{x}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\|}{\left\| \mathfrak{e}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\|}.$$

Im Falle $\mathfrak{e} = \mathfrak{y}$ nennt man r_e den Affinabstand des Ursprungs von $\mathfrak{x}$, welchen wir mit r_a bezeichnen wollen. Nun wird nach (7.3), (7.10) und (7.12)

$$\frac{r_a}{r_e} = \frac{\left\| \mathfrak{e}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\|}{\left\| \mathfrak{y}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\|} = \frac{F}{|A|^{\frac{1}{2+m}}};$$

---

[7]), [8]) Siehe [1], S. 168.

und damit ergibt sich wegen (7.5), d. h. $|G| = \frac{|A|}{F^m}$:

$$e^\tau = \frac{F}{|G|^{\frac{1}{2}}} = \frac{F^{\frac{2+m}{2}}}{|A|^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{F}{|A|^{\frac{1}{2+m}}}\right)^{\frac{2+m}{2}} = \left(\frac{r_a}{r_e}\right)^{\frac{2+m}{2}}.$$

oder:

$$\frac{r_a}{r_e} = e^{\frac{2}{2+m}\tau}. \tag{7.13}$$

Neben der Blaschkeschen affinen Differentialgeometrie einer Hyperfläche $\mathfrak{x}$ spielt noch die Salkowskische affine Differentialgeometrie von $\mathfrak{x}$ eine Rolle. Sie ist gleich der Relativgeometrie von $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{e}$, wenn $\mathfrak{e} = \mathfrak{x}$ gesetzt wird[9]). Hier gilt $B_{ab} = G_{ab}$, woraus z. B. $S_1 = m$ folgt. (Diese Beziehung kennzeichnet allerdings nicht den Fall $\mathfrak{e} = \mathfrak{x}$ im Gegensatz zur Beziehung $r_e = 1$!) Außerdem wird aus (7.13):

$$r_a = e^{\frac{2}{2+m}\tau}.$$

Wir betrachten nun eine $(m-1)$-dimensionale, analytische Untermannigfaltigkeit V_{m-1} von (dem jetzt analytisch seienden) $\mathfrak{x}$, welche durch den Parameternullpunkt von $\mathfrak{x}$ gehen möge, und setzen voraus, daß der in $\mathfrak{x}$ liegende, relativgeometrische Normalvektor der V_{m-1} in bezug auf die vorhin eingeführte Metrik von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$ im Nullpunkt nicht die Länge Null habe[10]). Dann kann man auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$ solche speziellen Parameter p^a einführen, daß die V_{m-1} durch $p^m = 0$ dargestellt wird und $G_{am}(p^b) = \varepsilon\,\delta_a^m$ ($\varepsilon = \pm 1$) ist[11]). Diese Parameter sind durch die eben angeführten Bedingungen bereits eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie in Analogie zur Riemannschen Geometrie als relativgeodätische Parallelkoordinaten von $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{e}$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir als Verallgemeinerung von Satz 10 in der relativen Differentialgeometrie den folgenden Satz beweisen:

Satz 11.

Vor.: Durch die im Nullpunkt analytischen Vektoren $\mathfrak{x}(p^{\bar a})$ *und* $\mathfrak{e}(p^{\bar a})$ *mit* Rang $\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar b}}(p^{\bar a}), \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial p^{\bar c}}(p^{\bar a})\right) = m$ $(1 \leqq \bar a, \bar b, \bar c \leqq m-1)$ *sei ein „Hyperflächenpaarstreifen"* Γ *im* $(m+1)$*-dimensionalen, affinen Raum* A_{m+1} *gegeben. Außerdem sei* $\varphi(p^a)$ *eine beliebige, im Nullpunkt analytische und positive Funktion, während* $\psi(p^a)$ *beliebig und ebenfalls im Nullpunkt analytisch sei.*

Beh.: Dann existiert im allgemeinen (in einer Umgebung des Nullpunkts) genau ein Hyperflächenpaar $\mathfrak{x}(p^a)$, $\mathfrak{e}(p^a)$, *welches die folgenden Eigenschaften besitzt:* $\mathfrak{x}(p^a)$ *und* $\mathfrak{e}(p^a)$ *sind im Nullpunkt analytisch; das Paar geht für* $p^m = 0$ *durch* Γ*; die* p^a *sind auf* Γ *bezogene, relativgeodätische Parallelkoordinaten mit*

$$G_{am}(p^c) = \varepsilon\,\delta_a^m \quad (\varepsilon = \text{ein bestimmter der Werte } +1 \text{ und } -1)\,^{11a}); \tag{7.14}$$

[9]) Dazu muß noch $\left\| \mathfrak{x}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^m} \right\| > 0$ vorausgesetzt werden.

[10]) Da die Metrik im allgemeinen nicht positiv definit ist, kann sehr wohl ein vom Nullvektor verschiedener, reeller Vektor die Länge Null haben.

[11]) Siehe [6], S. 57.

[11a]) ε kann hierbei unabhängig von Γ, φ und ψ beide möglichen Werte annehmen.

und es bestehen die folgenden (natürlichen) Gleichungen:

$$\frac{r_a(p^c)}{r_e(p^c)} = \varphi(p^c) \tag{7.15}$$

und

$$\frac{a_1 S_1(p^c) + \ldots + a_m S_m(p^c) + a}{b_1 S_1(p^c) + \ldots + b_m S_m(p^c) + b} = \psi(p^c) \tag{7.16}$$

$$(a, a_1, \ldots, a_m, b, b_1, \ldots, b_m = \text{const.}).$$

Beweis: Ein Hyperflächenpaar $\mathfrak{x}(p^a)$, $\mathfrak{e}(p^a)$ besitzt in der relativen Differentialgeometrie die Ableitungsgleichungen[12]):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \underset{i}{\psi}}{\partial p^b} - \underset{i}{G}_b\left(p^e, \underset{\alpha}{\psi}\right) \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^b} - \mathfrak{x}_b &&= 0\\
&\frac{\partial \underset{i,a}{\psi}}{\partial p^b} - \underset{i,a}{G}{}_b\left(p^e, \underset{\alpha}{\psi}\right) \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}_a}{\partial p^b} - \left(\Gamma^{\,c}_{ab}(p^e) + G^{cd}(p^e) A_{dab}(p^e)\right)\mathfrak{x}_c - G_{ab}(p^e)\,\mathfrak{e} &&= 0\\
&\frac{\partial \underset{i,m+1}{\psi}}{\partial p^b} - \underset{i,m+1}{G}{}_b\left(p^e, \underset{\alpha}{\psi}\right) \equiv \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial p^b} - G^{cd}(p^e)\, B_{db}(p^e)\, \mathfrak{x}_c &&= 0
\end{aligned} \tag{7.17}$$

mit

$$G_{ab} = G_{ba}, \quad A_{abc} = A_{bac} = A_{acb}, \quad B_{ab} = B_{ba},$$

deren Integrabilitätsbedingungen in der Bezeichnungsweise von Hilfssatz 2 a) die Form

$$\begin{aligned}
&\underset{i}{\mathfrak{J}}_{bc}(p^f) \equiv 0\\
&\underset{i,a}{\mathfrak{J}}{}_{bc}(p^f) \equiv \left(\mathfrak{T}_{eabc}(p^f) + \mathfrak{U}_{eabc}(p^f)\right) G^{de}(p^f)\, \mathfrak{x}_d(p^f) = 0\\
&\underset{i,m+1}{\mathfrak{J}}{}_{bc}(p^f) \equiv \mathfrak{B}_{ebc}(p^f)\, G^{de}(p^f)\, \mathfrak{x}_d(p^f) = 0
\end{aligned} \tag{7.18}$$

annehmen. Hierbei ist:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{eabc} &\equiv - R_{eabc} + G^{gh}\left(A_{abg} A_{ech} - A_{acg} A_{ebh}\right) +\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(G_{ab} B_{ce} - G_{ac} B_{be} + G_{ec} B_{ba} - G_{eb} B_{ca}\right)\\
\mathfrak{U}_{eabc} &\equiv A_{eab,c} - A_{eac,b} + \frac{1}{2}\left(G_{ab} B_{ce} - G_{ac} B_{be} + G_{eb} B_{ca} - G_{ec} B_{ba}\right)\\
\mathfrak{B}_{ebc} &\equiv B_{eb,c} - B_{ec,b} + G^{ad}\left(A_{aec} B_{bd} - A_{aeb} B_{cd}\right)
\end{aligned} \tag{7.19}$$

[13]).

Um nun die Existenz eines unseren Bedingungen genügenden Hyperflächenpaares nachzuweisen, bestimmen wir zunächst die Anfangswerte für $p^m = 0$ der gesuchten Funktionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_a$, $\mathfrak{e}$, G_{ab}, A_{abc} und B_{ab} aus dem vorgegebenen Streifen Γ. Nach der Voraussetzung von Satz 11 kennen wir schon die Funktionen $\mathfrak{x}(p^{\bar a})$ und $\mathfrak{e}(p^{\bar a})$, welche der Bedingung

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar b}}, \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial p^{\bar c}}\right) = m \qquad (1 \leq \bar b, \bar c \leq m-1;\ m > 1) \tag{7.20}$$

---

[12]) Siehe [1], S. 168 für den Fall der Blaschkeschen affinen Differentialgeometrie.

[13]) Der Index nach dem Komma bedeutet hier die kovariante Ableitung in bezug auf G_{ab} nach dem betreffenden Parameter.

genügen. Deshalb gibt es einen (analytischen) Vektor $\mathfrak{m}(p^{\bar{a}})$, welcher durch die Beziehungen

(7.21) $$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{b}}}\,\mathfrak{m} = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial p^{\bar{c}}}\,\mathfrak{m} = 0,\ \mathfrak{m}^2 = 1$$

bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt ist. Jetzt gilt im allgemeinen für Γ:

(7.22) $$\left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{b}}\,\partial p^{\bar{c}}}(0)\,\mathfrak{m}(0) \right\| \neq 0$$

und

(7.23) $$\text{Rang}\left(\mathfrak{e}(0), \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{b}}}(0), \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial p^{\bar{c}}}(0)\right) = m + 1\ (\bar{b}, \bar{c} = 1, 2, \ldots, m-1).$$

[Die Bedingungen (7.20), (7.22) und (7.23) sind nämlich erfüllbar, wie man einsieht, wenn man für $\mathfrak{e}$ den euklidischen Normalvektor von $\mathfrak{x}$ nimmt und im Falle $m = 2$ einen Flächenstreifen betrachtet, dessen Normalkrümmung und geodätische Windung beide von Null verschieden sind, sowie im Falle $m > 2$ den unabhängig hiervon später bewiesenen Satz 16 anwendet.] Wir wollen im folgenden (7.22) und (7.23) zusätzlich voraussetzen. Dann folgt aus (7.21) und (7.23): $\mathfrak{e}(0)\,\mathfrak{m}(0) \neq 0$; wir können also $\mathfrak{m}$ durch die Forderung

(7.24) $$\mathfrak{e}(0)\,\mathfrak{m}(0) > 0$$

eindeutig festlegen.

Jetzt läßt sich $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m}(p^{\bar{a}})$ folgendermaßen bestimmen: Es muß wegen $G_{\bar{b}m}(p^{\bar{a}}) = 0$:

(7.25) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{b}}\,\partial p^m}\,\mathfrak{m} = -\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m}\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial p^{\bar{b}}} = 0 \ \text{ und } \ \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m}\,\mathfrak{m} = 0$$
$$(1 \leq \bar{b} \leq m-1)$$

werden. Wir machen deshalb den Ansatz $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m} = \alpha\,\mathfrak{a}$ mit

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} \times \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial p^1} \times \cdots \times \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial p^{m-1}}\ ^{14)}.$$

Nun wird

$$\left\| \mathfrak{e}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{m-1}}, \mathfrak{a} \right\| = \left(\mathfrak{e} \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1} \times \cdots \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{m-1}}\right)\left(\mathfrak{m} \times \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial p^1} \times \cdots \times \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial p^{m-1}}\right)$$
$$= (-1)^{m-1}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{m} \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{b}}\,\partial p^{\bar{c}}}\,\mathfrak{m} \right\|$$

nach (7.22) und (7.24) im Nullpunkt von Null verschieden. Auf dieselbe Weise ergibt sich:

$$\left\| \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{b}}\,\partial p^{\bar{c}}}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{m-1}}, \mathfrak{a} \right\| \right\| \neq 0.$$

Jetzt bestimmt sich α durch Einsetzen von $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m} = \alpha\,\mathfrak{a}$ in (7.15) für $p^m = 0$

[14]) Hiermit bezeichnen wir das verallgemeinerte äußere (Graßmannsche) Produkt der angegebenen Vektoren.

unter Berücksichtigung von (7.9), (7.13) und von $G_{am}(p^{\bar{a}}) = \varepsilon\,\delta_a^m$ zu

$$\alpha = (\varphi)^{\frac{2+m}{2}} \left| \left\| \, \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{b}}\,\partial p^{\bar{c}}}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{m-1}}, \mathfrak{a} \right\| \, \right\| \right|^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left| \left\| \mathfrak{e}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{m-1}}, \mathfrak{a} \right\| \right|^{\frac{1-m}{2}} \left(\left\| \mathfrak{e}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{m-1}}, \mathfrak{a} \right\| \right)^{-1}.$$

Damit wird $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m}(p^{\bar{a}})$ eine eindeutig durch Γ und φ bestimmte, (im Nullpunkt) analytische Funktion der $p^{\bar{a}}$.

Wir müssen schließlich noch unsere drei Tensoren für $p^m = 0$ berechnen. Dazu betrachten wir die Ableitungsgleichungen $\underset{a}{\mathfrak{A}}_{\bar{b}}\,(p^{\bar{a}}, 0) = 0$ [siehe (7.17)!]. Aus ihnen ergibt sich zunächst

(7.26) $$G_{\bar{a}\bar{b}} = G_{\bar{b}\bar{a}}$$

mit

(7.27) $$\|G_{\bar{a}\bar{b}}(0)\| \neq 0,$$

(7.28) $$G^{\bar{c}d}(\Gamma_{\bar{a}\bar{b},d} + A_{d\bar{a}\bar{b}}),$$

(7.29) $$G^{\bar{c}d}(\Gamma_{m\bar{b},d} + A_{dm\bar{b}}), \qquad (1 \leqq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \leqq m-1)$$

(7.30) $$G^{md}(\Gamma_{\bar{a}\bar{b},d} + A_{d\bar{a}\bar{b}}),$$

(7.31) $$G^{md}(\Gamma_{m\bar{b},d} + A_{dm\bar{b}})$$

und

(7.32) $$G^{\bar{c}d}B_{d\bar{b}},\ G^{md}B_{d\bar{b}} \text{ für } p^m = 0.$$

Daraus läßt sich wegen der Bedingung $G_{am} = \varepsilon\,\delta_a^m$ und wegen (7.26), (7.28) $A_{\bar{d}\bar{a}\bar{b}} = A_{\bar{b}\bar{a}\bar{d}} = A_{\bar{d}\bar{b}\bar{a}}$ für $p^m = 0$ bestimmen. Ebenso gewinnt man aus (7.29) und (7.30) wegen $\Gamma_{m\bar{b},\bar{a}} = -\Gamma_{\bar{a}\bar{b},m} = \frac{1}{2}\frac{\partial G_{\bar{a}\bar{b}}}{\partial p^m}$:

$$\frac{\partial G_{\bar{a}\bar{b}}}{\partial p^m} = \frac{\partial G_{\bar{b}\bar{a}}}{\partial p^m} \text{ und } A_{\bar{a}m\bar{b}} = A_{m\bar{a}\bar{b}} = A_{m\bar{b}\bar{a}}$$

für $p^m = 0$, während endlich aus (7.31), (7.32) sich $A_{mm\bar{b}}$, $B_{\bar{a}\bar{b}} = B_{\bar{b}\bar{a}}$ und $B_{m\bar{b}}$ für $p^m = 0$ ergeben. Alle so bestimmten Tensoren sind im Nullpunkt analytisch.

Um nun unsere Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_a$, $\mathfrak{e}$ und unsere Tensoren für alle p^a zu gewinnen, lösen wir zuerst (7.15) bzw. (7.16) nach A_{mmm} bzw. B_{mm} auf und erhalten wegen (7.11) und (7.13) zusammen mit (7.14):

$$G^{ad}A_{adm} = \frac{\partial \tau}{\partial p^m} = \frac{2+m}{2\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial p^m}, \text{ d. h.}$$

(7.33) $$A_{mmm} = \frac{1}{\varphi\,\|G_{\bar{a}\bar{b}}\|}\,\Phi_1\left(G_{\bar{a}\bar{b}}, A_{\bar{c}\bar{d}m}, \frac{\partial \varphi}{\partial p^m}\right)$$

und

(7.34) $$B_{mm} = \frac{\Phi_2(G_{\bar{a}\bar{b}}, B_{a\bar{c}}, \varphi)}{\Phi_3(G_{\bar{a}\bar{b}}, B_{a\bar{c}}, \varphi)}$$

(Φ_1, Φ_2, Φ_3 = ganz rational in den angegebenen Argumenten; $1 \leqq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \leqq m-1$).

(7.33) und (7.34) sowie (7.14) ergibt, in $\mathfrak{T}_{m\bar{a}\bar{b}m} = 0$ $(\bar{a} \geqq \bar{b})$, $\mathfrak{U}_{ab\bar{b}m} = 0$ $(a \geqq b \geqq \bar{b})$, $\mathfrak{B}_{a\bar{b}m} = 0$ $(a \geqq \bar{b})$ und $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_m = 0$ eingesetzt, das Gleichungssystem:

$$
(7.35)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G_{\bar{a}\bar{b}}}{(\partial p^m)^2} &= \frac{1}{\|G_{\bar{c}\bar{d}}\|\,\varphi\,\Phi_3}\,\Psi_1\left(G_{\bar{c}\bar{d}}, \frac{\partial G_{\bar{c}\bar{d}}}{\partial p^c}, A_{ef\bar{g}}\, B_{g\bar{h}}, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial p^m}, \psi\right)\\
\frac{\partial A_{ab\bar{b}}}{\partial p^m} &= \frac{1}{(\|G_{\bar{c}\bar{d}}\|\,\varphi)^2\,\Phi_3}\,\Psi_2\left(G_{\bar{c}\bar{d}}, \frac{\partial G_{\bar{c}\bar{d}}}{\partial p^c}, A_{ef\bar{g}}, \frac{\partial A_{ef\bar{g}}}{\partial p^{\bar{b}}}, B_{g\bar{h}}, \varphi,\right.\\
&\qquad\qquad\left.\frac{\partial \varphi}{\partial p^{\bar{h}}}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^m\,\partial p^{\bar{b}}}, \psi\right)\\
\frac{\partial B_{a\bar{b}}}{\partial p^m} &= \frac{1}{\|G_{\bar{c}\bar{d}}\|\,\varphi\,(\Phi_3)^2}\,\Psi_3\left(G_{\bar{c}\bar{d}}, \frac{\partial G_{\bar{c}\bar{d}}}{\partial p^c}, A_{ef\bar{g}}, B_{g\bar{h}}, \frac{\partial B_{g\bar{h}}}{\partial p^{\bar{b}}}, \varphi,\right.\\
&\qquad\qquad\left.\frac{\partial \varphi}{\partial p^m}, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial p^{\bar{b}}}\right)\\
\frac{\partial x^i}{\partial p^m} &= \Psi_4\,(x^i_d)\\
\frac{\partial x^i_a}{\partial p^m} &= \frac{1}{\|G_{\bar{c}\bar{d}}\|\,\varphi}\,\Psi_5\left(G_{\bar{c}\bar{d}}, \frac{\partial G_{\bar{c}\bar{d}}}{\partial p^c}, A_{ef\bar{g}}, x^i_d, e^i, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial p^m}\right)\\
\frac{\partial e^i}{\partial p^m} &= \frac{1}{\|G_{\bar{c}\bar{d}}\|\,\Phi_3}\,\Psi_6\,(G_{\bar{c}\bar{d}}, B_{g\bar{h}}, x^i_d, \psi)^{15)}
\end{aligned}
$$

($\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6$ = ganz rational; $1 \leqq i \leqq n$; $1 \leqq a, b, c, d, e, f, g, h \leqq m$; $1 \leqq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{g}, \bar{h} \leqq m-1$; $\bar{a} \geqq \bar{b}$, $a \geqq b \geqq \bar{b}$).

Dieses hat (durch die Symmetrie der Tensoren reduziert) wegen (7.27) und $\varphi(0) > 0$ nach (I)[16]) sicher dann eine im Nullpunkt analytische Lösung, welche für $p^m = 0$ die schon bestimmten (analytischen) Anfangswerte annimmt, wenn

$$(7.36)\qquad \Phi_3(G_{\bar{a}\bar{b}}(0),\ B_{a\bar{c}}(0),\ \psi(0)) \neq 0$$

gilt. Diese Beziehung ist im allgemeinen und im Falle der speziellen natürlichen Gleichung $S_1 \equiv \psi$ immer richtig; wir wollen sie in Zukunft als erfüllt voraussetzen. Daraufhin können wir aus der Lösung von (7.35) mittels (7.14), (7.33), (7.34) und der Symmetriebedingungen unserer Tensoren die (im Nullpunkt) analytischen Funktionen $\mathring{G}_{ab}$, $\mathring{A}_{abc}$, $\mathring{B}_{ab}$, $\mathring{\mathfrak{x}}$, $\mathring{\mathfrak{x}}_a$, $\mathring{\mathfrak{e}}$ gewinnen, welche folgenden Gleichungen genügen:

$$(7.37)\qquad \|\mathring{\mathfrak{x}}_1(0), \ldots, \mathring{\mathfrak{x}}_m(0), \mathring{\mathfrak{e}}(0)\| > 0,$$

$$(7.38)\qquad \log \frac{\mathring{r}_a(p^{\bar{a}}, 0)}{\mathring{r}_e(p^{\bar{a}}, 0)} = \log \varphi(p^{\bar{a}}, 0) \left(\text{wegen der Bestimmung von } \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m}(p^{\bar{a}}, 0)\,!\right),$$

$$(7.39)\qquad \underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_{\bar{b}}\,(p^{\bar{a}}, 0) = 0,$$

$$(7.40)\qquad \mathring{G}_{am}(p^c) = \varepsilon\,\delta^m_a,$$

---

[15]) Hierbei haben wir $\mathfrak{x} = \{x^i\}$, $\mathfrak{x}_a = \{x^i_a\}$ und $\mathfrak{e} = \{e^i\}$ gesetzt.

[16]) Siehe dazu § 2.

$$(7.41)\qquad \frac{\partial}{\partial p^m}\left(\log \frac{\mathring{F}(p^c)^{\frac{2}{2+m}}}{|\mathring{G}(p^c)|^{\frac{1}{2+m}}}\right) = \frac{\partial}{\partial p^m}(\log \varphi(p^c)),$$

$$(7.42)\qquad \frac{\sum\limits_{a=1}^{m} a_a \mathring{S}_a(p^c) + a}{\sum\limits_{a=1}^{m} b_a \mathring{S}_a(p^c) + b} = \psi(p^c)$$

und

$$(7.43)\qquad \mathring{\mathfrak{A}}_{\underset{a}{m}}(p^c) = 0,$$

$$(7.44)\qquad \mathring{\mathfrak{T}}_{m\bar{a}\bar{b}m}(p^c) = 0, \qquad (\bar{a} \geqq \bar{b})$$

$$(7.45)\qquad \mathring{\mathfrak{U}}_{ab\bar{b}m}(p^c) = 0, \qquad (a \geqq b \geqq \bar{b})$$

$$(7.46)\qquad \mathring{\mathfrak{V}}_{a\bar{b}m}(p^c) = 0. \qquad (a \geqq \bar{b})$$

Jetzt können wir zunächst aus (7.44) und den aus (7.19) folgenden Symmetriebeziehungen

$$(7.47)\qquad \mathfrak{T}_{eabc} = -\mathfrak{T}_{aebc} = -\mathfrak{T}_{eacb} = \mathfrak{T}_{bcea}$$

analog wie in §3, S. 458 auf die Gültigkeit der Kongruenz:

$$(7.48)\qquad \mathring{\mathfrak{T}}_{ab\bar{b}m}(p^c) \cong 0 \;(\mathrm{mod}\; \mathring{\mathfrak{T}}_{\bar{b}m\bar{a}\bar{c}}(p^c)) \qquad (1 \leqq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \leqq m-1)$$

schließen, und ebenso folgt (wie in §3, S. 458–459) aus (7.46) und der Darstellung

$\mathring{\mathfrak{V}}_{abc} = \mathring{\mathfrak{X}}_{acb} - \mathring{\mathfrak{X}}_{abc}$ mit $\mathring{\mathfrak{X}}_{abc} \equiv -\dfrac{\partial \mathring{B}_{ab}}{\partial p^c} - \mathring{\Gamma}^d_{ab}\mathring{B}_{dc} + \mathring{G}^{ed}\mathring{A}_{eab}\mathring{B}_{cd}$, d. h. $\mathring{\mathfrak{X}}_{abc} = \mathring{\mathfrak{X}}_{bac}$:

$$(7.49)\qquad \mathring{\mathfrak{V}}_{a\bar{b}m}(p^c) \cong 0 \;(\mathrm{mod}\; \mathring{\mathfrak{V}}_{m\bar{a}\bar{b}}(p^c)) \qquad (1 \leqq \bar{a}, \bar{b} \leqq m-1).$$

Weiter gilt die Formel:

$$(7.50)\qquad \mathring{\mathfrak{U}}_{ab\bar{b}m}(p^c) \cong 0 \;(\mathrm{mod}\; \mathring{\mathfrak{U}}_{dm\bar{a}\bar{b}}(p^c)) \quad (1 \leqq \bar{a}, \bar{b} \leqq m-1),$$

wie man folgendermaßen einsieht. Ganz allgemein läßt sich nach (7.19) $\mathfrak{U}_{abcd}$ in der Form

$$(7.51)\qquad \mathring{\mathfrak{U}}_{abcd} = \mathring{\mathfrak{W}}_{abdc} - \mathring{\mathfrak{W}}_{abcd} = -\mathring{\mathfrak{U}}_{abdc}$$

ausdrücken, wobei

$$\mathring{\mathfrak{W}}_{abcd} \equiv -\frac{\partial \mathring{A}_{abc}}{\partial p^d} + \mathring{\Gamma}^e_{ad}\mathring{A}_{ebc} - \mathring{\Gamma}^e_{bc}\mathring{A}_{aed} - \frac{1}{2}\mathring{G}_{bc}\mathring{B}_{ad} + \frac{1}{2}\mathring{G}_{ad}\mathring{B}_{bc}$$

und

$$(7.52)\qquad \mathring{\mathfrak{W}}_{abcd} = \mathring{\mathfrak{W}}_{acbd}$$

ist. Außerdem gilt:

$$(7.53)\qquad \mathring{\mathfrak{U}}_{abcd} = \mathring{\mathfrak{U}}_{bacd}.$$

Nun ist (7.50) in den Fällen $a \geqq b \geqq \bar{b}$ und $b \geqq a \geqq \bar{b}$ wegen (7.45) und (7.53) sicher richtig. Falls etwa $a \geqq \bar{b} \geqq b$ ist, so haben wir nach (7.51), (7.52), (7.45):

$$\mathring{\mathfrak{U}}_{ab\bar{b}m} = \mathring{\mathfrak{W}}_{abm\bar{b}} - \mathring{\mathfrak{W}}_{ab\bar{b}m} = \mathring{\mathfrak{W}}_{amb\bar{b}} - \mathring{\mathfrak{W}}_{a\bar{b}bm} = (\mathring{\mathfrak{W}}_{a\bar{b}mb} - \mathring{\mathfrak{W}}_{a\bar{b}bm}) +$$
$$+ (\mathring{\mathfrak{W}}_{amb\bar{b}} - \mathring{\mathfrak{W}}_{a\bar{b}mb}) = -\mathring{\mathfrak{U}}_{amb\bar{b}} \cong 0 \;(\mathrm{mod}\; \mathring{\mathfrak{U}}_{dm\bar{a}\bar{b}});$$

und damit gilt auch in diesem Falle sowie wegen (7.53) auch im Falle $b \geqq \bar{b} \geqq a$

die Gleichung (7.50). Es bleiben jetzt noch die Fälle $\bar{b} \geqq a \geqq b$ und $\bar{b} \geqq b \geqq a$ zu untersuchen. Im ersten Fall wird wegen (7.45), (7.51), (7.52), (7.53):

$$\mathring{\mathfrak{U}}_{a b \bar{b} m} = \mathring{\mathfrak{W}}_{a b m \bar{b}} - \mathring{\mathfrak{W}}_{a b \bar{b} m} = \mathring{\mathfrak{W}}_{a m b \bar{b}} - \mathring{\mathfrak{W}}_{a \bar{b} b m} = \mathring{\mathfrak{W}}_{a m b \bar{b}} + \mathring{\mathfrak{U}}_{a \bar{b} b m} - \mathring{\mathfrak{W}}_{a \bar{b} m b} =$$
$$= \mathring{\mathfrak{U}}_{\bar{b} a b m} + \mathring{\mathfrak{W}}_{a m b \bar{b}} - \mathring{\mathfrak{W}}_{a m \bar{b} b} = - \mathring{\mathfrak{U}}_{a m b \bar{b}} \cong 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathring{\mathfrak{U}}_{d m \bar{a} \bar{b}}),$$

während im zweiten Fall daraus ebenfalls $\mathring{\mathfrak{U}}_{a b \bar{b} m} \cong 0$ (mod $\mathring{\mathfrak{U}}_{d m \bar{a} \bar{b}}$) folgt. Damit ist (7.50) allgemein bewiesen.

Nun ergibt sich wegen Rang $(\mathring{G}^{de} \mathring{x}_d^j) = m$ nach (7.47), (7.53) und (7.18):

$$\mathring{\mathfrak{T}}_{e a b c} = \tfrac{1}{2}(\mathring{\mathfrak{T}}_{e a b c} + \mathring{\mathfrak{U}}_{e a b c}) - \tfrac{1}{2}(\mathring{\mathfrak{T}}_{a e b c} + \mathring{\mathfrak{U}}_{a e b c}) \cong 0 \left(\mathrm{mod}\, \underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{Z}}}_{bc}\right)$$

und

$$\mathring{\mathfrak{U}}_{e a b c} = \tfrac{1}{2}(\mathring{\mathfrak{T}}_{e a b c} + \mathring{\mathfrak{U}}_{e a b c}) + \tfrac{1}{2}(\mathring{\mathfrak{T}}_{a e b c} + \mathring{\mathfrak{U}}_{a e b c}) \cong 0 \left(\mathrm{mod}\, \underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{Z}}}_{bc}\right).$$

Außerdem gilt nach (7.18):

$$\mathring{\mathfrak{V}}_{e b c} \cong 0 \left(\mathrm{mod}\, \underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{Z}}}_{bc}\right),$$

so daß wir in bekannter Weise in Verbindung mit (7.48), (7.49), (7.50) wegen (7.18) auf die Gültigkeit von

$$\underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{Z}}}_{\bar{a} m}(p^c) \cong 0 \left(\mathrm{mod}\, \underset{\beta}{\mathring{\mathfrak{Z}}}_{\bar{b} \bar{c}}(p^c)\right) \qquad (1 \leqq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \leqq m-1)$$

schließen können.

Damit sind nun wegen (7.39) und (7.43) alle Voraussetzungen von Hilfssatz 2 d) erfüllt, aus welchem sich jetzt $\underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_a(p^c) = 0$ ergibt. Wir haben in $\mathring{\mathfrak{x}}(p^a)$, $\mathring{\mathfrak{e}}(p^a)$ ein (im Nullpunkt) analytisches, durch parallele Tangentialhyperebenen aufeinander bezogenes Hyperflächenpaar gefunden, welches für $p^m = 0$ durch Γ geht und wegen $\underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_a(p^c) = 0$ die drei Grundtensoren $\mathring{G}_{ab}$, $\mathring{A}_{abc}$, $\mathring{B}_{ab}$ besitzt, so daß es wegen (7.40), (7.38) mit (7.41), und (7.42) den Bedingungen (7.14), (7.15) und (7.16) von Satz 11 genügt. Umgekehrt ist auch leicht einzusehen, daß es nicht mehr als ein diesen Bedingungen genügendes, für $p^m = 0$ durch Γ gehendes, analytisches Hyperflächenpaar geben kann. Hiermit ist Satz 11 vollständig bewiesen; w.z.b.w.

Aus diesem Satz ergibt sich sofort im Spezialfall $\frac{r_a}{r_e} = \varphi = 1$, d. h. nach (7.13) $\tau = 0$ — was für die Blaschkesche affine Differentialgeometrie charakteristisch ist — als genaues Analogon zu Satz 10:

Satz 12. *Durch die im Nullpunkt analytischen Vektoren $\mathfrak{x}(p^{\bar{a}})$ und $\mathfrak{y}(p^{\bar{a}})$ mit Rang $\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{b}}}(p^{\bar{a}}), \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial p^{\bar{c}}}(p^{\bar{a}})\right) = m\,(1 \leqq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \leqq m-1)$ sei ein Hyperflächenpaarstreifen Γ im A_{m+1} gegeben. Weiter sei $\psi(p^a)$ eine beliebige, im Nullpunkt analytische Funktion. Dann existiert im allgemeinen genau eine im Nullpunkt analytische Hyperfläche $\mathfrak{x}(p^a)$ mit folgenden Eigenschaften: Sie geht zusammen mit ihren Affinnormalen $\mathfrak{y}(p^a)$ für $p^m = 0$ durch Γ, die p^a sind auf Γ bezogene, affingeodätische Parallelkoordinaten mit $\varepsilon = +1$ bzw. $\varepsilon = -1$, und eine linear gebrochene Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen ihrer Affinhauptkrümmungen mit vorgegebenen konstanten Koeffizienten ist gleich $\psi(p^a)$.*

Korollar: *Durch einen analytischen Hyperflächenpaarstreifen geht im allgemeinen genau eine hyperbolisch gekrümmte, analytische Affinminimalhyperfläche*[17]) *und außerdem genau eine elliptisch gekrümmte, analytische Affinminimalhyperfläche; beide jeweils zusammen mit ihren Affinnormalen.*

Dieses Korollar gibt also die Lösung des auf die affine Differentialgeometrie verallgemeinerten Problems von Björling. Es wurde im Spezialfall $m = 2$ und hyperbolischer Krümmung schon von Blaschke gelöst[18]). Zum Beweise des Korollars bemerken wir, daß durch geeignete Wahl von ε stets $G < 0$ bzw. $G > 0$, d. h. der hyperbolische bzw. elliptische Fall erreicht werden kann. Es wird nämlich in den affingeodätischen Parallelkoordinaten $G = \varepsilon \, \|G_{\bar a \bar b}\|$, wobei $\|G_{\bar a \bar b}\|$ lediglich von Γ abhängt und damit von ε unabhängig ist.

Aus Satz 11 läßt sich außerdem im Falle der Salkowskischen zentralaffinen Differentialgeometrie der folgende Satz herleiten:

Satz 13. *Sei Γ ein durch $\mathfrak{x}(p^{\bar a})$ und $\mathfrak{m}(p^{\bar a})$ mit $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar b}}\,\mathfrak{m} = 0$, $\mathfrak{m}^2 = 1$ und $\mathfrak{x}(0)\,\mathfrak{m}(0) > 0\,(1 \leq \bar a, \bar b \leq m-1)$ gegebener, im Nullpunkt analytischer Hyperflächenstreifen des A_{m+1}, und sei $\varphi(p^a)$ eine beliebige, positive, analytische Funktion. Dann existiert im allgemeinen genau eine im Nullpunkt analytische Hyperfläche $\mathfrak{x}(p^a)$, welche für $p^m = 0$ durch Γ geht und die folgenden Eigenschaften besitzt: Die p^a sind auf Γ bezogene, affingeodätische Parallelkoordinaten im Salkowskischen Sinne mit $\varepsilon = +1$ bzw. $\varepsilon = -1$, und der Affinabstand $r_a(p^a)$ des Ursprungs $\mathfrak{x} = 0$ von $\mathfrak{x}(p^a)$ ist gleich $\varphi(p^a)$*[19]).

Beweis: Nach Satz 11 gibt es im allgemeinen ein analytisches Hyperflächenpaar $\mathring{\mathfrak{x}}(p^a)$, $\mathring{\mathfrak{e}}(p^a)$ mit $\mathring{\mathfrak{x}}(p^{\bar a}, 0) = \mathfrak{x}(p^{\bar a})$, $\mathring{\mathfrak{e}}(p^{\bar a}, 0) = \mathfrak{x}(p^{\bar a})$,

$$\frac{\mathring{r}_a(p^a)}{\mathring{r}_e(p^a)} = \varphi(p^a)$$

und

$$\mathring{S}_1(p^a) = m\,, \tag{7.54}$$

bei welchem p^a auf Γ bezogene, relativgeodätische Parallelkoordinaten sind. Der Beweis von Satz 11 lehrt, daß für $\mathring{\mathfrak{x}}$, $\mathring{\mathfrak{e}}$ die Beziehungen

$$\mathring{B}_{c\bar b}(p^{\bar a}, 0) = \mathring{G}_{c\bar b}(p^{\bar a}, 0) \tag{7.55}$$

und $\mathring{\mathfrak{V}}_{c\bar b m} = 0$, d. h.

$$\frac{\partial \mathring{B}_{c\bar b}}{\partial p^m} = \frac{\partial \mathring{B}_{cm}}{\partial p^{\bar b}} + \mathring{\Gamma}^d_{cm}\,\mathring{B}_{d\bar b} - \mathring{\Gamma}^d_{c\bar b}\,\mathring{B}_{dm} + \mathring{G}^{ed}\,(\mathring{A}_{ec\bar b}\,\mathring{B}_{md} - \mathring{A}_{ecm}\,\mathring{B}_{\bar b d}) \tag{7.56}$$

$$(1 \leq \bar a, \bar b \leq m-1)$$

in allen p^a richtig sind. Setzt man nun in (7.56) die durch Auflösung von (7.54) gewonnene Gleichung

$$\mathring{B}_{mm} = \varepsilon\,(m - \mathring{G}^{\bar a \bar b}\,\mathring{B}_{\bar a \bar b})$$

[17]) Eine Affinminimalhyperfläche ist durch das Verschwinden ihrer mittleren Affinkrümmung gekennzeichnet. Vgl. dazu [1], § 68.

[18]) Siehe [2] und [1], § 70.

[19]) Die Eindeutigkeitsaussage dieses Satzes folgt für $m = 2$ aus der von W. Süss [10] bewiesenen Eindeutigkeit der Bestimmung von $\mathfrak{x}$ durch G_{ab} und r_a in allgemeinen Parametern.

ein, so nimmt (7.56) die Gestalt (I) (in § 2!) an und besitzt wegen (7.55) und (7.54) die einzige Lösung $\overset{\circ}{B}_{cb}(p^a) = \overset{\circ}{G}_{cb}(p^a)$. Aus den Ableitungsgleichungen von $\mathring{\mathfrak{x}}, \mathring{\mathfrak{e}}$ ergibt sich damit sofort $\mathring{\mathfrak{e}}(p^a) = \mathring{\mathfrak{x}}(p^a)$, d. h. $\mathring{r}_e(p^a) = 1$ und somit $\mathring{r}_a(p^a) = \varphi(p^a)$. Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 13 folgt ebenfalls aus derjenigen von Satz 11, w.z.b.w.

Bemerkungen: 1) Satz 11 gilt streng und nicht nur im allgemeinen, wenn wir für den Anfangsstreifen Γ: (7.22) und (7.23), sowie für Γ und die natürliche Gleichung (7.16) zusammen: (7.36) voraussetzen. Dies zeigte uns der Beweis des angeführten Satzes. Insbesondere gilt deshalb das Korollar von Satz 12 genau, wenn für Γ die Beziehungen

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar b}\, \partial p^{\bar c}}(0)\,\mathfrak{m}(0)\right\| \neq 0 \quad \text{oder} \quad \left\| \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar b}}(0)\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial p^{\bar c}}(0)\right\| \neq 0$$

und

$$\operatorname{Rang}\left(\mathfrak{y}(0), \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar b}}(0), \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial p^{\bar c}}(0)\right) = m + 1 \qquad (1 \leq \bar b, \bar c \leq m-1)$$

bestehen. BLASCHKE hat gezeigt, daß für $m = 2$ wirklich Ausnahmefälle bei dem Korollar auftreten, wenn eine dieser beiden Beziehungen nicht gültig ist[20]). Somit ist erwiesen, daß Satz 11 nicht in allen Fällen streng gelten kann. Analog ergibt sich die genaue Gültigkeit von Satz 13 unter der Voraussetzung

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar b}\, \partial p^{\bar c}}(0)\,\mathfrak{m}(0)\right\| \neq 0\,.$$

2) Bekanntlich ist einer infinitesimalen Verbiegung einer zweidimensionalen Fläche $\mathfrak{x}$ im dreidimensionalen, euklidischen Raum ein Drehrißvektor $\mathfrak{e}$ so zugeordnet, daß in entsprechenden Punkten die Tangentialebenen der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ parallel sind. $\mathfrak{x}$ ist in bezug auf $\mathfrak{e}$ eine Relativminimalfläche (und umgekehrt)[21]). Aus Satz 11 folgt nun, daß durch jede analytische Kurve, deren Punkten je ein Drehrißvektor analytisch zugeordnet ist, im allgemeinen unendlich viele analytische Flächen gehen, welche sich alle derart infinitesimal verbiegen lassen, daß der zugehörige Drehrißvektor längs der Kurve die vorgeschriebenen Werte annimmt.

Nun kann man zur Bildung von natürlichen Gleichungen eines Hyperflächenpaares $\mathfrak{x}, \mathfrak{e}$ in der relativen Differentialgeometrie auch die Picksche Invariante J an Stelle von $\frac{r_a}{r_e}$ heranziehen. Dann genügt aber ein einfacher Hyperflächenpaarstreifen nicht mehr zur eindeutigen Festlegung von $\mathfrak{x}, \mathfrak{e}$. Wir müssen jetzt dazu einen Streifen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{e}$ verwenden, welcher $\mathfrak{x}$ „in zweiter Ordnung" berührt, d. h. kurz gesagt: wir müssen $\mathfrak{x}, \mathfrak{e}$ durch einen *Hyperflächenpaarstreifen zweiter Ordnung* eindeutig festlegen. Ein solcher Streifen ist durch Angabe von $\mathfrak{x}, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}$ $\left(\text{mit } \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar a}}\mathfrak{m} = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial p^{\bar a}}\mathfrak{m} = 0,\ \mathfrak{m}^2 = 1,\ \mathfrak{e}(0)\,\mathfrak{m}(0) > 0\right)$ und den Dupinschen Indikatrizen von $\mathfrak{x}$ für $p^m = 0$ definiert $(1 \leq \bar a \leq m-1)$. Da aber jede nichtausgeartete Quadrik im m-dimensionalen, euklidischen Raum durch einen $(m-1)$-dimensionalen Schnitt durch ihren Mittelpunkt und durch den

[20]) Siehe [1], S. 185.

[21]) Siehe [14].

dazu (in bezug auf die Quadrik) konjugierten Durchmesser eindeutig bestimmt ist, und da andererseits der (evtl. imaginäre) Durchmesser $2\,\underline{r}$ der (nichtausgearteten) Indikatrix eines Punktes von $\mathfrak{x}$ einer gewissen Richtung mit der Normalkrümmung $\underline{b}$ von $\mathfrak{x}$ dieser Richtung in der eineindeutigen Beziehung $\underline{b} = -\frac{1}{\underline{r}^2}$ steht, so finden wir: Die Dupinschen Indikatrizen unseres Streifens sind schon durch $\mathfrak{x}(p^{\bar{a}})$, $\mathfrak{m}(p^{\bar{a}})$ und die Normalkrümmungen $b_{(\mathfrak{m})}(p^{\bar{a}})$ in den zu $\mathfrak{x}(\bar{a})$ konjugierten Richtungen gegeben. Die letzteren ergeben sich bekanntlich als Richtungen der Schnittgeraden von m benachbarten Tangentialhyperebenen von $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{x}(p^{\bar{a}})$. Sie sind durch den Vektor $\mathfrak{t}(p^{\bar{a}})$ mit $\mathfrak{t}^2 = 1$ und $\mathfrak{t}\,\mathfrak{m} = 0$, $\mathfrak{t}\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial p^{\bar{a}}} = 0$ bestimmt. Nach (7.25) sind sie also auch die Richtungen der Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m}(p^{\bar{a}})$, wenn wir als System (p^a) ein relativgeodätisch auf den Streifen bezogenes Parametersystem wählen.

Nach diesen Vorbereitungen formulieren wir als nächsten Satz:

Satz 14.

Vor.: Sei Δ ein durch die im Nullpunkt analytischen Funktionen $\mathfrak{x}(p^{\bar{a}})$, $\mathfrak{e}(p^{\bar{a}})$, $\mathfrak{m}(p^{\bar{a}})$ *und* $b_{(\mathfrak{m})}(p^{\bar{a}})$ *mit*

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{a}}}\,\mathfrak{m} = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial p^{\bar{b}}}\,\mathfrak{m} = 0,\ \mathfrak{m}^2 = 1,\ \mathfrak{e}(0)\,\mathfrak{m}(0) > 0,\ \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{b}}\,\partial p^{\bar{c}}}(0)\,\mathfrak{m}(0) \right\| \neq 0,\ b_{(\mathfrak{m})}(0) \neq 0$$

$$(1 \leqq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \leqq m-1)$$

gegebener Hyperflächenpaarstreifen zweiter Ordnung. Sei weiter $\psi(p^a)$ eine beliebige und $\varphi(p^a)$ eine derartige, im Nullpunkt analytische Funktion, daß für sie $\varepsilon(m(m-1)\,\varphi(0) - M(\Delta)) > 0$ gilt, wobei $M(\Delta)$ eine gewisse, nur von Δ abhängende Konstante und $\varepsilon = -\operatorname{sign} b_{(\mathfrak{m})}(0)$ ist.

Beh.: Dann gibt es im allgemeinen genau zwei im Nullpunkt analytische Hyperflächenpaare $\mathfrak{x}(p^a)$, $\mathfrak{e}(p^a)$, welche die folgenden Eigenschaften besitzen: Sie berühren Δ für $p^m = 0$ in zweiter Ordnung, p^a sind auf Γ bezogene, relativgeodätische Parallelkoordinatensysteme mit $G_{a\,m} = \varepsilon\,\delta_a^m$, und es bestehen als natürliche Gleichungen der Hyperflächenpaare die Beziehungen:

$$J(p^a) = \varphi(p^a)$$

und

$$\frac{a_1 S_1(p^a) + \cdots + a_m S_m(p^a) + a}{b_1 S_1(p^a) + \cdots + b_m S_m(p^a) + b} = \psi(p^a).$$

$$(a_1, \ldots, a_m, a, b_1, \ldots, b_m, b = \text{const.})$$

Beweis: Sei $\mathfrak{t}(p^{\bar{a}})$ der durch die Forderungen

$$\mathfrak{t}\,\mathfrak{m} = 0,\ \mathfrak{t}\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial p^{\bar{a}}} = 0,\ \mathfrak{t}^2 = 1 \ \text{ und } \left\| \mathfrak{e}(0), \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1}(0), \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{m-1}}(0), \mathfrak{t}(0) \right\| > 0$$

eindeutig bestimmte (analytische) Vektor. Dann wird

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m} = \beta\,\mathfrak{t},$$

und β errechnet sich aus der Bedingung

$$G_{mm} = \frac{\left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{(\partial p^m)^2}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m} \right\|}{\left\| \mathfrak{c}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^m} \right\|} = \varepsilon$$

zu

$$\beta = \left| \frac{\mathfrak{c}\,\mathfrak{m}}{b_{(m)}} \right|^{\frac{1}{3}} \text{für } p^m = 0,$$

hängt also auch wegen $\mathfrak{c}(0)\,\mathfrak{m}(0) \neq 0$ und $b_{(m)}(0) \neq 0$ von den $p^{\bar{a}}$ analytisch ab. Der weitere Gang des Beweises gestaltet sich genauso wie beim Beweis von Satz 11, nur daß wir jetzt anstelle von (7.33) den nach (7.8) durch Auflösung von $J(p^a) = \varphi(p^a)$ gewonnenen Ausdruck

$$A_{mmm} =$$
$$= \pm \sqrt{\varepsilon\left(m(m-1)\varphi - G^{\bar{a}\bar{d}} G^{be} G^{cf} A_{\bar{a}bc} A_{\bar{d}ef} - \varepsilon G^{\bar{b}\bar{e}} G^{cf} A_{m\bar{b}c} A_{m\bar{e}f} - G^{\bar{c}\bar{f}} A_{mm\bar{c}} A_{mm\bar{f}}\right)}$$
$$(1 \leqq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f} \leqq m-1)$$

einsetzen müssen. Auf eine ausführlichere Darstellung kann deshalb verzichtet werden; w.z.b.w.

Bemerkungen: 1) Satz 14 hat wieder einen speziellen Satz in der Salkowskischen affinen Differentialgeometrie zur Folge, außerdem folgt aus ihm in der relativen Differentialgeometrie die völlige Unabhängigkeit der Pickschen Invariante und einer linear gebrochenen Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen der Relativhauptkrümmungen, d. h. u. a. die Unabhängigkeit von Pickscher Invariante und mittlerer Relativkrümmung.

2) Es verdient noch erwähnt zu werden, daß bei Satz 12 die Hyperfläche noch nicht allein durch einen auf ihr liegenden Streifen zweiter Ordnung (ohne Vorgabe der Affinnormalen!) und ihre natürliche Gleichung festgelegt werden kann.

§ 8. Ein vollständiges und unabhängiges Invariantensystem für Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume

Dem Versuche, die zu Anfang des vorigen Paragraphen durchgeführte Bildung von natürlichen Gleichungen einer Hyperfläche im Riemannschen Raum R_n auf beliebige m-dimensionale Mannigfaltigkeiten V_m des R_n ($1 \leqq m \leqq n-1$) zu verallgemeinern, steht zunächst die Schwierigkeit entgegen, daß man für eine solche V_m mit $1 < m < n-1$ nur sehr wenige Invarianten kennt[22]). Es soll deshalb zunächst ein zur Bildung natürlicher Gleichungen geeignetes Invariantensystem für die V_m in dem Spezialfall definiert werden, daß R_n ein n-dimensionaler euklidischer Raum E_n ist.

Zu diesem Zwecke bedienen wir uns der Krümmungstheorie von C. BURSTIN und W. MAYER[23]) für eine V_m im E_n. MAYER definiert für jeden Punkt der durch den Ortsvektor $\mathfrak{x}(u^b)$ gegebenen, als hinreichend oft stetig differenzierbar

[22]) Eine Invariante der im R_n liegenden V_m ist z. B. der Betrag des Vektors h^i ihrer mittleren Krümmung (vgl. (5.1)!).

[23]) Siehe dazu [5]; eine verallgemeinerte Krümmungstheorie findet sich in [16].

vorausgesetzten V_m den τ-ten Schmiegraum S_τ als denjenigen linearen Vektorraum im E_n, welcher von allen Vektoren:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^{a_1}}, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2}}, \ldots, \frac{\partial^\tau \mathfrak{x}}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2} \ldots \partial u^{a_\tau}} \qquad (1 \leqq a_1, a_2, \ldots, a_\tau \leqq m)$$

dieses Punktes aufgespannt wird[24]). Diese Definition hängt, wie man sich leicht überzeugt, nicht von der Wahl der Parameter u^b ab, so daß man sich S_τ als invariant mit der V_m verknüpft vorstellen kann. Weiter bezeichnet MAYER das orthogonale Komplement von $S_{\tau-1}$ in bezug auf den $S_{\tau-1}$ enthaltenden Schmiegraum S_τ mit N_τ und nennt diesen linearen Vektorraum den τ-ten Normalenraum des betreffenden Punktes der $V_m (\tau \geqq 2)$. Er setzt noch speziell $N_1 = S_1$ fest. Es gilt also, symbolisch ausgedrückt:

$$S_\tau = S_{\tau-1} + N_\tau, \quad S_{\tau-1} \perp N_\tau$$

und damit:

$$S_\tau = N_1 + N_2 + \cdots + N_\tau, \quad N_{\tau_1} \perp N_{\tau_2} \qquad (1 \leqq \tau_1 < \tau_2 \leqq \tau). \tag{8.1}$$

Wegen $S_\tau \subseteq E_n$ muß daher einmal ein N_τ Null werden, d. h. in der Folge der sich enthaltenden S_τ müssen einmal zwei aufeinanderfolgende Glieder gleich sein. Dies sei zum ersten Male für $\tau = \tau_0$ der Fall. Dann fallen nach unserer Definition nicht nur S_{τ_0+1} mit S_{τ_0}, sondern auch S_{τ_0+2} mit S_{τ_0+1}, S_{τ_0+3} mit S_{τ_0+2} usw. zusammen; d. h. es gilt:

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_{\tau_0} = S_{\tau_0+1} = \cdots \subseteq E_n.$$

Wir zerlegen schließlich noch den E_n in folgender Weise:

$$E_n = S_{\tau_0} + N_{\tau_0+1}, \quad S_{\tau_0} \perp N_{\tau_0+1} \tag{8.2}$$

und nennen N_{τ_0+1} den uneigentlichen Normalraum der V_m in E_n, im Gegensatz zu ihren eigentlichen Normalräumen $N_\tau (\tau = 1, 2, \ldots, \tau_0)$. Für die Dimensionen d_τ der letzteren gilt die Abschätzung:

$$d_\tau \leqq \binom{m+\tau-1}{\tau} \qquad (1 \leqq \tau \leqq \tau_0).$$

Wird hier für ein gewisses τ das Gleichheitszeichen erreicht, so nennen wir den zugehörigen N_τ nicht ausgeartet, andernfalls ist der N_τ ausgeartet. Die Dimension d_{τ_0+1} von N_{τ_0+1} ist dagegen natürlich keiner Beschränkung unterworfen. Nach Hilfssatz 3 ist S_{τ_0} und damit auch N_{τ_0+1} für alle Punkte der V_m konstant. Aus diesem Grunde sowie wegen (8.1) und (8.2) kann man jetzt für jeden Punkt u^b der V_m ein begleitendes n-Bein aus zweimal stetig differenzierbaren, paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\mathfrak{n}}}(u^b)$ $(\lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;$ $1 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1)$ so angeben, daß N_τ gerade durch die Vektoren $\overset{\tau}{\underset{1}{\mathfrak{n}}}, \overset{\tau}{\underset{2}{\mathfrak{n}}}, \ldots, \overset{\tau}{\underset{d_\tau}{\mathfrak{n}}}$ aufgespannt wird und

$$\overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{\mathfrak{n}}}(u^b) = \text{const.} \tag{8.3}$$

gilt. Die Basisvektoren dieses n-Beins sind dabei bis auf Bewegungen in jedem Normalenraum bestimmt.

---

[24]) Vgl. [5], S. 201 ff. S_2 ist also mit dem in § 3, S. 450 eingeführten Krümmungsgebiet der V_m identisch.

MAYER betrachtet nun die Projektion des Vektors $\frac{\partial^\tau \mathfrak{x}}{\partial u^{a_1}\, \partial u^{a_2} \dots \partial u^{a_\tau}}$ in den τ-ten Normalenraum N_τ, welche wir mit $\left.\frac{\partial^\tau \mathfrak{x}}{\partial u^{a_1}\, \partial u^{a_2} \dots \partial u^{a_\tau}}\right|_{N_\tau}$ bezeichnen wollen, und stellt dieselbe in der Form:

$$\left.\frac{\partial^\tau \mathfrak{x}}{\partial u^{a_1}\, \partial u^{a_2} \dots \partial u^{a_\tau}}\right|_{N_\tau} = \sum_{\lambda_\tau = 1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 a_2 \dots a_\tau} \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\mathfrak{n}}} \tag{8.4}$$

$$(1 \leqq a_1, a_2, \dots, a_\tau \leqq m;\ 1 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1)$$

dar[25]). Aus dieser Darstellung ergibt sich sofort, daß die Koeffizienten $\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 a_2 \dots a_\tau}$ in den Indizes a_1 bis a_τ voll symmetrisch sind und sich in bezug auf diese Indizes (mit festem λ_τ!) bei einer Parametertransformation wie kovariante Tensoren verhalten. Weiter folgt nach (8.4) aus einer orthogonalen Substitution

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\mathfrak{n}}} = \sum_{\mu_\tau = 1}^{d_\tau} c_{\lambda_\tau \mu_\tau} \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{\bar{\mathfrak{n}}}} \quad \text{mit} \quad \sum_{\nu_\tau = 1}^{d_\tau} c_{\lambda_\tau \nu_\tau}\, c_{\mu_\tau \nu_\tau} = \delta_{\lambda_\tau}^{\mu_\tau} \tag{8.5}$$

der Basisvektoren des N_τ die orthogonale Transformation

$$\underset{\mu_\tau}{\bar{A}}_{a_1 a_2 \dots a_\tau} = \sum_{\lambda_\tau = 1}^{d_\tau} c_{\lambda_\tau \mu_\tau} \underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 a_2 \dots a_\tau} \qquad (\lambda_\tau, \mu_\tau = 1, 2, \dots, d_\tau) \tag{8.6}$$

der Koeffizienten $\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 a_2 \dots a_\tau}$, und außerdem ergibt sich die Gültigkeit der Beziehungen:

$$\operatorname{Rang}\left(\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 a_2 \dots a_\tau}(u^b)\right) = d_\tau \qquad (1 \leqq \tau \leqq \tau_0) \tag{8.7}$$

und

$$\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{A}_{a_1 a_2 \dots a_{\tau_0+1}}(u^b) = 0\,. \tag{8.8}$$

Endlich sind die Funktionen $\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 a_2 \dots a_\tau}(u^b)$ alle zweimal stetig differenzierbar und gegenüber orthogonalen Koordinatentransformationen des E_n invariant.

Wir können jetzt auf eine rein invariantentheoretische Weise aus den $\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 \dots a_\tau}$ Vollinvarianten der V_m gewinnen, indem wir die Größen:

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{W}} = g^{a_1 b_1} g^{a_2 b_2} \dots g^{a_\tau b_\tau} \underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 a_2 \dots a_\tau} \underset{\mu_\tau}{A}_{b_1 b_2 \dots b_\tau} \tag{8.9}$$

$$(1 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1)$$

betrachten. Diese transformieren sich bei der Änderung (8.5) der Basis des N_τ wegen (8.6) nach der Formel

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\bar{W}}} = \sum_{\nu_\tau, \chi_\tau = 1}^{d_\tau} c_{\nu_\tau \lambda_\tau}\, c_{\chi_\tau \mu_\tau} \overset{\tau}{\underset{\nu_\tau \chi_\tau}{W}}$$

und sind in λ_τ, μ_τ symmetrisch. Die Matrizen $\left(\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{W}}\right)$ und $\left(\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\bar{W}}}\right)$ besitzen also beide dieselben d_τ reellen Eigenwerte, welche wir mit $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ $(\lambda_\tau = 1, 2, \dots d_\tau)$

---

[25]) Siehe [5], S. 204.

bezeichnen wollen, und wir nennen solche Basisvektoren $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\overset{*}{\mathfrak{n}}}}$ des N_τ, in bezug auf die $\left(\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{*}{W}}}\right)$ die Diagonalgestalt $\left(\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}\ \delta^{\mu_\tau}_{\lambda_\tau}\right)$ annimmt, kurz Eigenvektoren des N_τ. Wenn die $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ alle verschieden sind, so sind sie zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Parameter u^b, und sie können so numeriert werden, daß

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}} < \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{E}} \quad \text{für } \lambda_\tau < \mu_\tau \tag{8.10}$$

gilt. In diesem Falle haben wir ein System von $d_1 + d_2 + \cdots + d_{\tau_0} + d_{\tau_0+1} = n$ [nach (8.1) und (8.2)!] Funktionen der V_m gefunden, welche sämtlich gegen Parametertransformationen der V_m, Koordinatentransformationen des E_n und Änderungen der Basis der Normalenräume invariant sind. Aus der Definition dieser Invarianten ergibt sich nun allgemein:

$$\overset{1}{\underset{\lambda_1}{E}} = 1, \tag{8.11}$$

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}} > 0 \qquad (2 \leqq \tau \leqq \tau_0) \tag{8.12}$$

und

$$\overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{E}} = 0, \tag{8.13}$$

wie man folgendermaßen einsieht:

Wir denken auf der V_m ein im Punkt P_0 lokal euklidisches Parametersystem gegeben. Dann können wir in diesem Punkt die Basisvektoren des Tangentialraums so wählen, daß $\overset{1}{\underset{\lambda_1}{\mathfrak{n}}}$ mit $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^{\lambda_1}}$ zusammenfällt und so nach (8.4): $\underset{\lambda_1}{A}_{a_1}(P_0) = \delta^{\lambda_1}_{a_1}$ gilt. Jetzt berechnet sich:

$$\overset{1}{\underset{\lambda_1 \mu_1}{W}}(P_0) = \sum_{a_1=1}^{m} \underset{\lambda_1}{A}_{a_1}(P_0)\ \underset{\mu_1}{A}_{a_1}(P_0) = \delta^{\mu_1}_{\lambda_1}$$

und damit $\overset{1}{\underset{\lambda_1}{E}}(P_0) = 1\,(1 \leqq \lambda_1 \leqq m)$. Weil P_0 beliebig sein sollte, ist in der Tat allgemein: $\overset{1}{\underset{\lambda_1}{E}}(u^b) = 1$. Weiter ergibt sich im Falle $\tau \leqq \tau_0$ als Gramsche Determinante der d_τ nach (8.7) linear unabhängigen Vektoren $\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 a_2 \cdots a_\tau}(P_0)$ (mit festem λ_τ):

$$\left\| \sum_{a_1, \ldots, a_\tau = 1}^{m} \underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 \ldots a_\tau}(P_0)\ \underset{\mu_\tau}{A}_{a_1 \ldots a_\tau}(P_0) \right\| = \left\| \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{W}}(P_0) \right\| > 0,$$

und darum sind wegen $\left\| \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{W}} \right\| = \overset{\tau}{\underset{1}{E}}\ \overset{\tau}{\underset{2}{E}} \cdots \overset{\tau}{\underset{d_\tau}{E}}$ sicher alle $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ von Null verschieden. Keine von ihnen ist negativ, da sie sich, bezogen auf Eigenvektoren des N_τ, in der Form

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(P_0) = \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \lambda_\tau}{\overset{*}{W}}}(P_0) = \sum_{a_1, \ldots, a_\tau = 1}^{m} \left(\underset{\lambda_\tau}{\overset{*}{A}}_{a_1 a_2 \cdots a_\tau}(P_0)\right)^2,$$

d. h. als Quadratsumme ausdrücken lassen. Also gilt allgemein: $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(u^b) > 0$ $(2 \leqq \tau \leqq \tau_0)$, und nach (8.8) ist schließlich: $\overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{E}}(u^b) = 0$.

Wir bemerken noch, daß $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ $(2 \leqq \tau \leqq \tau_0)$ von der Differentiationsordnung τ ist, d. h. durch τ-maliges Differenzieren von $\mathfrak{x}(u^b)$ berechnet werden kann. Wegen (8.11) nennen wir die Eigenwerte $\overset{1}{\underset{\lambda_1}{E}}$ trivial und die übrigen nichttrivial. Interessant ist nun, wie die $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ im Falle einer Kurve des E_n und im Falle einer Hyperfläche des E_n mit den in diesen Fällen bekannten Invarianten zusammenhängen, was wir im folgenden untersuchen werden.

1. Die eigentlichen Normalenräume einer Kurve V_1 des E_n sind alle eindimensional, und für die sie aufspannenden Normalvektoren $\overset{\tau}{\underset{1}{\mathfrak{n}}}$ gelten die Frenetschen Gleichungen[26]):

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \overset{1}{\underset{1}{\mathfrak{n}}}$$

$$\frac{d\overset{\tau}{\underset{1}{\mathfrak{n}}}}{ds} = -\frac{1}{\varrho_{\tau-1}}\overset{\tau-1}{\underset{1}{\mathfrak{n}}} + \frac{1}{\varrho_\tau}\overset{\tau+1}{\underset{1}{\mathfrak{n}}}, \quad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\varrho_{\tau_0}} = 0 \qquad (s = \text{Bogenlänge der } V_1!).$$
$$(1 \leqq \tau \leqq \tau_0)$$

Daraus errechnet sich wegen (8.4) und (8.9): $\overset{1}{\underset{1}{E}} = (\underset{1}{A}_1)^2 = 1$, $\overset{2}{\underset{1}{E}} = (\underset{1}{A}_{11})^2 = \frac{1}{(\varrho_1)^2}$,

$$\overset{3}{\underset{1}{E}} = (\underset{1}{A}_{111})^2 = \frac{1}{(\varrho_1)^2(\varrho_2)^2}, \ldots, \overset{\tau_0}{\underset{1}{E}} = (\underset{1}{A}_{1\ldots 1})^2 = \frac{1}{(\varrho_1)^2(\varrho_2)^2\cdots(\varrho_{\tau_0-1})^2}, \overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{E}} = 0;$$

und umgekehrt folgt:

$$\text{(8.14)} \qquad \frac{1}{(\varrho_\tau)^2} = \frac{\overset{\tau+1}{\underset{1}{E}}}{\overset{\tau}{\underset{1}{E}}} \qquad (1 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1).$$

2. Der zweite Normalenraum einer Hyperfläche V_m des E_{m+1} ist natürlich eindimensional. Wir erhalten demnach

$$\overset{2}{\underset{1}{E}} = \overset{2}{\underset{11}{W}} = g^{a_1b_1} g^{a_2b_2} \underset{1}{A}_{a_1a_2} \underset{1}{A}_{b_1b_2} = (g^{a_1c_1} \underset{1}{A}_{a_1c_1})^2 -$$
$$- (g^{a_1c_1} \underset{1}{A}_{a_1c_1} g^{a_2c_2} \underset{1}{A}_{a_2c_2} - g^{a_1c_1} \underset{1}{A}_{a_2c_1} g^{a_2c_2} \underset{1}{A}_{a_1c_2}) = (D_1)^2 - 2\,D_2$$

wegen der aus (7.1) folgenden Identität:

$$(y)^m - D_1(y)^{m-1} \pm \cdots + (-1)^m D_m \equiv \frac{1}{g}\,\| y\, g_{a_1b_1} - \underset{1}{A}_{a_1b_1} \| =$$
$$= \frac{1}{g}\,\| (y\,\delta^{a_2}_{a_1} - g^{a_2c_1}\underset{1}{A}_{a_1c_1})\, g_{a_2b_1} \| = \| y\,\delta^{a_2}_{a_1} - g^{a_2c_1} \underset{1}{A}_{a_1c_1} \|.$$

Unter Verwendung der Hauptkrümmungen $\frac{1}{R_a}$ der V_m stellt sich dann $\overset{2}{\underset{1}{E}}$ in der Form

$$\text{(8.15)} \qquad \overset{2}{\underset{1}{E}} = \left(\sum_{a=1}^{m} \frac{1}{R_a}\right)^2 - 2\left(\sum_{a<b} \frac{1}{R_a}\frac{1}{R_b}\right) = \sum_{a=1}^{m}\left(\frac{1}{R_a}\right)^2 = m\,C$$

[26]) Siehe [5], S. 74

dar, wenn wir mit C die sog. CASORATI-Krümmung der V_m bezeichnen[27]).

Nach diesen Vorbereitungen liegt es nahe, zur Bildung von natürlichen Gleichungen einer V_m im E_n gerade die $d_2 + \cdots + d_{\tau_0+1} = n - m$ nichttrivialen Invarianten $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ $(2 \leq \tau \leq \tau_0 + 1)$ heranzuziehen und die V_m, wie schon oft, auf geodätische Parallelkoordinaten p^a zu beziehen. Es muß nur noch der Begriff eines dazu ebenfalls notwendigen $(m-1)$-dimensionalen Streifens Γ der V_m präzisiert werden. Dies geschehe folgendermaßen:

Wir denken uns eine durch $\mathfrak{x}(p^{\bar{a}})$ $(1 \leq \bar{a} \leq m-1)$ definierte V_{m-1} im E_n und für jeden Punkt $(p^{\bar{a}})$ eine Folge von zueinander paarweise orthogonalen, den E_n aufspannenden linearen Vektorräumen $N_1, N_2, \ldots, N_{\tau_0+1}$ des E_n mit

$$d_1 = \operatorname{Dim} N_1 = m; \; d_\tau = \operatorname{Dim} N_\tau \leq \binom{m+\tau-1}{\tau} \; (2 \leq \tau \leq \tau_0); \; N_{\tau_0+1} = \text{const.}$$

gegeben. Dann bilden V_{m-1} und N_τ einen $(m-1)$-dimensionalen Streifen Γ im E_n, wenn die Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^{\bar{a}}}$ in N_1 und wenn alle Ableitungen nach $p^{\bar{a}}$ von irgendwelchen, den N_τ aufspannenden Vektoren in $N_1 + \cdots + N_{\tau+1}$ für $1 \leq \tau \leq \tau_0 - 1$ bzw. in $N_1 + \cdots + N_\tau$ für $\tau = \tau_0$ enthalten sind. Wir sagen, eine durch $\mathfrak{x}(p^a)$ gegebene V_m des E_n gehe für $p^m = 0$ durch Γ, wenn $\mathfrak{x}(p^{\bar{a}}, 0)$ mit der V_{m-1} von Γ und wenn die Normalenräume der V_m für $p^m = 0$ mit den N_τ von Γ übereinstimmen.

Damit sind wir endlich in der Lage, in bezug auf natürliche Gleichungen einer V_m im E_n den folgenden Satz zu formulieren:

Satz 15.

Vor.: Es sei Γ ein durch den im Nullpunkt analytischen Vektor $\mathfrak{x}(p^{\bar{a}})$ und durch die ebenfalls im Nullpunkt analytischen, orthogonal normierten Basisvektoren $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\mathfrak{n}}}(p^{\bar{a}})$ der N_τ gegebener, $(m-1)$-dimensionaler Streifen des E_n

$$\left(\overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{\mathfrak{n}}}(p^{\bar{a}}) = \text{const}; \; 1 \leq \bar{a} \leq m-1; \; \lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau; \; 1 \leq \tau \leq \tau_0 + 1; \; \sum_{\tau=1}^{\tau_0+1} d_\tau = n\right).$$

Weiter seien $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(p^a)$ beliebige positive, im Nullpunkt analytische Funktionen $(\lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau; \; 2 \leq \tau \leq \tau_0)$, welche noch der Bedingung

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0) < \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{\varphi}}(0) \quad \text{für } \lambda_\tau < \mu_\tau \tag{8.16}$$

unterworfen seien. Schließlich sollen diese Funktionen und Γ den folgenden drei Nebenbedingungen genügen:

$$1.\; d_\tau = \binom{m+\tau-1}{\tau} \text{ für } 1 \leq \tau \leq \tau_0 - 1 \text{ und } d_{\tau_0} \leq \binom{m+\tau_0-1}{\tau_0}. \tag{8.17}$$

2. *Es gebe reelle Werte $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{X}}{}_0$ $(\lambda_\tau = 1, 2, \ldots d_\tau; \; 1 \leq \tau \leq \tau_0)$, für die $\sum_{\lambda_1=1}^{m} \underset{\lambda_1}{A}{}_{\bar{a}}(0) \overset{1}{\underset{\lambda_1}{X}}{}_0 = 0$ $(1 \leq \bar{a} \leq m-1)$ sowie $\sum_{\lambda_1=1}^{m} \left(\overset{1}{\underset{\lambda_1}{X}}{}_0\right)^2 = 1$ gilt und für die die Eigenwerte der*

[27]) Siehe [4], S. 99.

symmetrischen Matrizen $\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{V}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X_0}}\right)$ $(\lambda_\tau, \mu_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;\ \nu_\sigma = 1, \ldots, d_\sigma;\ 1 \leqq \sigma \leqq$ $\leqq \tau)$ *gleich* $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\varphi}}(0)$ *werden* $(2 \leqq \tau \leqq \tau_0)$, *wobei* $\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{V}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\right)$ *durch*

$$\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{V}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\right) = \sum_{\lambda_1, \mu_1 = 1}^{m} g^{\bar a_1 \bar b_1}(0) \ldots g^{\bar a_\tau \bar b_\tau}(0) \underset{\lambda_1 \lambda_\tau}{B_{\bar a_1 \ldots \bar a_\tau}}(0) \underset{\mu_1 \mu_\tau}{B_{\bar b_1 \ldots \bar b_\tau}}(0) \underset{\lambda_1}{A_{\bar a_1}}(0) \underset{\mu_1}{A_{\bar b_1}}(0) +$$

(8.18)

$$+\sum_{\tau'=1}^{\tau-1}\binom{\tau}{\tau'}\left(\sum_{\lambda_{\tau'}, \mu_{\tau'} = 1}^{d_{\tau'}} g^{\bar a_{\tau'+1} \bar b_{\tau'+1}}(0) \ldots g^{\bar a_\tau \bar b_\tau}(0) \underset{\lambda_{\tau'} \lambda_\tau}{B_{\bar a_{\tau'+1} \ldots \bar a_\tau}}(0) \underset{\mu_{\tau'} \mu_\tau}{B_{\bar b_{\tau'+1} \ldots \bar b_\tau}}(0) \underset{\lambda_{\tau'}}{\overset{\tau'}{X}} \underset{\mu_{\tau'}}{\overset{\tau'}{X}}\right) + \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{X}} \underset{\mu_\tau}{\overset{\tau}{X}}$$

$$(1 \leqq \bar a_1, \ldots, \bar a_\tau, \bar b_1, \ldots, \bar b_\tau \leqq m-1)$$

mit

$$\underset{\lambda_1}{A_{\bar a}} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{d p^{\bar a}} \underset{\lambda_1}{\overset{1}{\mathfrak{n}}}, \quad g_{\bar a \bar b} = \sum_{\lambda_1 = 1}^{m} \underset{\lambda_1}{A_{\bar a}} \underset{\lambda_1}{A_{\bar b}}, \quad g^{\bar a \bar b} g_{\bar b \bar c} = \delta^{\bar a}_{\bar c}$$

und

$$\underset{\lambda_{\tau'} \lambda_\tau}{B_{\bar a_{\tau'+1} \ldots \bar a_\tau}} = \sum_{\lambda_{\tau'+1}=1}^{d_{\tau'+1}} \sum_{\lambda_{\tau'+2}=1}^{d_{\tau'+2}} \cdots \sum_{\lambda_{\tau-1}=1}^{d_{\tau-1}} \underset{\lambda_{\tau'} \lambda_{\tau'+1}}{\overset{\tau'}{H}_{\bar a_{\tau'+1}}} \underset{\lambda_{\tau'+1} \lambda_{\tau'+2}}{\overset{\tau'+1}{H}_{\bar a_{\tau'+2}}} \ldots \underset{\lambda_{\tau-1} \lambda_\tau}{\overset{\tau-1}{H}_{\bar a_\tau}}$$

$$(1 \leqq \tau' \leqq \tau - 1;\ 2 \leqq \tau \leqq \tau_0)$$

mit $\underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}_{\bar a}} = \dfrac{\partial \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{n}}}}{\partial p^{\bar a}} \underset{\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau+1}{\mathfrak{n}}}$ *definiert ist.*

3. *Wenn* $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\right)$ *durch die Polynomidentität*

$$\left\| y\, \delta^{\mu_\tau}_{\lambda_\tau} - \underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{V}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\right) \right\| \equiv (y)^{d_\tau} + \sum_{\lambda_\tau = 1}^{d_\tau} (-1)^{\lambda_\tau} \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\right) (y)^{d_\tau - \lambda_\tau} \quad (8.19)$$

[28]

definiert wird, so sei:

$$\left\| \frac{\partial \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}}{\partial \underset{\mu_\tau}{\overset{\tau}{X}}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X_0}}\right) \right\| \neq 0$$

$$(\lambda_\tau, \mu_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;\ \nu_\sigma = 1, 2, \ldots, d_\sigma;\ 1 \leqq \sigma \leqq \tau;\ 2 \leqq \tau \leqq \tau_0).$$

Beh.: Dann existiert in einer Umgebung des Nullpunkts (mindestens) eine im Nullpunkt analytische, m-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{x}(p^a)$, *welche für* $p^m = 0$ *durch* Γ *geht,* p^a *als auf* Γ *bezogene, geodätische Parallelkoordinaten besitzt*[29]) *und für welche die Beziehungen*

$$\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{E}}(p^a) = \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\varphi}}(p^a) \qquad (2 \leqq \tau \leqq \tau_0) \quad (8.20)$$

bestehen.

---

[28]) Hierbei sind $(y)^{d_\tau}$ bzw. $(y)^{d_\tau - \lambda_\tau}$ Potenzen von y.

[29]) Es ist zu beachten, daß die p^a nur bis auf zwei Arten durch Γ eindeutig bestimmt sind.

Beweis: Wir vermerken zunächst die Ableitungsgleichungen einer V_m im E_n, welche nach [5][30]) die Gestalt:

$$\frac{\partial \underset{i}{\psi}}{\partial p^b} - \underset{i}{G}_b\left(p^a, \underset{\alpha}{\psi}\right) \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^b} - \sum_{\lambda_1=1}^{m} \underset{\lambda_1}{A}_b(p^a) \underset{\lambda_1}{\overset{1}{\mathfrak{n}}} = 0$$

$$(8.21)\quad \frac{\partial \underset{i,\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\psi}}}{\partial p^b} - \underset{i,\lambda_\tau}{\overset{\tau}{G}}_b\left(p^a, \underset{\alpha}{\psi}\right) \equiv \frac{\partial \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{n}}}}{\partial p^b} - \sum_{\lambda_{\tau-1}=1}^{d_{\tau-1}} \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau-1}}{\overset{\tau-1}{H}}_b(p^a) \underset{\lambda_{\tau-1}}{\overset{\tau-1}{\mathfrak{n}}} - \sum_{\mu_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{T}}_b(p^a) \underset{\mu_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{n}}} -$$

$$- \sum_{\lambda_{\tau+1}=1}^{d_{\tau+1}} \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_b(p^a) \underset{\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau+1}{\mathfrak{n}}} = 0$$

$$(\lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;\ 1 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1)$$

mit

$$\underset{\lambda_{\tau+1}\lambda_\tau}{\overset{\tau}{H}}_b = - \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_b,\ \underset{\mu_\tau \lambda_\tau}{\overset{\tau}{T}}_b = - \underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{T}}_b,\ \underset{\lambda_1 \lambda_0}{\overset{0}{H}}_b = \underset{\lambda_{\tau_0+1}\lambda_{\tau_0}}{\overset{\tau_0}{H}}_b = \underset{\lambda_{\tau_0+1}\mu_{\tau_0+1}}{\overset{\tau_0+1}{T}}_b = \underset{\lambda_{\tau_0+1}\lambda_{\tau_0+2}}{\overset{\tau_0+1}{H}}_b = 0$$

besitzen. Diesen Ableitungsgleichungen entsprechen in den Bezeichnungen von §2, Hilfssatz 2a) die Integrabilitätsbedingungen:

$$(8.22)\quad \underset{i}{\mathfrak{J}}_{bc}(p^a) \equiv \sum_{\lambda_1=1}^{m} \underset{\lambda_1}{\mathfrak{D}}_{bc}(p^a) \underset{\lambda_1}{\overset{1}{\mathfrak{n}}}(p^a) + \sum_{\lambda_2=1}^{d_2} \underset{\lambda_2}{\mathfrak{E}}_{bc}(p^a) \underset{\lambda_2}{\overset{2}{\mathfrak{n}}}(p^a) = 0$$

$$(8.23)\quad \underset{i,\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{J}}}_{bc}(p^a) \equiv - \sum_{\lambda_{\tau-2}=1}^{d_{\tau-2}} \underset{\lambda_{\tau-2}\lambda_\tau}{\overset{\tau-2}{\mathfrak{F}}}_{bc}(p^a) \underset{\lambda_{\tau-2}}{\overset{\tau-2}{\mathfrak{n}}}(p^a) - \sum_{\lambda_{\tau-1}=1}^{d_{\tau-1}} \underset{\lambda_{\tau-1}\lambda_\tau}{\overset{\tau-1}{\mathfrak{G}}}_{bc}(p^a) \underset{\lambda_{\tau-1}}{\overset{\tau-1}{\mathfrak{n}}}(p^a) +$$

$$+ \sum_{\mu_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{H}}}_{bc}(p^a) \underset{\mu_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{n}}}(p^a) + \sum_{\lambda_{\tau+1}=1}^{d_{\tau+1}} \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\mathfrak{G}}}_{bc}(p^a) \underset{\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau+1}{\mathfrak{n}}}(p^a) + \sum_{\lambda_{\tau+2}=1}^{d_{\tau+2}} \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+2}}{\overset{\tau}{\mathfrak{F}}}_{bc}(p^a) \underset{\lambda_{\tau+2}}{\overset{\tau+2}{\mathfrak{n}}}(p^a) = 0$$

$$(1 \leqq \tau \leqq \tau_0)$$

$$(8.24)\quad \underset{i,\lambda_{\tau_0+1}}{\overset{\tau_0+1}{\mathfrak{J}}}_{bc}(p^a) \equiv 0.$$

Hierbei ist zur Abkürzung

$$\underset{\lambda_1}{\mathfrak{D}}_{bc} \equiv \frac{\partial \underset{\lambda_1}{A}_b}{\partial p^c} - \frac{\partial \underset{\lambda_1}{A}_c}{\partial p^b} + \sum_{\mu_1=1}^{m} \left(\underset{\mu_1}{A}_b \underset{\mu_1 \lambda_1}{\overset{1}{T}}_c - \underset{\mu_1}{A}_c \underset{\mu_1 \lambda_1}{\overset{1}{T}}_b \right)$$

$$\underset{\lambda_2}{\mathfrak{E}}_{bc} \equiv \sum_{\lambda_1=1}^{m} \left(\underset{\lambda_1}{A}_b \underset{\lambda_1 \lambda_2}{\overset{1}{H}}_c - \underset{\lambda_1}{A}_c \underset{\lambda_1 \lambda_2}{\overset{1}{H}}_b \right)$$

$$(8.25)\quad \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+2}}{\overset{\tau}{\mathfrak{F}}}_{bc} \equiv \sum_{\lambda_{\tau+1}=1}^{d_{\tau+1}} \left(\underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_b \underset{\lambda_{\tau+1}\lambda_{\tau+2}}{\overset{\tau+1}{H}}_c - \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_c \underset{\lambda_{\tau+1}\lambda_{\tau+2}}{\overset{\tau+1}{H}}_b \right)$$

$$\underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\mathfrak{G}}}_{bc} \equiv \sum_{(b,c)} \left(\frac{\partial \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_b}{\partial p^c} + \sum_{\mu_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{T}}_b \underset{\mu_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_c + \sum_{\mu_{\tau+1}=1}^{d_{\tau+1}} \underset{\lambda_\tau \mu_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_b \underset{\mu_{\tau+1}\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau+1}{T}}_c \right)$$

$$\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{H}}}_{bc} \equiv \sum_{(b,c)} \left(\frac{\partial \underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{T}}_b}{\partial p^c} + \sum_{\lambda_{\tau+1}=1}^{d_{\tau+1}} \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_c \underset{\mu_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_b + \sum_{\nu_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau \nu_\tau}{\overset{\tau}{T}}_b \underset{\nu_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{T}}_c + \sum_{\lambda_{\tau-1}=1}^{d_{\tau-1}} \underset{\lambda_{\tau-1}\lambda_\tau}{\overset{\tau-1}{H}}_c \underset{\lambda_{\tau-1}\mu_\tau}{\overset{\tau-1}{H}}_b \right)$$

---

[30]) Siehe S. 207—208.

gesetzt[31]). Dann errechnet sich aus (8.4) und (8.21):

$$\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1 a_2 \ldots a_\tau} = \sum_{\lambda_1=1}^{d_1} \sum_{\lambda_2=1}^{d_2} \cdots \sum_{\lambda_{\tau-1}=1}^{d_{\tau-1}} \underset{\lambda_1}{A}_{a_1} \underset{\lambda_1\lambda_2}{\overset{1}{H}}_{a_2} \underset{\lambda_2\lambda_3}{\overset{2}{H}}_{a_3} \cdots \underset{\lambda_{\tau-1}\lambda_\tau}{\overset{\tau-1}{H}}_{a_\tau}. \tag{8.26}$$

$$(1 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1)$$

Weiter gilt allgemein

$$g_{\bar a \bar b} = \sum_{\lambda_1=1}^{m} \underset{\lambda_1}{A}_{\bar a} \underset{\lambda_1}{A}_{\bar b} \qquad (1 \leqq \bar a, \bar b \leqq m-1); \tag{8.27}$$

sowie für eine V_m in geodätischen Parallelkoordinaten:

$$g_{m a} = \sum_{\lambda_1=1}^{m} \underset{\lambda_1}{A}_m \underset{\lambda_1}{A}_a = \delta^m_a. \tag{8.28}$$

Wegen (8.21) sind uns nun die Anfangswerte der Größen $\mathfrak{x}$, $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\mathfrak{n}}}$, $\underset{\lambda_1}{A}_{\bar a}$, $\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_{\bar a}$ und $\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{\overset{\tau}{T}}_{\bar a}$ für $p^m = 0$ bekannt; sie bestimmen sich nach den Gleichungen:

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{\bar a}(p^{\bar b}, 0) = 0 \qquad (1 \leqq \bar a, \bar b \leqq m-1) \tag{8.29}$$

aus dem vorgegebenen Streifen Γ in eindeutiger Weise als analytische Funktionen der $p^{\bar b}$. Um jetzt eine V_m zu finden, die den Bedingungen (8.28) und (8.20) bzw. der dazu äquivalenten Bedingung

$$\left\| y\, \delta^{\mu_\tau}_{\lambda_\tau} - \underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{\overset{\tau}{W}} \right\| \equiv \prod_{\nu_\tau=1}^{d_\tau} \left(y - \underset{\nu_\tau}{\overset{\tau}{\varphi}} \right) \qquad (2 \leqq \tau \leqq \tau_0) \tag{8.30}$$

genügt, benutzen wir den folgenden Satz über implizite Funktionen[32]):

Sind die (reellen) Funktionen $\Theta^\xi(z^\varepsilon, w^\eta)$ $(\varepsilon = 1, 2, \ldots, \varepsilon_0; \eta, \xi = 1, 2, \ldots, \eta_0)$ für $z^\varepsilon = z^\varepsilon_0$, $w^\eta = w^\eta_0$ analytisch und ist

$$\Theta^\xi(z^\varepsilon_0, w^\eta_0) = 0, \quad \left\| \frac{\partial \Theta^\xi}{\partial w^\eta} \right\| (z^\varepsilon_0, w^\eta_0) \neq 0,$$

so besitzt das Gleichungssystem $\Theta^\xi(z^\varepsilon, w^\eta) = 0$ genau eine, für $z^\varepsilon = z^\varepsilon_0$ analytische, explizite (reelle) Lösung $w^\eta = \vartheta^\eta(z^\varepsilon)$ mit $w^\eta_0 = \vartheta^\eta(z^\varepsilon_0)$.

Auf Grund dieses Satzes lassen sich nun nämlich (8.28) und (8.30) unter Berücksichtigung von (8.9), (8.26), (8.27) wegen den Voraussetzungen 2. und 3. von Satz 15 und wegen Rang $\left(\underset{\lambda_1}{A}_{\bar a}(0)\right) = m - 1$, d. h.

$$\left\| \underset{\lambda_1}{A}_1(0), \ldots, \underset{\lambda_1}{A}_{m-1}(0), 2 \underset{\lambda_1}{\overset{1}{X}}_0 \right\| \neq 0$$

lokal nach den $\underset{\lambda_\tau}{A}_{m \ldots m}$ $(\lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;\ 1 \leqq \tau \leqq \tau_0)$ auflösen. Wir erhalten auf diese Weise:

$$\underset{\lambda_\tau}{A}_{m \ldots m} = \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\Phi}} \left(\underset{\mu_1}{A}_{\bar a}, \underset{\mu_\sigma\mu_{\sigma+1}}{\overset{\sigma}{H}}_{\bar b}, \underset{\mu_\varrho}{\overset{\varrho}{\varphi}} \right) \tag{8.31}$$

$$(1 \leqq \bar a, \bar b \leqq m-1;\ 1 \leqq \tau \leqq \tau_0;\ 1 \leqq \sigma \leqq \tau_0 - 1;\ 2 \leqq \varrho \leqq \tau_0)$$

---

[31]) $\sum\limits_{(b,c)}$ ist hier als alternierende Summe erklärt.

[32]) Siehe [3], S. 39.

mit

$$\underset{\lambda_\tau}{A}_{m\dots m}(0) = \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{X}}{}_0\,,$$

wobei die $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\Phi}}$ im Punkt $\Big(\underset{\mu_1}{A}_{\bar a}(0),\ \underset{\mu_\sigma\mu_{\sigma+1}}{\overset{\sigma}{H}}{}_{\bar b}(0),\ \underset{\mu_\varrho}{\overset{\varrho}{\varphi}}(0)\Big)$ analytische Funktionen der angegebenen Argumente sind. Weiter können wir das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\lambda_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau}\underset{\lambda_1}{A}_{\bar a_1}\underset{\lambda_1\lambda_2}{\overset{1}{H}}{}_{\bar a_2}\cdots\underset{\lambda_{\tau-1}\lambda_\tau}{\overset{\tau-1}{H}}{}_{\bar a_\tau}\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}{}_m=\sum_{\lambda_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau}\underset{\lambda_1}{A}_m\underset{\lambda_1\lambda_2}{\overset{1}{H}}{}_{\bar a_1}\cdots\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}{}_{\bar a_\tau}$$

$$\sum_{\lambda_{\tau'}=1}^{d_{\tau'}}\cdots\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau}\underset{\lambda_{\tau'}}{A}_{m\dots m}\underset{\lambda_{\tau'}\lambda_{\tau'+1}}{\overset{\tau'}{H}}{}_{\bar a_{\tau'+1}}\cdots\underset{\lambda_{\tau-1}\lambda_\tau}{\overset{\tau-1}{H}}{}_{\bar a_\tau}\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}{}_m=\sum_{\lambda_{\tau'+1}=1}^{d_{\tau'+1}}\cdots\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau}\underset{\lambda_{\tau'+1}}{A}_{m\dots m}\underset{\lambda_{\tau'+1}\lambda_{\tau'+2}}{\overset{\tau'+1}{H}}{}_{\bar a_{\tau'+1}}\cdots\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}{}_{\bar a_\tau}$$

$$\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau}\underset{\lambda_\tau}{A}_{m\dots m}\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}{}_m=\underset{\lambda_{\tau+1}}{A}_{m\dots m}\tag{8.32}$$

$$(1\leqq\bar a_\tau\leqq\cdots\leqq\bar a_2\leqq\bar a_1\leqq m-1;\ 1\leqq\tau'\leqq\tau-1;\ 1\leqq\tau\leqq\tau_0-1)$$

wegen (8.17) und wegen der gleich zu beweisenden Beziehung

$$\Big\|\underset{\lambda_\tau}{A}_{(a_1,a_2,\dots,a_\tau)}(0)\Big\|\neq 0\text{[33]}\qquad(1\leqq\tau\leqq\tau_0-1)\tag{8.33}$$

lokal und eindeutig nach den Größen $\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}{}_m$ auflösen und haben dann nach Einsetzung von (8.31):

$$\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}{}_m=\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\Phi}}\Big(\underset{\mu_1}{A}_{\bar a},\ \underset{\mu_\sigma\mu_{\sigma+1}}{\overset{\sigma}{H}}{}_{\bar b},\ \underset{\mu_\varrho}{\overset{\varrho}{\varphi}}\Big).\tag{8.34}$$

$$(1\leqq\sigma,\tau\leqq\tau_0-1;\ 2\leqq\varrho\leqq\tau_0)$$

Hierbei sind wiederum die $\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\Phi}}$ im Punkt $\Big(\underset{\mu_1}{A}_{\bar a}(0),\ \underset{\mu_\sigma\mu_{\sigma+1}}{\overset{\sigma}{H}}{}_{\bar b}(0),\ \underset{\mu_\varrho}{\overset{\varrho}{\varphi}}(0)\Big)$ analytisch. Wir müssen jetzt noch den Beweis von (8.33) nachholen. Dazu beachten wir, daß nach (8.23) und (8.25) die $\underset{\lambda_{\tau'},\lambda_\tau}{B}{}_{\bar a_{\tau'+1}\dots\bar a_\tau}(0)$ in den rechts stehenden Indizes vollsymmetrisch sind und damit nach Voraussetzung 2. unseres Satzes und nach dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\overset{\tau}{\underset{1}{\varphi}}(0)\dots\overset{\tau}{\underset{d_\tau}{\varphi}}(0)=\Big\|\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{\overset{\tau}{V}}\Big(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}{}_0\Big)\Big\|=\|g^{a_1b_1}(0)\dots g^{a_\tau b_\tau}(0)\,\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1\dots a_\tau}(0)\,\underset{\mu_\tau}{A}_{b_1\dots b_\tau}(0)\|=$$
$$=\Big(\prod_{(a_1,a_2,\dots,a_\tau)}m(a_1,a_2,\dots,a_\tau)\Big)\|\underset{\lambda_\tau}{A}_{(a_1,a_2,\dots,a_\tau)}(0)\|\cdot\|\underset{\lambda_\tau}{A}{}^{(a_1,a_2,\dots a_\tau)}(0)\|$$
$$(2\leqq\tau\leqq\tau_0-1)$$

gilt, wenn wir mit $m(a_1,a_2,\dots,a_\tau)$ die Anzahl der verschiedenen Permutationen der Indizes $a_1,a_2,\dots,a_\tau$ und mit $\underset{\lambda_\tau}{A}{}^{a_1\dots a_\tau}(0)$ den Tensor $g^{a_1b_1}(0)\dots g^{a_\tau b_\tau}(0)\,\underset{\lambda_\tau}{A}_{b_1\dots b_\tau}(0)$ bezeichnen, während aus Voraussetzung 2. trivialerweise $\|\underset{\lambda_1}{A}_{a_1}(0)\|\neq 0$ folgt. Hiermit ist (8.33) vollständig bewiesen.

---

[33]) Hierbei durchlaufe $(a_1,a_2,\dots,a_\tau)$ alle $\binom{m+\tau-1}{\tau}$ Kombinationen von τ Zahlen zwischen 1 und m ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und mit Wiederholung.

Die Funktionen $\underset{\lambda_1}{A}_{\bar a}$, $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{H}}_{\bar a}$, $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{T}}_{\bar a}$, x^i, $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{n}}{}^{i}$ der gesuchten V_m lassen sich nun in der üblichen Weise durch Elimination von $\underset{\lambda_1}{A}_m$ und $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{H}}_m$ mittels Einsetzen von (8.31) und (8.34) in die Differentialgleichungen

$$\underset{\lambda_1}{\mathfrak{P}}_{\bar a m}=0,\quad \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\mathfrak{G}}}_{\bar a m}=0,\ \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{\mathfrak{H}}}_{\bar a m}=0\,(\lambda_\tau>\mu_\tau),\ \underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_m=0$$

gewinnen. Wir erhalten so wegen (8.21) und (8.25) das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \underset{\lambda_1}{A}_{\bar a}}{\partial p^m}=\Psi_1\left(\underset{\mu_1}{A}_{\bar b},\frac{\partial \underset{\mu_1}{A}_{\bar b}}{\partial p^{\bar a}},\ \overset{1}{\underset{\nu_1\chi_1}{T}}_{\bar d},\ \overset{1}{\underset{\nu_1\chi_1}{T}}_m\right)$$

$$\frac{\partial \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{H}}_{\bar a}}{\partial p^m}=\Psi_2\left(\underset{\mu_1}{A}_{\bar b},\frac{\partial \underset{\mu_1}{A}_{\bar b}}{\partial p^{\bar a}},\ \overset{\sigma}{\underset{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma+1}}{H}}_{\bar c},\ \frac{\partial \overset{\sigma}{\underset{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma+1}}{H}}_{\bar c}}{\partial p^{\bar a}},\ \overset{\varrho}{\underset{\nu_\varrho\chi_\varrho}{T}}_{\bar d},\ \overset{\varrho}{\underset{\nu_\varrho\chi_\varrho}{T}}_m,\ \overset{\pi}{\underset{\mu_\pi}{\varphi}},\ \frac{\partial \overset{\pi}{\underset{\mu_\pi}{\varphi}}}{\partial p^{\bar a}}\right)$$
$$(1\leqq\tau\leqq\tau_0-1)$$

$$\text{(8.35)}\qquad \frac{\partial \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{T}}_{\bar a}}{\partial p^m}=\Psi_3\left(\underset{\mu_1}{A}_{\bar b},\ \overset{\sigma}{\underset{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma+1}}{H}}_{\bar c},\ \overset{\varrho}{\underset{\nu_\varrho\chi_\varrho}{T}}_{\bar d},\ \overset{\varrho}{\underset{\nu_\varrho\chi_\varrho}{T}}_m,\ \overset{\pi}{\underset{\mu_\pi}{\varphi}},\ \frac{\partial \overset{\varrho}{\underset{\nu_\varrho\chi_\varrho}{T}}_m}{\partial p^{\bar a}}\right)\ (1\leqq\tau\leqq\tau_0,\ \lambda_\tau>\mu_\tau)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial p^m}=\Psi_4\left(\underset{\mu_1}{A}_{\bar b},\ \overset{1}{\underset{\lambda_1}{n}}{}^{i}\right)$$

$$\frac{\partial \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{n}}{}^{i}}{\partial p^m}=\Psi_5\left(\underset{\mu_1}{A}_{\bar b},\ \overset{\sigma}{\underset{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma+1}}{H}}_{\bar c},\ \overset{\varrho}{\underset{\lambda_\varrho}{n}}{}^{i},\ \overset{\varrho}{\underset{\nu_\varrho\chi_\varrho}{T}}_m,\ \overset{\pi}{\underset{\mu_\pi}{\varphi}}\right)\qquad (1\leqq\tau\leqq\tau_0+1)$$

$$(1\leqq\bar a,\bar b,\bar c,\bar d\leqq m-1;\quad 1\leqq\lambda_\tau,\mu_\tau,\nu_\tau,\chi_\tau\leqq d_\tau;\quad 1\leqq\sigma\leqq\tau_0-1;\quad 1\leqq\varrho\leqq\tau_0;\quad 2\leqq\pi\leqq\tau_0),$$

wobei Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4, Ψ_5 analytische Funktionen der angegebenen Argumente in den Punkten sind, welche als Koordinaten die Werte der Argumente für $p^a=0$ besitzen $\left(\text{dabei ist } \overset{\varrho}{\underset{\nu_\varrho\chi_\varrho}{T}}_m(0) \text{ als beliebig anzunehmen}\right)$. Setzt man in (8.35) noch

$$\overset{\varrho}{\underset{\nu_\varrho\chi_\varrho}{T}}_m=0,\quad \overset{\varrho}{\underset{\chi_\varrho\nu_\varrho}{T}}_{\bar d}=-\overset{\varrho}{\underset{\nu_\varrho\chi_\varrho}{T}}_{\bar d}\,(\nu_\varrho>\chi_\varrho)\ \text{ und }\ \overset{\pi}{\underset{\mu_\pi}{\varphi}}=\overset{\pi}{\underset{\mu_\pi}{\varphi}}(p^b)$$

ein, so nimmt dies Gleichungssystem die Normalform des Satzes von Cauchy-Kowalewski an. Es besteht also für das System zusammen mit den (im Nullpunkt) analytischen Anfangsbedingungen für $p^m=0$ genau eine im Nullpunkt analytische Lösung $\overset{\circ}{\underset{\lambda_1}{A}}_{\bar a}(p^b)$, $\overset{\tau}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{H}}}_{\bar a}(p^b)$, $\overset{\tau}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{T}}}_{\bar a}(p^b)\ (\lambda_\tau>\mu_\tau)$, $\overset{\circ}{x}{}^i(p^b)$, $\overset{\tau}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_\tau}{n}}}{}^{i}(p^b)$.

Diese Funktionen genügen zusammen mit $\overset{\tau}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{T}}}_m(p^b)=0$ und den durch Einsetzen von ihnen in (8.31) und (8.34) erhaltenen Funktionen $\overset{\circ}{\underset{\lambda_1}{A}}_m(p^b)$ und $\overset{\tau}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{H}}}_m(p^b)$, sowie mit

$$\overset{\tau}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_{\tau+1}\lambda_\tau}{H}}}_a(p^b)=-\overset{\tau}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{H}}}_a(p^b),\quad \overset{0}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_0\lambda_1}{H}}}_a(p^b)=\overset{\tau_0}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_{\tau_0}\lambda_{\tau_0+1}}{H}}}_a(p^b)=\overset{\tau_0+1}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}\lambda_{\tau_0+2}}{H}}}_a(p^b)=0,$$
$$\overset{\tau}{\overset{\circ}{\underset{\mu_\tau\lambda_\tau}{T}}}_a(p^b)=-\overset{\tau}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{T}}}_a(p^b),\quad \overset{\tau_0+1}{\overset{\circ}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}\mu_{\tau_0+1}}{T}}}_a(p^b)=0$$

den Gleichungen:

$$\underset{\alpha}{\mathring{\mathfrak{A}}}_m (p^b) = 0 \tag{8.36}$$

und

$$\underset{\lambda_1}{\mathring{\mathfrak{P}}}_{\bar{a} m}(p^b) = 0, \quad \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\mathring{\mathfrak{S}}}}_{\bar{a} m}(p^b) = 0, \quad \underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{\mathring{\mathfrak{H}}}}_{\bar{a} m}(p^b) = 0 \quad (1 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1), \tag{8.37}$$

wobei die letzten wegen der Schiefsymmetrie von $\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\overset{\tau}{\mathring{\mathfrak{H}}}}_{bc}$ sogar für beliebige λ_τ und μ_τ richtig sind. Außerdem gilt nach der Definition von $\underset{\lambda_1 \lambda_2}{\overset{1}{\mathring{H}}}_m (p^b)$ durch (8.32):

$$\underset{\lambda_1}{\mathring{\mathfrak{E}}}_{\bar{a} m}(p^b) = 0. \tag{8.38}$$

Definieren wir jetzt schließlich $\underset{\lambda_\tau}{\mathring{A}}_{m \ldots m}(p^b)$ durch

$$\underset{\lambda_\tau}{\mathring{A}}_{m \ldots m} (p^b) = \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\Phi}} \left(\underset{\mu_1}{\mathring{A}}_{\bar{a}} (p^b), \ \underset{\mu_\sigma \mu_{\sigma+1}}{\overset{\sigma}{\mathring{H}}}_{\bar{b}} (p^b), \underset{\mu_\varrho}{\overset{\varrho}{\varphi}} (p^b) \right) \tag{8.39}$$

[vgl. (8.31)!] und definieren wir $\underset{\lambda_\tau}{\mathring{A}}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\tau}(p^b)$ bzw. $\underset{\lambda_\tau}{\mathring{A}}_{m \ldots m \bar{a}_{\tau'+1} \ldots \bar{a}_\tau}(p^b)$ mittels $\underset{\lambda_\sigma}{\mathring{A}}_{m \ldots m}(p^b)$ durch (8.26), so finden wir wegen der Definition von $\underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\mathring{H}}}_m (p^b)$ nach (8.34) bzw. (8.32) für $\bar{a}_1 \geqq \bar{a}_2 \geqq \cdots \geqq \bar{a}_\tau$:

$$\sum_{\lambda_\tau = 1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau}{\mathring{A}}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\tau} \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\mathring{\mathfrak{F}}}}_{\bar{a} m} = \sum_{\lambda_{\tau+1} = 1}^{d_{\tau+1}} \underset{\lambda_{\tau+1}}{\mathring{A}}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\tau \bar{a}} \underset{\lambda_{\tau+1} \lambda_{\tau+2}}{\overset{\tau+1}{\mathring{H}}}_m - \underset{\lambda_{\tau+2}}{\mathring{A}}_{m \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\tau \bar{a}} \cong$$

$$\cong \sum_{\lambda_{\tau+1} = 1}^{d_{\tau+1}} \underset{\lambda_{\tau+1}}{\mathring{A}}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a} \ldots \bar{a}_\tau} \underset{\lambda_{\tau+1} \lambda_{\tau+2}}{\overset{\tau+1}{\mathring{H}}}_m - \underset{\lambda_{\tau+2}}{\mathring{A}}_{m \bar{a}_1 \ldots \bar{a} \ldots \bar{a}_\tau} \left(\operatorname{mod} \ \underset{\lambda_\sigma \lambda_{\sigma+1}}{\overset{\sigma}{\mathring{\mathfrak{F}}}}_{\bar{b} \bar{c}}, \underset{\lambda_1}{\mathring{\mathfrak{E}}}_{\bar{b} \bar{c}} \right)$$

$$\text{mit } \bar{a}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{a} \geqq \cdots \geqq \bar{a}_\tau.$$

Daraus folgt aber wegen $\sum_{\lambda_{\tau+1} = 1}^{d_{\tau+1}} \underset{\lambda_{\tau+1}}{\mathring{A}}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a} \ldots \bar{a}_\tau} \underset{\lambda_{\tau+1} \lambda_{\tau+2}}{\overset{\tau+1}{\mathring{H}}}_m = \underset{\lambda_{\tau+2}}{\mathring{A}}_{m \bar{a}_1 \ldots \bar{a} \ldots \bar{a}_\tau}$:

$$\sum_{\lambda_\tau = 1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau}{\mathring{A}}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\tau} \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\mathring{\mathfrak{F}}}}_{\bar{a} m} \cong 0 \left(\operatorname{mod} \ \underset{\lambda_\sigma \lambda_{\sigma+1}}{\overset{\sigma}{\mathring{\mathfrak{F}}}}_{\bar{b} \bar{c}}, \underset{\lambda_1}{\mathring{\mathfrak{E}}}_{\bar{b} \bar{c}} \right).$$

$$(1 \leqq \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\tau, \bar{b}, \bar{c} \leqq m - 1; \ \bar{a}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{a}_\tau; \ 1 \leqq \sigma, \tau \leqq \tau_0 - 2)$$

Entsprechend findet man:

$$\sum_{\lambda_\tau = 1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau}{\mathring{A}}_{m \ldots m \bar{a}_{\tau'+1} \ldots \bar{a}_\tau} \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\mathring{\mathfrak{F}}}}_{\bar{a} m} \cong 0 \left(\operatorname{mod} \ \underset{\lambda_\sigma \lambda_{\sigma+1}}{\overset{\sigma}{\mathring{\mathfrak{F}}}}_{\bar{b} \bar{c}} \right) \quad (\bar{a}_{\tau'+1} \geqq \cdots \geqq \bar{a}_\tau)$$

und

$$\sum_{\lambda_\tau = 1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau}{\mathring{A}}_{m \ldots m} \underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{\mathring{\mathfrak{F}}}}_{\bar{a} m} = 0 .$$

Aus diesen drei Beziehungen ergibt sich infolge von $\|\underset{\lambda_\tau}{\overset{\circ}{A}}_{(a_1,\ldots,a_\tau)}(0)\| \neq 0$ nach der Cramerschen Regel in einer Umgebung des Parameternullpunkts:

$$\underset{\lambda_\tau\,\lambda_{\tau+1}}{\overset{\overset{\tau}{\circ}}{\mathfrak{F}}}_{\bar{a}\,m} \cong 0 \left(\operatorname{mod} \underset{\lambda_\sigma\,\lambda_{\sigma+1}}{\overset{\overset{\sigma}{\circ}}{\mathfrak{F}}}_{\bar{b}\bar{c}},\ \underset{\lambda_1}{\overset{\circ}{\mathfrak{E}}}_{\bar{b}\bar{c}}\right). \tag{8.40}$$

$$(1 \leqq \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \leqq m-1;\ 1 \leqq \sigma, \tau \leqq \tau_0 + 1)$$

Jetzt können wir in bekannter Weise aus (8.22), (8.23), (8.24), (8.37), (8.38) und (8.40) auf die Gültigkeit der Beziehung

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{\bar{a}\,m}(p^b) \cong 0 \left(\operatorname{mod} \underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathfrak{Z}}}_{\bar{b}\,\bar{c}}(p^b)\right)$$

schließen, aus welcher nach § 2, Hilfssatz 2 d) zusammen mit (8.36) und den wegen (8.29) geltenden Beziehungen $\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{A}}}_{\bar{a}}(p^{\bar{b}}, 0)$

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathfrak{A}}}_a(p^b) = 0$$

resultiert. Die durch $x^i = \overset{\circ}{x}{}^i(p^b)$ definierte V_m im E_n erweist sich also als eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, die wegen (8.29) für $p^m = 0$ durch Γ geht, wegen (8.39) d. h. (8.28) die p^b als auf Γ bezogene, geodätische Parallelkoordinaten besitzt, und für welche nach (8.39) die Bedingung (8.30) und die damit [wegen (8.16)!] äquivalenten Gleichungen (8.20) gelten. Diese V_m ist also in der Tat eine Mannigfaltigkeit der in Satz 15 geforderten Art. w.z.b.w.

Die Voraussetzung 1. von Satz 15 bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da natürlich im allgemeinen für eine V_m im E_n $d_\tau = \binom{m+\tau-1}{\tau}$ für $1 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1$ zutrifft. Sie ist für den eben bewiesenen Satz notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei $n = 4$, $m = 2$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$. Der Streifen Γ werde durch $\mathfrak{x}(p^1) = \{\cos p^1, \sin p^1, 0, 0\}$ und $\underset{1}{\overset{1}{\mathfrak{n}}}(p^1) = \{-\sin p^1, \cos p^1, 0, 0\}$, $\underset{2}{\overset{1}{\mathfrak{n}}}(p^1) = \{0, 0, 1, 0\}$, $\underset{1}{\overset{2}{\mathfrak{n}}}(p^1) = \{-\cos p^1, -\sin p^1, 0, 0\}$, $\underset{1}{\overset{3}{\mathfrak{n}}}(p^1) = \{0, 0, 0, 1\}$ definiert; es gilt also $\underset{1}{A}_1(0) = 1$, $\underset{2}{A}_1(0) = 0$, $\underset{11}{\overset{1}{H}}_1(0) = 1$, $\underset{21}{\overset{1}{H}}_1(0) = 0$, $\underset{11}{\overset{2}{H}}_1(0) = 0$. Setzen wir weiter $\underset{1}{\overset{2}{\varphi}}(p^1, p^2) = 2$, $\underset{1}{\overset{3}{\varphi}}(p^1, p^2) = 1$, so sind für Γ und diese Funktionen die Voraussetzungen 2. und 3. von Satz 15 erfüllt $\left(\underset{1}{A}_2(0) = 0,\ \underset{2}{A}_2(0) = \pm 1,\ \underset{1}{A}_{22}(0) = \pm 1,\ \underset{1}{A}_{222}(0) = \pm 1\right)$. Trotzdem existiert keine V_2, die für $p^2 = 0$ durch Γ geht und in geodätischen Parallelkoordinaten die natürlichen Gleichungen $\underset{1}{\overset{2}{E}} = 2$, $\underset{1}{\overset{3}{E}} = 1$ besitzt, da die Gleichungen (8.32) zusammen bei unserem Beispiel widerspruchsvoll werden.

Ebenfalls ist Voraussetzung 2. für Satz 15 notwendig. So gibt es z. B. keine V_2 im E_3, deren Invariante $\underset{1}{\overset{2}{E}} = \left(\frac{1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2}\right)^2$ [vgl. (8.15)] kleiner als das Quadrat der Normalkrümmung b eines auf ihr liegenden Streifens Γ ist, so daß also die Funktionen φ und Γ nicht völlig unabhängig voneinander vorgegeben werden können. Auch existiert keine Fläche, bei welcher im Null-

punkt die geodätische Windung a von Γ Null ist sowie $(b(0))^2 = \overset{2}{\underset{1}{E}}(0)$ gilt und bei welcher außerdem für die übrigen Punkte von Γ $(b)^2$ größer als $\overset{2}{\underset{1}{E}}$ ist, obwohl die Voraussetzung 2. von Satz 15 hier zutrifft $\left(\overset{2}{\underset{1}{V}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\tau_0}{X}}\right) = (b(0))^2 + \left(\overset{2}{\underset{1}{X}}\right)^2;\ \overset{2}{\underset{1}{X}}_0 = 0\right)$. Der Grund dafür liegt darin, daß die Voraussetzung 3. von Satz 15 für dieses Beispiel nicht gilt. Diese Voraussetzung ist somit auch als wesentlich erkannt.

Es fragt sich nun, ob die Invarianten $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ einer V_m im E_n selbst unabhängig voneinander sind. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 16.

Vor.: Es seien $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(p^a)$ beliebige, positive, im Nullpunkt analytische Funktionen $\left(\lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;\ 2 \leqq \tau \leqq \tau_0;\ \sum_{\tau=2}^{\tau_0} d_\tau \leqq n - m\right)$; welche lediglich noch den Bedingungen

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0) < \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{\varphi}}(0) \quad \textit{für} \quad \lambda_\tau < \mu_\tau \tag{8.41}$$

und

$$d_\tau = \binom{m+\tau-1}{\tau} \ \textit{für}\ 2 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1 \ \textit{sowie}\ d_{\tau_0} \leqq \binom{m+\tau_0-1}{\tau_0} \tag{8.42}$$

unterworfen seien.

Beh.: Dann existiert (mindestens) eine im Nullpunkt analytische V_m im E_n, für deren Invarianten $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ als Funktionen geeigneter Parameter p^a die Beziehungen

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(p^a) = \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(p^a) \qquad (2 \leqq \tau \leqq \tau_0)$$

richtig sind. Das System der nichttrivialen, nichtverschwindenden Invarianten $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ einer V_m ist also unabhängig.

Beweis. Wir wollen diesen Satz durch Anwendung von Satz 15 beweisen und müssen zu diesem Zweck einen Streifen Γ konstruieren, für welchen zusammen mit den vorgegebenen Funktionen $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}$ die Voraussetzungen 2. und 3. von Satz 15 erfüllt sind. Dies geschehe folgendermaßen: Es sei $\mathfrak{v}_{(a_1,\ldots,a_\tau)} = \{\underset{\lambda'_\tau}{v}_{(a_1,\ldots,a_\tau)}\}$ für jedes τ mit $2 \leqq \tau \leqq \tau_0$ ein System von $\binom{m+\tau-1}{\tau}$ paarweise orthogonalen, normierten Einheitsvektoren $\left(\lambda'_\tau = 1, 2, \ldots, \binom{m+\tau-1}{\tau}\right)$; $(a_1, \ldots, a_\tau)$ durchlaufe alle Kombinationen von natürlichen Zahlen $a_1, \ldots, a_\tau$ mit $m \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_\tau \geqq 1$), welches der Bedingung

$$\underset{\lambda'_\tau}{v}_{(m,\ldots,m)} \neq 0 \ \text{für jedes}\ \lambda'_\tau \tag{8.43}$$

genügt. Ein derartiges System von Vektoren läßt sich, ausgehend von $\mathfrak{v}_{(m,\ldots,m)}$, immer finden. Für die Vektoren $\mathfrak{v}_{(a_1,\ldots,a_\tau)}$ gilt

$$\mathfrak{v}_{(a_1,\ldots,a_\tau)}\,\mathfrak{v}_{(b_1,\ldots,b_\tau)} = \delta^{(b_1,\ldots,b_\tau)}_{(a_1,\ldots,a_\tau)}$$

und damit auch

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_\tau)} \underset{\lambda_\tau}{v}_{(a_1,\ldots,a_\tau)} \underset{\mu_\tau}{v}_{(a_1,\ldots,a_\tau)} = \delta^{\mu_\tau}_{\lambda_\tau} \qquad (2 \leqq \tau \leqq \tau_0). \tag{8.44}$$

Wir definieren nun die vollsymmetrischen Größen $\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1\ldots a_\tau}(0)$ der gesuchten V_m durch:

$$\underset{\lambda_1}{A}_{a_1}(0) = \delta^{a_1}_{\lambda_1}$$

und

$$\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1\ldots a_\tau}(0) = \frac{\sqrt{\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\varphi}}(0)}}{\sqrt{m(a_1,\ldots,a_\tau)}} \underset{\lambda_\tau}{v}_{(a_1,\ldots,a_\tau)} \tag{8.45}$$

$$(a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_\tau;\ 1 \leqq \lambda_\tau \leqq d_\tau;\ 2 \leqq \tau \leqq \tau_0),$$

wobei wieder mit $m(a_1,\ldots,a_\tau)$ die Anzahl der verschiedenen Permutationen der Indizes der Kombination $(a_1,\ldots,a_\tau)$ bezeichnet sei. Dann wird nach (8.43), (8.45) und (8.44):

$$\underset{\lambda_\tau}{A}_{m\ldots m}(0) \neq 0, \tag{8.46}$$

$$g_{ab}(0) = \delta^b_a$$

und damit

$$\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{\overset{\tau}{W}}(0) = \sum_{a_1,\ldots,a_\tau=1}^{m} \underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1\ldots a_\tau}(0) \underset{\mu_\tau}{A}_{a_1\ldots a_\tau}(0) = \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\varphi}}(0)\, \delta^{\mu_\tau}_{\lambda_\tau} \quad (2 \leqq \tau \leqq \tau_0). \tag{8.47}$$

Die Konstruktion von Γ erfolgt jetzt schrittweise auf den Parameterbereichen $(0,\ldots,0)$, $(p^1, 0\ldots 0)$, $(p^1, p^2, 0\ldots 0)$ usw., indem für diese Bereiche die Γ bestimmenden Funktionen x^i, $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{n}}}{}^i$ $\left(\lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;\ 1 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1;\ d_1 = m;\ d_{\tau_0+1} = n - m - \sum_{\tau=2}^{\tau_0} d_\tau\right)$ nacheinander konstruiert werden. Man geht dabei von einem beliebigen Vektor $\mathfrak{x}(0)$ und einem beliebigen Orthonormalsystem $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{n}}}(0)$ $(1 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1)$ aus. Denkt man sich etwa schon $\mathfrak{x}(p^{b''}, 0)$ und $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{n}}}(p^{b''}, 0)$ so bestimmt, daß

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_{a''}(p^{b''}, 0) = 0 \quad (1 \leqq a'', b'' \leqq m' - 1;\ 1 \leqq m' \leqq m - 1)$$

gilt, so wird $\mathfrak{x}$ und $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{\mathfrak{n}}}$ analog wie beim Beweis von Satz 15 durch Elimination von $\underset{\lambda_1}{A}_{m'}$, $\underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_{m'}$ und $\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{\overset{\tau}{T}}_{m'}$ aus dem System der algebraischen Gleichungen

$$\underset{\lambda_1}{A}_{m'} = \underset{\lambda_1}{A}_{m'}(0),$$

$$\sum_{\lambda_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_1}{A}_{a_1''} \underset{\lambda_1\lambda_2}{\overset{1}{H}}_{a_2''} \cdots \underset{\lambda_{\tau-1}\lambda_\tau}{\overset{\tau-1}{H}}_{a_\tau''} \underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_{m'} = \sum_{\lambda_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_1}{A}_{m'}(0) \underset{\lambda_1\lambda_2}{\overset{1}{H}}_{a_1''} \cdots \underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_{a_\tau''}$$

$$\sum_{\lambda_{\tau'}=1}^{d_{\tau'}}\cdots\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_{\tau'}}{A}_{\bar a_1\ldots\bar a_{\tau'}}(0) \underset{\lambda_{\tau'}\lambda_{\tau'+1}}{\overset{\tau'}{H}}_{a_{\tau'+1}''} \cdots \underset{\lambda_{\tau-1}\lambda_\tau}{\overset{\tau-1}{H}}_{a_\tau''} \underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_{m'} =$$

$$= \sum_{\lambda_{\tau'+1}=1}^{d_{\tau'+1}}\cdots\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_{\tau'+1}}{A}_{\bar a_1\ldots\bar a_{\tau'} m'}(0) \underset{\lambda_{\tau'+1}\lambda_{\tau'+1}}{\overset{\tau'+1}{H}}_{a_{\tau'+1}''} \cdots \underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_{a_\tau''}$$

$$\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau}{A}_{\bar a_1\ldots\bar a_\tau}(0) \underset{\lambda_\tau\lambda_{\tau+1}}{\overset{\tau}{H}}_{m'} = \underset{\lambda_{\tau+1}}{A}_{\bar a_1\ldots\bar a_\tau m'}(0)$$

$$(m \geqq \bar a_1 \geqq \cdots \geqq \bar a_\tau \geqq m';\ m' - 1 \geqq a_1'' \geqq \cdots \geqq a_\tau'' \geqq 1;\ 1 \leqq \tau' \leqq \tau - 1;\ 1 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1),$$

und der Differentialgleichungen
$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{T}}{}_{m'} = 0 \qquad (1 \leqq \tau \leqq \tau_0),$$

$$\underset{\lambda_1}{\mathfrak{D}}{}_{a''m'} = 0, \quad \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\mathfrak{G}}}{}_{a''m'} = 0, \quad \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\mathfrak{H}}}{}_{a''m'} = 0 \, (\lambda_\tau > \mu_\tau), \underset{\alpha}{\mathfrak{A}}{}_{m'} = 0$$

mit Hilfe des Satzes von Cauchy-Kowalewski auf den Parameterbereich $(p^1, \ldots, p^{m'}, 0 \ldots 0)$ ausgedehnt. Die Elimination von $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{H}}{}_{m'}$ ist hier wegen (8.42) sowie der aus (8.45) folgenden Beziehung $\|\underset{\lambda_1}{A}{}_{a_1}(0)\| = 1$ und wegen

$$\left(\|\underset{\lambda_\tau}{A}{}_{(a_1, \ldots, a_\tau)}(0)\|\right)^2 \prod_{(a_1, \ldots, a_\tau)} m(a_1, \ldots, a_\tau) = \prod_{\lambda_\tau = 1}^{d_\tau} \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0) \neq 0 \quad (2 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1)$$

möglich. Für die so definierten $\mathfrak{x}(p^{b'}, 0)$ und $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\mathfrak{n}}}(p^{b'}, 0)$ gilt dann $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}{}_{m'}(p^{b'}, 0) = 0$ und (nach einer Beweisführung ähnlich derjenigen von S. 227)

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{J}}{}_{a''m'}(p^{b'}, 0) \cong 0 \left(\operatorname{mod} \underset{\alpha}{\mathfrak{J}}{}_{b''c''}(p^{b'}, 0)\right) \quad (1 \leqq a'', b'', c'' \leqq m' - 1),$$

d. h. es gilt nach § 2, Hilfssatz 2 d) auch

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}{}_{a'}(p^{b'}, 0) = 0. \qquad (1 \leqq a', b' \leqq m')$$

Auf diese Weise fortfahrend gelangt man schließlich zu Funktionen $\mathfrak{x}(p^{\bar{b}})$, $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\mathfrak{n}}}(p^{\bar{b}})$ $(1 \leqq \bar{b} \leqq m - 1)$, welche einen Streifen Γ bilden, für den zusammen mit den Größen $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0)$ wegen (8.47) die Voraussetzung 2. von Satz 15 erfüllt ist, wenn man $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{X}}{}_0 = \underset{\lambda_\tau}{A}{}_{m \ldots m}(0)$ setzt $(1 \leqq \tau \leqq \tau_0)$. Es ist nämlich:

$$\sum_{\lambda_1 = 1}^{m} \underset{\lambda_1}{A}{}_{\bar{a}}(0) \overset{1}{\underset{\lambda_1}{X}}{}_0 = 0, \quad \sum_{\lambda_1 = 1}^{m} \left(\overset{1}{\underset{\lambda_1}{X}}{}_0\right)^2 = 1$$

und

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{V}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}{}_0\right) = \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{W}}(0) = \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0)\, \delta_{\lambda_\tau}^{\mu_\tau}. \quad (1 \leqq \sigma \leqq \tau;\ 2 \leqq \tau \leqq \tau_0) \tag{8.48}$$

Um den Beweis von Satz 16 zu vollenden, muß jetzt nur noch gezeigt werden, daß Γ und die $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}$ auch der Voraussetzung 3. von Satz 15 genügen. Zu diesem Zwecke beachte man, daß aus der Definition (8.18) der Funktionen $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{V}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}\right)$:

$$\frac{\partial \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \lambda_\tau}{V}}}{\partial \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X}}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}{}_0\right) = 2 \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{X}}{}_0\, \delta_{\lambda_\tau}^{\mu_\tau} \quad (1 \leqq \sigma \leqq \tau;\ 2 \leqq \tau \leqq \tau_0) \tag{8.49}$$

folgt. Nun ist die Voraussetzung 3. von Satz 15 gleichbedeutend mit der linearen Unabhängigkeit der Polynome[34])

$$\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{P}}(y) = \sum_{\lambda_\tau = 1}^{d_\tau} (-1)^{\lambda_\tau} \frac{\partial \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{I}}}{\partial \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X}}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}{}_0\right)(y)^{d_\tau - \lambda_\tau} \qquad (1 \leqq \mu_\tau \leqq d_\tau).$$

---

[34]) Wir bezeichnen eine endliche Zahl von Polynomen als linear abhängig, wenn eine Linearkombination von ihnen mit konstanten Koeffizienten, die nicht sämtlich Null sind, identisch verschwindet. Anderenfalls nennen wir die Polynome linear unabhängig.

Die so definierten $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{P}}(y)$ lassen sich aber auf Grund der Identität (8.19) unter Benutzung von (8.48) und (8.49) folgendermaßen umformen:

$$\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{P}}(y) = \frac{\partial}{\partial \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X}}}\left((y)^{d_\tau} + \sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau}(-1)^{\lambda_\tau}\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{I}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}\right)(y)^{d_\tau-\lambda_\tau}\right)\Bigg|_{\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}=\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X_0}}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X}}}\left(\left\| y\,\delta^{\mu_\tau}_{\lambda_\tau} - \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{V}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}\right)\right\|\right)\Bigg|_{\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}=\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X_0}}} = -2\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X_0}}\prod_{\substack{\lambda_\tau=1\\ \lambda_\tau\neq\mu_\tau}}^{d_\tau}\left(y - \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0)\right).$$

Sie sind also dann und nur dann linear unabhängig; d. h. es ist dann und nur dann

$$\left\|\frac{\partial \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{I}}}{\partial \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X}}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X_0}}\right)\right\| \neq 0,$$

wenn für jedes feste τ alle Werte $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0)$ voneinander verschieden und außerdem alle $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X_0}}$ von Null verschieden sind. Ist dies nämlich der Fall, so gilt:

$$\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{P}}\left(\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0)\right) = \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{p}}\,\delta^{\lambda_\tau}_{\mu_\tau} \text{ mit } \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{p}} \neq 0,$$

d. h. die Polynome $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{P}}(y)$ können nicht linear abhängig sein (da dies sonst auch die Vektoren $\left\{\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{P}}\left(\overset{\tau}{\underset{1}{\varphi}}(0)\right), \ldots, \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{P}}\left(\overset{\tau}{\underset{d_\tau}{\varphi}}(0)\right)\right\}$ wären!); während umgekehrt aus einer Gleichheit zweier $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0)$ die lineare Abhängigkeit zweier $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{P}}(y)$ und aus dem Verschwinden eines $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X_0}}$ das identische Verschwinden von dem entsprechenden $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{P}}(y)$, d. h. in jedem Falle die lineare Abhängigkeit aller $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{P}}(y)$ folgte. Wegen $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X_0}} = \overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{A}}_{m\ldots m}(0) \neq 0$ für $2 \leq \tau \leq \tau_0$ [(8.46)!] und (8.41) ist somit neben den Voraussetzungen 1. und 2. auch die Voraussetzung 3. von Satz 15 erfüllt, und es existiert demzufolge eine V_m im E_n mit

$$\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(p^a) = \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(p^a).$$

w.z.b.w.

Wir kommen nun auf Satz 15 zurück und wollen insbesondere untersuchen, wieviele Mannigfaltigkeiten V_m in geodätischen Parallelkoordinaten durch Γ gehen und der Gleichung (8.20) genügen. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst:

Satz 17.

Vor.: Es seien $\underset{(1)}{\mathfrak{x}}(p^a)$ und $\underset{(2)}{\mathfrak{x}}(p^a)$ zwei im Nullpunkt analytische, m-dimensionale Mannigfaltigkeiten im E_n mit den Invarianten $_{(1)}\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(p^a)$ und $_{(2)}\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(p^a)$ $(\lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;\ 2 \leqq \tau \leqq \tau_0)$, welche beide für $p^m = 0$ durch denselben $(m-1)$-dimensionalen Streifen $\{\mathfrak{x}(p^{\bar{a}}), \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\mathfrak{n}}}(p^{\bar{a}})\}$ $(1 \leqq \bar{a} \leqq m-1;\ 1 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1)$ gehen, die die p^a als auf Γ bezogene, geodätische Parallelkoordinaten besitzen und für welche

$$(8.50)\qquad {}_{(1)}\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(p^a) = {}_{(2)}\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(p^a) \qquad (2 \leqq \tau \leqq \tau_0)$$

gilt. Außerdem setzen wir noch zusätzlich

$$(8.51)\qquad \frac{\partial^\tau \underset{(1)}{\mathfrak{x}}}{(\partial p^m)^\tau}(0) = \frac{\partial^\tau \underset{(2)}{\mathfrak{x}}}{(\partial p^m)^\tau}(0)^{35)} \qquad (1 \leqq \tau \leqq \tau_0)$$

sowie analog wie bei Satz 15

$$(8.52)\qquad {}_{(1)}\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(0) < {}_{(1)}\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{E}}(0) \text{ für } \lambda_\tau < \mu_\tau \qquad (2 \leqq \tau \leqq \tau_0)$$

und

$$(8.53)\qquad d_\tau = \binom{m+\tau-1}{\tau} \text{ für } 1 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1$$

voraus.

Beh.: Dann ist im allgemeinen $\underset{(1)}{\mathfrak{x}}(p^a) = \underset{(2)}{\mathfrak{x}}(p^a)$. Das System der nichttrivialen, nichtverschwindenden Invarianten $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ einer V_m kann also auch als (in einem gewissen Sinne) vollständig bezeichnet werden[36]).

Beweis. Wegen (8.51) gilt zunächst

$$_{(1)}\underset{\lambda_\tau}{A}{}_{m\ldots m}(0) = {}_{(2)}\underset{\lambda_\tau}{A}{}_{m\ldots m}(0) \quad (\lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;\ 1 \leqq \tau \leqq \tau_0).$$

Setzen wir nun $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{X_0}} = {}_{(1)}\underset{\lambda_\tau}{A}{}_{m\ldots m}(0)$ und $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(p^a) = {}_{(1)}\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(p^a)$, so ist für die durch (8.18) einheitlich für beide Mannigfaltigkeiten definierte Matrix $\left(\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{V}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}\right)\right)$ die Voraussetzung 2. von Satz 15 erfüllt. Im allgemeinen wird auch die Voraussetzung 3. von Satz 15 erfüllt sein, und wir wollen jetzt dies ausdrücklich voraussetzen.

Dann lassen die Bedingungen (8.28) und (8.30), wie wir auf S. 224 gesehen haben, die für $\underset{(1)}{\mathfrak{x}}$ und $\underset{(2)}{\mathfrak{x}}$ gleiche Auflösung (8.31) zu, aus welcher sich wegen

[35]) Daß diese Voraussetzung wirklich notwendig ist, werden wir im Anschluß an den Beweis dieses Satzes ausführlich darlegen.

[36]) Die Vollständigkeit der $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ bezieht sich auf spezielle Koordinaten und die Einschränkung (8.51), welche, da sie nur für einen Punkt gilt, in diesem Zusammenhang nicht wesentlich ist. Eine Vollständigkeit der $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ in bezug auf allgemeine Parameter kann nicht erwartet werden, da ja nur $n - m$ nichttriviale $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ vorhanden sind.

(8.53), sowie (8.32) und (8.33) die ebenfalls für beide Mannigfaltigkeiten gültige Darstellung (8.34) ergibt. Nun kann man aber die Basisvektoren der Normalenräume von $\underset{(1)}{\mathfrak{x}}$ und $\underset{(2)}{\mathfrak{x}}$ nach dem Muster des Beweises von §3, Satz 2 so normieren, daß

$$(8.54) \qquad {}_{(1)}\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{T}}{}_m(p^a) = {}_{(2)}\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{T}}{}_m(p^a) = 0$$

wird und daß die normierten Basisvektoren auf dem Streifen mit den ursprünglichen Basisvektoren übereinstimmen. Durch diese Normierung wird das vorher Gesagte nicht berührt, da in der Definition der $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ die Größen $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{T}}{}_a$ nicht auftreten; (8.34) gilt also auch in bezug auf die normierten Basisvektoren. Durch Elimination der $\underset{\lambda_1}{A}{}_m$ und $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{H}}{}_m$ aus (8.31) bzw. (8.34) und den für $\underset{(1)}{\mathfrak{x}}$ und $\underset{(2)}{\mathfrak{x}}$ gleichermaßen gültigen Differentialgleichungen

$$\underset{\lambda_1}{\mathfrak{P}}{}_{\bar{a}m} = 0, \quad \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \lambda_{\tau+1}}{\mathfrak{S}}}{}_{\bar{a}m} = 0, \quad \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau \mu_\tau}{\mathfrak{H}}}{}_{\bar{a}m} = 0 \, (\lambda_\tau > \mu_\tau), \quad \underset{\alpha}{\mathfrak{A}}{}_m = 0$$

ergibt sich unter Berücksichtigung von (8.54) und der aus (8.52) folgenden Analytizität von $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(p^a)$ das für beide Mannigfaltigkeiten gleiche Cauchy-Kowalewskische System (8.35) mit für $\underset{(1)}{\mathfrak{x}}$ und $\underset{(2)}{\mathfrak{x}}$ gleichen Anfangsbedingungen. Hieraus folgt wegen der Eindeutigkeit einer analytischen Lösung von (8.35) aber schon die Behauptung

$$\underset{(1)}{\mathfrak{x}}(p^a) = \underset{(2)}{\mathfrak{x}}(p^a).$$

w.z.b.w.

Satz 15 und Satz 17 gestatten es uns, die Beziehungen $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}(p^a) = \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(p^a)$ $(2 \leq \tau \leq \tau_0)$ im Falle $d_\tau = \binom{m+\tau-1}{\tau}$ $(1 \leq \tau \leq \tau_0 - 1)$ als die natürlichen Gleichungen einer (analytischen) m-dimensionalen Mannigfaltigkeit V_m im n-dimensionalen euklidischen Raum anzusprechen. Allerdings ist eine solche Mannigfaltigkeit im Gegensatz zu einer Hyperfläche (Satz 10!) nicht allein durch ihre natürlichen Gleichungen und einen $(m-1)$-dimensionalen Streifen eindeutig bestimmt, sondern wir müssen dazu noch etwas mehr, nämlich (8.51) voraussetzen. Hierbei stellt sich nun die Frage: Wie viele Mannigfaltigkeiten V_m mit vorgegebenen natürlichen Gleichungen gehen durch einen vorgegebenen $(m-1)$-dimensionalen Streifen Γ? Satz 15 lehrt zunächst, daß für die Existenz einer durch Γ gehenden V_m mit gegebenen natürlichen Gleichungen die Existenz einer reellen Lösung $\underset{r_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}{}_0 (1 \leq \sigma \leq \tau_0)$ des Gleichungssystems:

$$(8.55) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\lambda_1=1}^{m} \underset{\lambda_1}{A}{}_{\bar{a}}(0) \underset{\lambda_1}{\overset{1}{X}} = 0, \quad \sum_{\lambda_1=1}^{m} \Bigl(\underset{\lambda_1}{\overset{1}{X}}\Bigr)^2 = 1 \qquad (1 \leq \bar{a} \leq m-1), \\ &\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{I}}\Bigl(\underset{r_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\Bigr) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{\lambda_\tau} \leq d_\tau} \overset{\tau}{\underset{i_1}{\varphi}}(0) \overset{\tau}{\underset{i_2}{\varphi}}(0) \ldots \overset{\tau}{\underset{i_{\lambda_\tau}}{\varphi}}(0) \qquad (2 \leq \tau \leq \tau_0) \end{aligned}$$

notwendig und im allgemeinen, d. h. unter der Zusatzvoraussetzung:

$$\left\| \frac{\partial \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}}{\partial \underset{\mu_\tau}{\overset{\tau}{X}}} \left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}{}_0 \right) \right\| \neq 0 \tag{8.56}$$

auch hinreichend ist. Aus Satz 17 kommt hinzu, daß eine durch Γ gehende V_m mit gegebenen natürlichen Gleichungen durch die Lösung $\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}{}_0 = \underset{\nu_\sigma}{A}{}_{m \ldots m}(0)$ des vorigen Gleichungssystems im allgemeinen (d. h. wieder unter der angegebenen Zusatzvoraussetzung (8.56)) eindeutig bestimmt ist. Dies können wir wie folgt zusammenfassen: Im allgemeinen ist die Zahl der in Frage kommenden V_m gleich der Zahl der reellen Lösungen der Gleichungen (8.55), die der Nebenbedingung (8.56) genügen. Was läßt sich aber über diese Zahl aussagen?

Zunächst ist das System (8.55) ein System von $m + d_2 + \cdots + d_{\tau_0} = n - d_{\tau_0+1}$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Diese Gleichungen sind algebraisch und (für $\tau \geqq 2$) jeweils vom höchsten Grade 2 in den $\underset{\mu_\tau}{\overset{\tau}{X}}$, wie aus der Definition von $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\right)$ durch (8.18) und (8.19) und aus der Tatsache folgt, daß die Matrix $\left(\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{X}}\,\underset{\mu_\tau}{\overset{\tau}{X}}\right)$ den Maximalrang 1 besitzt. Es existieren im allgemeinen höchstens $2^{1+d_2+\cdots+d_{\tau_0}} = 2^{n-d_{\tau_0+1}-m+1}$ reelle Lösungen des Systems (8.55), wie die vollständige Induktion nach τ ergibt. Nehmen wir nämlich an, die Gleichungen für $\tau = 1, 2, \ldots, \bar{\tau} - 1$ von (8.55) besäßen höchstens $2^{1+d_2+\cdots+d_{\bar{\tau}-1}}$ reelle Lösungen $\underset{\nu_{\bar{\sigma}}}{\overset{\bar{\sigma}}{X}}{}_0$ $(\bar{\sigma} = 1, 2, \ldots, \bar{\tau} - 1)$, so stellt (8.55) für $\tau = \bar{\tau}$ und irgendeine dieser Lösungen $\underset{\nu_{\bar{\sigma}}}{\overset{\bar{\sigma}}{X}}{}_0$ ein System von $d_{\bar{\tau}}$ Gleichungen zweiten Grades in den $d_{\bar{\tau}}$ Unbekannten $\underset{\lambda_{\bar{\tau}}}{\overset{\bar{\tau}}{X}}$ dar $(2 \leqq \bar{\tau} \leqq \tau_0)$. Dieses besitzt aber nach dem Satz von Bézout[37]) im allgemeinen höchstens $2^{d_{\bar{\tau}}}$ reelle Lösungen, so daß allgemein von den Gleichungen für $\tau = 1, 2, \ldots, \bar{\tau}$ im ganzen höchstens $2^{1+d_2+\cdots+d_{\bar{\tau}}}$ reelle Lösungen vorhanden sein können.

Andererseits kann man in dem Falle, daß (8.55) überhaupt eine reelle Lösung $\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}{}_0$ hat, welche auch (8.56) genügt, folgende Aussage über die Mindestlösungsanzahl machen: Mit $\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}{}_0$ ist auch $\varepsilon_\sigma \underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}{}_0$ $(\varepsilon_\sigma = \pm 1;\ \nu_\sigma = 1, 2, \ldots, d_\sigma;\ 1 \leqq \sigma \leqq \tau_0)$ eine Lösung von (8.55), die (8.56) erfüllt. Man rechnet nämlich aus der Definition von $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\right)$ sofort $\underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}\left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\right) = \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}\left(\varepsilon_\sigma \underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}\right)$ nach, was

$$\left\| \frac{\partial \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}}{\partial \underset{\mu_\tau}{\overset{\tau}{X}}} \left(\varepsilon_\sigma \underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}{}_0 \right) \right\| = (\varepsilon_\tau)^{d_\tau} \left\| \frac{\partial \underset{\lambda_\tau}{\overset{\tau}{I}}}{\partial \underset{\mu_\tau}{\overset{\tau}{X}}} \left(\underset{\nu_\sigma}{\overset{\sigma}{X}}{}_0 \right) \right\| \neq 0$$

---

[37]) Siehe [17], S. 22.

zur Folge hat. Da $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{J}}\left(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X}}\right)$ ein Polynom in den $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X}}$ ist und keine in den $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X}}$ linearen Glieder enthält, folgt weiter aus (8.56), daß für jedes $\tau > 1$ nicht alle $\overset{\tau}{\underset{\mu_\tau}{X_0}}$ Null sein können, während dies nach (8.55) auch für die $\overset{1}{\underset{\mu_1}{X_0}}$ der Fall ist. Wir können damit zusammenfassend feststellen als

Korollar zu Satz 15 und Satz 17: Durch einen vorgegebenen, analytischen, $(m-1)$-dimensionalen Streifen Γ mit $d_\tau = \binom{m+\tau-1}{\tau}$ $(1 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1)$ und $d_{\tau_0} \leqq \binom{m+\tau_0-1}{\tau_0}$ gehen für $p^m = 0$ im allgemeinen keine, oder mindestens 2^{τ_0} bis höchstens $2^{n-m-d_{\tau_0+1}+1}$ reelle, m-dimensionale, analytische Mannigfaltigkeiten mit vorgeschriebenen natürlichen Gleichungen.

Im Falle einer Kurve $\mathfrak{x}(s)$ im E_n (s = Bogenlänge!) ist $m = 1$ und $\tau_0 + d_{\tau_0+1} = n$. Hier fällt also die Minimalzahl des Korollars mit der Maximalzahl zusammen, und in der Tat existieren genau 2^{τ_0} verschiedene Kurven durch ein Anfangselement mit den natürlichen Gleichungen

$$\left(\frac{1}{\varrho_\tau}\right)^2(s) = \frac{\overset{\tau+1}{\underset{1}{\varphi}}(s)}{\overset{\tau}{\underset{1}{\varphi}}(s)} \;{}^{38)} \quad (1 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1) \quad (\text{vgl. } (8.14)!).$$

Man stellt nun für diesen Fall bekanntlich dadurch eine Eineindeutigkeit zwischen Mannigfaltigkeit und natürlicher Gleichung her, daß man etwa durch die Zusatzbedingungen $\mathfrak{x}'(0) = \overset{1}{\underset{1}{\mathfrak{n}}}(0)$ und $\frac{1}{\varrho_\tau}(0) > 0$ $(1 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1)$ die Basisvektoren $\overset{\tau}{\underset{1}{\mathfrak{n}}}$ der eindimensionalen Normalenräume N_τ eindeutig festlegt. Es liegt deshalb nahe, in Verallgemeinerung dieser Tatsache bei einer beliebigen V_m durch eine geeignete Orientierung der N_τ die Vieldeutigkeit zwischen Mannigfaltigkeit und natürlichen Gleichungen aufzuheben. Eine derartige Orientierung läßt sich für $1 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1$ wegen (8.53) durch die Forderung

$$(8.57) \qquad \left\| \underset{\lambda_\tau}{A}{}_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\tau)} \right\| > 0$$

und für $\tau = \tau_0$ durch eine geeignete Modifikation davon definieren, da nach (8.7) die Matrix $\left(\underset{\lambda_\tau}{A}{}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\tau}\right)$ den Rang d_τ besitzt $(1 \leqq \tau \leqq \tau_0)$ und damit für $1 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1$ $\left\| \underset{\lambda_\tau}{A}{}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_\tau)} \right\| \neq 0$ gilt. Durch (8.57) ist nämlich eine Basis $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\mathfrak{n}}}$ des N_τ bis auf eigentliche Bewegungen eindeutig festgelegt, und außerdem läßt sich die Gültigkeit von (8.57) stets nach etwaiger Ersetzung von $\overset{\tau}{\underset{1}{\mathfrak{n}}}$ durch $-\overset{\tau}{\underset{1}{\mathfrak{n}}}$ erreichen. Speziell legt diese Orientierung des Tangentialraums N_1 die geodätischen Parallelkoordinaten p^s der V_m eindeutig fest und beseitigt die bisher hierbei vorhanden gewesene Zweideutigkeit (vgl. Fußnote auf S. 222).

Man sieht nun sofort ein, daß eine Orientierung der N_τ von Γ die Mindestvieldeutigkeit in dem Korollar von S. 236 gerade beseitigt, welches sich jetzt folgendermaßen formulieren läßt:

---

[38]) Hierbei werden zwei zusammenfallende Kurven, die bei wachsendem s in verschiedenem Sinne durchlaufen werden, als verschieden angesehen.

Durch einen vorgegebenen, analytischen, den Bedingungen (8.17) genügenden, $(m-1)$-dimensionalen Streifen Γ mit orientierten Normalenräumen gehen im allgemeinen höchstens $2^{n-m-d_{\tau_0+1}+1-\tau_0}$ reelle, analytische V_m mit gegebenen natürlichen Gleichungen.

Damit haben wir durch die Orientierung der Normalenräume im Falle einer Kurve ($m=1$, $d_{\tau_0+1}+\tau_0=n$) und im Falle einer Hyperfläche ($n-m=$ $=1$, $d_{\tau_0+1}+\tau_0=2$) die Vieldeutigkeit der V_m völlig aufgehoben, aber das folgende Beispiel zeigt, daß im allgemeinen auch durch einen orientierten Streifen mehrere Mannigfaltigkeiten mit denselben natürlichen Gleichungen gehen können: Es sei $n=4$, $m=2$, $d_{\tau_0+1}=0$, $\tau_0=2$, und der orientierte Streifen Γ sei so beschaffen, daß für ihn

$$\underset{1}{A}_1(0)=1,\ \underset{2}{A}_1(0)=0,\ \overset{1}{\underset{11}{H}}{}_1(0)=0,\ \overset{1}{\underset{12}{H}}{}_1(0)=0,\ \overset{1}{\underset{21}{H}}{}_1(0)=1,\ \overset{1}{\underset{22}{H}}{}_1(0)=1$$

gilt[39]). Außerdem sei $\overset{2}{\underset{1}{\varphi}}(p^1,p^2)=4-2\sqrt{2}$, $\overset{2}{\underset{2}{\varphi}}(p^1,p^2)=4+2\sqrt{2}$. Dann lautet (8.55) in diesem Fall:

$$\overset{1}{\underset{1}{X}}=0,\ \Big(\overset{1}{\underset{2}{X}}\Big)^2=1,$$

$$\overset{2}{\underset{1}{I}}\Big(\overset{\sigma}{\underset{r_\sigma}{X}}\Big)\equiv 4\Big(\overset{1}{\underset{2}{X}}\Big)^2+\Big(\overset{2}{\underset{1}{X}}\Big)^2+\Big(\overset{2}{\underset{2}{X}}\Big)^2=8,$$

$$\overset{2}{\underset{2}{I}}\Big(\overset{\sigma}{\underset{r_\sigma}{X}}\Big)\equiv 2\Big(\overset{1}{\underset{2}{X}}\Big)^2\Big(\overset{2}{\underset{1}{X}}-\overset{2}{\underset{2}{X}}\Big)^2=8.$$

Dazu kommen die Orientierungsbedingungen

$$\overset{1}{\underset{2}{X}}>0;\ \overset{1}{\underset{2}{X}}\Big(\overset{2}{\underset{2}{X}}-\overset{2}{\underset{1}{X}}\Big)>0.$$

Dieses System besitzt genau die beiden Lösungen:

$$\overset{1}{\underset{1}{X}}{}_0=0,\ \overset{1}{\underset{2}{X}}{}_0=1,\ \overset{2}{\underset{1}{X}}{}_0=-2,\ \overset{2}{\underset{2}{X}}{}_0=0 \text{ und } \overset{1}{\underset{1}{X}}{}_0=0,\ \overset{1}{\underset{2}{X}}{}_0=1,\ \overset{2}{\underset{1}{X}}{}_0=0,\ \overset{2}{\underset{2}{X}}{}_0=2,$$

welche auch den Ungleichungen (8.56) genügen, so daß also zwei verschiedene reelle V_2 mit denselben natürlichen Gleichungen für $p^m=0$ durch Γ gehen. Durch dieses Beispiel ist bewiesen, daß die Voraussetzung (8.51) von Satz 17 wesentlich ist und auch nicht durch die zusätzliche Annahme der Orientierung der Normalenräume von Γ ersetzt werden kann.

Bemerkungen. 1) Die Sätze 15, 16 und 17 gelten analog, wenn man bei den natürlichen Gleichungen der V_m als Invarianten an Stelle der $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ die aus den $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ (für festes τ) gebildeten elementarsymmetrischen Funktionen verwendet. Diese Funktionen können wegen der notwendigen Bedingung 2. von Satz 15 nicht beliebig vorgegeben werden, sondern müssen der Einschränkung

---

[39]) Durch Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen $\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}_1(p^1)=0$ (vgl. S. 230) folgt sofort die Existenz eines derartigen Streifens.

unterworfen werden, daß die Gleichungen

$$(y)^{d_\tau} + \sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau} (-1)^{\lambda_\tau} \overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{I}}\Big(\overset{\sigma}{\underset{\nu_\sigma}{X_0}}\Big)(y)^{d_\tau-\lambda_\tau} = 0$$

jeweils d_τ reelle, positive Wurzeln $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{\varphi}}(0)$ besitzen. Außerdem kann auf die Verschiedenheit dieser Wurzeln für jedes feste τ nicht verzichtet werden, da sonst nach dem Beweisgang von Satz 16 die als wesentlich erkannte Voraussetzung (8.56) nicht mehr gültig ist.

2) Es lassen sich leicht auch ganz andere Beziehungen gewisser, auf einer V_m definierter Funktionen und geodätischer Parallelkoordinaten der V_m finden, durch welche zusammen mit einem $(m-1)$-dimensionalen Anfangsstreifen die V_m im E_n im wesentlichen eindeutig charakterisiert ist. Solche Beziehungen sind z. B. die Gleichungen

$$\underset{\lambda_\tau}{A}_{m\dots m}(p^\alpha) = \text{dat.}^{40)} \quad (\lambda_\tau = 1, 2, \dots, d_\tau; 2 \leqq \tau \leqq \tau_0),$$

wie schon Grünbaum im Spezialfall $n = 3$, $m = 2$ feststellte [8]. Aber auch für die Beziehungen:

$$C_{m\dots m\, b_1\dots b_\tau}(p^\alpha) = \text{dat.} \quad (m \geqq b_1 \geqq \cdots \geqq b_\tau \geqq 1; 2 \leqq \tau \leqq \tau_0 - 1)$$

sowie für passend modifizierte Beziehungen für $\tau = \tau_0$ gelten den bisher bewiesenen entsprechende Sätze, wenn wir mit $C_{a_1a_2\dots a_{2\tau}}$ den vollsymmetrischen Tensor der Koeffizienten des von Burstin und Mayer in Verallgemeinerung der ersten und zweiten Grundform einer Hyperfläche zuerst angegebenen, vollständigen Multilinearformensystems der V_m im E_n bezeichnen. Nach deren Definition ist:

$$C_{a_1a_2\dots a_{2\tau}} = \Sigma\Big(\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1\dots a_\tau} \underset{\lambda_\tau}{A}_{a_{\tau+1}\dots a_{2\tau}}\Big) \quad (1 \leqq a_1, \dots, a_{2\tau} \leqq m),$$

wobei die erste Summe rechts über alle verschiedenen Permutationen von $a_1, a_2, \dots, a_{2\tau}$ zu erstrecken ist[41]). Die $C_{m\dots m\, b_1\dots b_\tau}$ $(m \geqq b_1 \geqq \cdots \geqq b_\tau \geqq 1)$ bilden also ein vollständiges und unabhängiges Teilsystem des vollständigen Systems aller $C_{a_1a_2\dots a_{2\tau}}$[42]). Es soll schließlich noch erwähnt werden, daß hier an Stelle der Voraussetzungen 2. und 3. von Satz 15 die folgende einschränkende Voraussetzung tritt: Die $C_{m\dots m\, b_1\dots b_\tau}$ müssen so vorgegeben werden, daß die d_τ-reihigen, symmetrischen Matrizen

$$\Big(\sum_{\lambda_\tau=1}^{d_\tau} \underset{\lambda_\tau}{A}_{(a_1,\dots,a_\tau)} \underset{\lambda_\tau}{A}_{(b_1,\dots,b_\tau)}\Big)$$

positiv definit; d. h. alle ihre Abschnittsdeterminanten positiv sind[43]).

---

[40]) Die $\underset{\lambda_\tau}{A}_{m\dots m}$ beziehen sich hierbei natürlich auf ein etwa durch die Bedingungen $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau\mu_\tau}{T_m}} = 0$ nach dem Muster des Beweises von Satz 17 normiertes System von Basisnormalvektoren.

[41]) Siehe [5], S. 219—221.

[42]) Hiermit ist eine von Schouten und v. Kampen ([16], S. 159) gestellte Frage beantwortet.

[43]) Siehe [15], S. 50 (Satz 22). Für $\tau = \tau_0$ muß diese Bedingung etwas modifiziert werden.

Der Beweis für die in dieser Bemerkung angeführten Behauptungen ergibt sich aus der Existenz von analytischen Auflösungsformeln der Art (8.31) für die Größen $\underset{\lambda_\tau}{A}_{m\ldots m}$. Diese Tatsache weist den Weg zu weitergehenden Verallgemeinerungen, auf die jedoch nicht eingegangen werden soll.

3) *Alle Sätze dieses Paragraphen gelten auch für eine V_m in einem n-dimensionalen Riemannschen Raum C_n konstanter Krümmung*[44]). Es sind bei der Definition der N_τ und der $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ nur die gewöhnlichen partiellen Ableitungen durch in bezug auf die Koordinaten x^i des C_n und auf die Parameter p^a der V_m kovariante Ableitungen zu ersetzen[45]). Die Beweise verlaufen formal fast genauso wie im euklidischen Fall; außer der Art der Ableitungen ändern sich lediglich die Integrabilitätsbedingungen (8.23) und (8.24).

§ 9. Zur geometrischen Deutung der in § 8 definierten Invarianten

Eine direkte geometrische Deutung der im vorigen Paragraphen für eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit V_m im n-dimensionalen, euklidischen Raum E_n definierten Invarianten $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ erscheint schwierig. Es läßt sich jedoch leicht ein Zusammenhang zwischen den $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ und der Einbettungszahl e von V_m angeben, wobei e als kleinste Dimension aller linearen Unterräume von E_n definiert ist, welche V_m vollständig enthalten. Es gilt nämlich:

Satz 18: *Die Einbettungszahl einer (hinreichend oft differenzierbaren) Mannigfaltigkeit V_m im E_n ist gleich der Anzahl aller nichtverschwindenden Invarianten der V_m, oder in einer Formel ausgedrückt*:

$$e = \sum_{\tau=1}^{\tau_0} d_\tau \text{[46]}). \tag{9.1}$$

Beweis: Wegen $N_{\tau_0+1} \perp N_1$ gilt für die durch $\mathfrak{x}(u^a)$ dargestellte V_m:

$$\overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{\mathfrak{n}}}(u^a)\,\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^b}(u^a) = 0 \qquad (\lambda_{\tau_0+1} = 1, 2, \ldots, d_{\tau_0+1}), \tag{9.2}$$

wobei nach (8.3)

$$\overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{\mathfrak{n}}}(u^a) = \overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{\mathfrak{n}_0}} = \text{const.}$$

gesetzt werden kann. Integration von (9.2) liefert dann $\overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{\mathfrak{n}_0}}\,\mathfrak{x}(u^a) = \overset{\tau_0+1}{\underset{\lambda_{\tau_0+1}}{h_0}} = \text{const.}$, d. h. die V_m liegt ganz in einem $(n - d_{\tau_0+1})$-dimensionalen, linearen Unterraum des E_n, woraus $e \leq n - d_{\tau_0+1} = \sum_{\tau=1}^{\tau_0} d_\tau$ folgt. Wäre nun $e < \sum_{\tau=1}^{\tau_0} d_\tau$, so

---

[44]) Eine Ausdehnung unserer Sätze auf Mannigfaltigkeiten in allgemeinen Riemannschen Räumen scheint wegen der dort nicht mehr vorhandenen Symmetrie von $\underset{\lambda_\tau}{A}_{a_1\ldots a_\tau}$ unmöglich zu sein.

[45]) Diese kovarianten Ableitungen sind in [5], S. 154ff. definiert.

[46]) Wegen (8.11), (8.12), (8.13) ist nämlich die Anzahl aller nichtverschwindenden Invarianten der V_m gleich $\sum_{\tau=1}^{\tau_0} d_\tau$.

existierte jedenfalls ein linearer Raum L_e im E_n der Dimension e, welcher die V_m ganz enthielte. Nach Definition der Schmiegräume S_τ der V_m ergibt sich leicht, daß jetzt auch alle Schmiegräume der V_m in L_e, also insbesondere S_{τ_0} in L_e enthalten wären. Dies hat aber Dim $S_{\tau_0} = \sum_{\tau=1}^{\tau_0} d_\tau \leq e$ zur Folge, was mit der Annahme $\sum_{\tau=1}^{\tau_0} d_\tau > e$ einen Widerspruch ergibt. Damit ist schon (9.1) bewiesen. w.z.b.w.

Korollar: *Eine lineare (ebene) Mannigfaltigkeit V_m im E_n ist durch das Verschwinden aller ihrer nichttrivialen Invarianten charakterisiert.*

Wir wollen nun Zusammenhänge zwischen den Invarianten von Untermannigfaltigkeiten $V_{m'}$ einer im E_n gegebenen $V_m (1 \leq m' < m)$ und den Invarianten von V_m selbst untersuchen. Dabei ist zunächst klar, daß man für eine ganz beliebig in der V_m liegende $V_{m'}$ keine allgemeingültige Beziehung zwischen den Invarianten von V_m und $V_{m'}$ erwarten kann. Dies zeigt uns nämlich Satz 16 für den Fall $V_m = E_m = E_n$. Wir spezialisieren uns aus diesem Grunde auf die sog. „σ-normalen" Untermannigfaltigkeiten der als hinreichend oft stetig differenzierbar vorausgesetzten V_m. Eine in der V_m liegende, hinreichend oft stetig differenzierbare $V_{m'}$ heiße hierbei σ-normal, wenn für den Normalenraum N_σ der V_m und den Normalenraum N'_σ der $V_{m'}$ (jeweils in bezug auf den Einbettungsraum E_n betrachtet) in jedem Punkt der $V_{m'}$:

$$N'_\sigma \subseteq N_\sigma \tag{9.3}$$

gilt, wobei σ irgendeine Zahl zwischen 1 und dem Minimum τ_1 der Anzahlen τ_0 bzw. τ'_0 aller eigentlichen Normalenräume von V_m bzw. von $V_{m'}$ sei[47]).

So ist z. B. eine in bezug auf $V_m \subseteq E_n$ total geodätische $V_{m'}$[48]) 2-normal in der V_m. (Dies ist etwa bei einer Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid des dreidimensionalen Raums oder bei dem Schnitt einer Hyperkugel mit einem durch ihren Mittelpunkt gehenden linearen Raum der Fall.) Parametrisiert man nämlich die V_m derart, daß die $V_{m'}$ durch $u^{m'+1} = \cdots = u^m = 0$ gegeben wird, so ist eine totalgeodätische $V_{m'}$ durch $\Gamma^{\bar{\bar{a}}}_{b'c'}(u^{d'}, 0) = 0$ $(m' + 1 \leq \bar{\bar{a}} \leq m;\ 1 \leq b', c', d' \leq m')$ charakterisiert, woraus wegen den sich durch Vergleich von § 3, (3.23) und (8.4) ergebenden Ableitungsgleichungen

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^{b'} \partial u^{c'}} = \Gamma^a_{b'c'} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^a} + \sum_{\lambda_1=1}^{d_1} \underset{\lambda_1}{A}_{b'c'} \overset{2}{\underset{\lambda_1}{\mathfrak{n}}} \qquad (1 \leq b', c' \leq m')$$

der V_m folgt: $N'_2 \subseteq N_2$[49]). Andererseits ist beispielsweise auch die Erzeugende $\mathfrak{x}(u^{a'})$ der (hinreichend oft differenzierbaren) zylindrischen m'-Torse

$$\mathfrak{x}(u^a) = \mathfrak{x}(u^{a'}) + \sum_{\bar{\bar{a}}=m'+1}^{m} u^{\bar{\bar{a}}} \mathfrak{b}_{\bar{\bar{a}}}$$

mit

$$\mathfrak{b}_{\bar{\bar{a}}} = \text{const.};\ \mathfrak{b}_{\bar{\bar{a}}} \mathfrak{b}_{\bar{\bar{b}}} = \delta^{\bar{\bar{b}}}_{\bar{\bar{a}}};\ \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^{b'}}(u^{a'})\, \mathfrak{b}_{\bar{\bar{a}}} = 0 \quad (1 \leq a', b' \leq m';\ m' + 1 \leq \bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}} \leq m)$$

[47]) Trivialerweise ist also jede Untermannigfaltigkeit $V_{m'}$ der V_m 1-normal in V_m.

[48]) Zur Definition einer totalgeodätischen Untermannigfaltigkeit vgl. [6], S. 184.

[49]) Umgekehrt ist auch jede in V_m 2-normale $V_{m'}$ in der V_m totalgeodätisch.

τ-normal in dieser Torse ($\tau = 1, 2, \ldots, \tau_0$), denn hier gilt sogar $N'_\tau = N_\tau$ für $1 < \tau \leq \tau_0$.

Wir beweisen nun:

Satz 19.

Vor.: Es sei V_m eine (hinreichend oft stetig differenzierbare) m-dimensionale Mannigfaltigkeit des E_n mit den eigentlichen Normalenräumen N_τ $(1 \leq \tau \leq \tau_0)$ und mit $d_\tau = \operatorname{Dim} N_\tau$. V_m enthalte eine (ebenfalls hinreichend oft stetig differenzierbare) σ-normale, m'-dimensionale Mannigfaltigkeit $V_{m'}$ $(1 \leq m' < m)$ mit den eigentlichen Normalenräumen $N'_\tau (1 \leq \tau \leq \tau'_0)$ und mit $d'_\tau = \operatorname{Dim} N'_\tau$. Außerdem seien die nichtverschwindenden Invarianten von V_m bzw. von $V_{m'}$ mit $\overset{\tau}{\underset{\lambda_\tau}{E}}$ $(\lambda_\tau = 1, 2, \ldots, d_\tau;\ 1 \leq \tau \leq \tau_0)$ bzw. mit $\overset{\tau}{\underset{\lambda'_\tau}{E'}}$ $(\lambda'_\tau = 1, 2, \ldots, d'_\tau;\ 1 \leq \tau \leq \tau'_0)$ bezeichnet.

Beh.: Dann ist für alle Punkte der $V_{m'}$:

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{\lambda'_\sigma} \leq d'_\sigma} \overset{\sigma}{\underset{i_1}{E'}}\,\overset{\sigma}{\underset{i_2}{E'}} \cdots \overset{\sigma}{\underset{i_{\lambda'_\sigma}}{E'}} \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{\lambda'_\sigma} \leq d_\sigma} \overset{\sigma}{\underset{i_1}{E}}\,\overset{\sigma}{\underset{i_2}{E}} \cdots \overset{\sigma}{\underset{i_{\lambda'_\sigma}}{E}} \;{}^{[50]}. \qquad (\lambda'_\sigma = 1, 2, \ldots, d'_\sigma) \tag{9.4}$$

Gilt bei einer dieser Ungleichungen das Gleichheitszeichen, so gilt es auch für alle Ungleichungen, und es ist außerdem $N'_\sigma = N_\sigma$. In diesem Fall wird also insbesondere wegen (8.10):

$$\overset{\sigma}{\underset{\lambda_\sigma}{E'}} = \overset{\sigma}{\underset{\lambda_\sigma}{E}} \qquad (\lambda_\sigma = 1, 2, \ldots, d_\sigma)$$

für alle Punkte der $V_{m'}$.

Beweis: Wir denken uns zunächst wegen der Voraussetzung (9.3) die Basisvektoren von N_σ so gewählt, daß die Basisvektoren $\overset{\sigma}{\underset{\lambda'_\sigma}{\mathfrak{n}'}}$ von N'_σ einen Teil der Basisvektoren $\overset{\sigma}{\underset{\lambda_\sigma}{\mathfrak{n}}}$ von N_σ bilden, daß also etwa

$$\overset{\sigma}{\underset{\lambda'_\sigma}{\mathfrak{n}'}} = \overset{\sigma}{\underset{\lambda'_\sigma}{\mathfrak{n}}} \qquad (\lambda'_\sigma = 1, 2, \ldots, d'_\sigma) \tag{9.5}$$

für alle Punkte von $V_{m'}$ ist. Weiter werde die $V_{m'}$ auf der durch $\mathfrak{x}(u^a)$ gegebenen V_m durch $u^{m'+1} = \cdots = u^m = 0$ dargestellt, und die Parameter u^a seien außerdem noch so spezialisiert, daß für einen willkürlich auf der $V_{m'}$ gewählten Punkt P_0:

$$g_{ab}(P_0) = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^a}(P_0)\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^b}(P_0) = \delta^b_a \tag{9.6}$$

gilt. Unser Ziel ist, (9.4) für den Punkt P_0 zu beweisen. Bezeichnen wir nun dazu die Projektion von $\frac{\partial^\sigma \mathfrak{x}}{\partial u^{a'_1} \ldots \partial u^{a'_\sigma}}$ auf N_σ (in S_σ) mit $\left.\frac{\partial^\sigma \mathfrak{x}}{\partial u^{a'_1} \ldots \partial u^{a'_\sigma}}\right|_{N_\sigma}$ und die Projektion desselben Vektors auf N'_σ (in S'_σ) mit $\left.\frac{\partial^\sigma \mathfrak{x}}{\partial u^{a'_1} \ldots \partial u^{a'_\sigma}}\right|_{N'_\sigma}$, so folgt aus

$$\left.\frac{\partial^\sigma \mathfrak{x}}{\partial u^{a'_1} \ldots \partial u^{a'_\sigma}}\right|_{N_\sigma} = \sum_{\lambda_\sigma = 1}^{d_\sigma} \underset{\lambda_\sigma}{A}{}_{a'_1 \ldots a'_\sigma} \overset{\sigma}{\underset{\lambda_\sigma}{\mathfrak{n}}}$$

[50]) Dies ist für $\sigma = 1$ nach (8.11) trivial.

und

$$\left.\frac{\partial^\sigma \mathfrak{x}}{\partial u^{a'_1}\ldots\partial u^{a'_\sigma}}\right|_{N'_\sigma} = \sum_{\lambda'_\sigma=1}^{d'_\sigma} \underset{\lambda'_\sigma}{A'}_{a'_1\ldots a'_\sigma}\, \overset{\sigma}{\underset{\lambda'_\sigma}{\mathfrak{N}'}}$$

in Verbindung mit (9.5) und der Tatsache, daß

$$\left.\frac{\partial^\sigma \mathfrak{x}}{\partial u^{a'_1}\ldots\partial u^{a'_\sigma}}\right|_{N'_\sigma} = \left.\frac{\partial^\sigma \mathfrak{x}}{\partial u^{a'_1}\ldots\partial u^{a'_\sigma}}\right|_{N_\sigma}$$

ist:

$$\underset{\lambda'_\sigma}{A'}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0) = \underset{\lambda'_\sigma}{A}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0) \quad (1 \leqq a'_1, \ldots, a'_\sigma \leqq m';\ \lambda'_\sigma = 1, 2, \ldots, d'_\sigma). \tag{9.7}$$

Damit erhalten wir nach der Definition unserer Invarianten von V_m und $V_{m'}$ wegen (8.9) und (9.6):

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{\lambda'_\sigma}\leq d_\sigma} \overset{\sigma}{\underset{i_1}{E}}(P_0)\ldots\overset{\sigma}{\underset{i_{\lambda'_\sigma}}{E}}(P_0) = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{\lambda'_\sigma}\leq d_\sigma} \begin{Vmatrix} \overset{\sigma}{\underset{i_1 i_1}{W}}(P_0) & \ldots & \overset{\sigma}{\underset{i_1 i_{\lambda'_\sigma}}{W}}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \overset{\sigma}{\underset{i_{\lambda'_\sigma} i_1}{W}}(P_0) & \ldots & \overset{\sigma}{\underset{i_{\lambda'_\sigma} i_{\lambda'_\sigma}}{W}}(P_0) \end{Vmatrix} =$$

$$= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{\lambda'_\sigma}\leq d_\sigma} \begin{Vmatrix} \sum\limits_{a_1,\ldots,a_\sigma=1}^{m} \left(\underset{i_1}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0)\right)^2 & \ldots & \sum\limits_{a_1,\ldots,a_\sigma=1}^{m} \underset{i_1}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0)\, \underset{i_{\lambda'_\sigma}}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{a_1,\ldots,a_\sigma=1}^{m} \underset{i_{\lambda'_\sigma}}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0)\, \underset{i_1}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0) & \ldots & \sum\limits_{a_1,\ldots,a_\sigma=1}^{m} \left(\underset{i_{\lambda'_\sigma}}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0)\right)^2 \end{Vmatrix}, \tag{9.8}$$

sowie analog

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{\lambda'_\sigma}\leq d'_\sigma} \overset{\sigma}{\underset{i_1}{E'}}(P_0)\ldots\overset{\sigma}{\underset{i_{\lambda'_\sigma}}{E'}}(P_0) =$$

$$= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{\lambda'_\sigma}\leq d'_\sigma} \begin{Vmatrix} \sum\limits_{a'_1,\ldots,a'_\sigma=1}^{m'} \left(\underset{i_1}{A}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0)\right)^2 & \ldots & \sum\limits_{a'_1,\ldots,a'_\sigma=1}^{m'} \underset{i_1}{A}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0)\, \underset{i_{\lambda'_\sigma}}{A}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{a'_1,\ldots,a'_\sigma=1}^{m'} \underset{i_{\lambda'_\sigma}}{A}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0)\, \underset{i_1}{A}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0) & \ldots & \sum\limits_{a'_1,\ldots,a'_\sigma=1}^{m'} \left(\underset{i_{\lambda'_\sigma}}{A}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0)\right)^2 \end{Vmatrix}. \tag{9.9}$$

Entwickeln wir nun die auf den rechten Seiten von (9.8) und (9.9) stehenden Determinanten nach dem verallgemeinerten Determinantenmultiplikationssatz, so zeigt sich, daß die rechte Seite von (9.8) alle Summanden der rechten Seite von (9.9) enthält, wozu noch zusätzlich die Quadrate aller derjenigen λ'_σ-reihigen Unterdeterminanten der Matrix $\left(\underset{\lambda_\sigma}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0)\right)$ hinzukommen, bei welchen mindestens ein Zeilenindex λ_σ größer als d'_σ ist oder bei welchen mindestens ein Spaltenindex $a_1\ldots a_\sigma$ ein $a_\varrho > m'$ enthält $(1 \leqq \varrho \leqq \sigma)$. Es ist also in der Tat

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i'_{\lambda_\sigma}\leq d_\sigma} \overset{\sigma}{\underset{i_1}{E}}(P_0)\ldots\overset{\sigma}{\underset{i_{\lambda'_\sigma}}{E}}(P_0) \geq \sum_{1\leq i_1<\cdots<i'_{\lambda_\sigma}\leq d'_\sigma} \overset{\sigma}{\underset{i_1}{E'}}(P_0)\ldots\overset{\sigma}{\underset{i_{\lambda'_\sigma}}{E'}}(P_0),$$
$$(1 \leqq \lambda'_\sigma \leqq d'_\sigma)$$

und das Gleichheitszeichen kann hierbei dann und nur dann gelten, wenn alle

der eben angegebenen Unterdeterminanten Null sind. In diesem Fall muß notwendig $d'_\sigma = d_\sigma$, d. h. $N'_\sigma = N_\sigma$ sein, da andernfalls alle maximalen Unterdeterminanten der aus den Vektoren

$$\underset{d_\sigma-\lambda'_\sigma+1}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0),\quad \underset{d_\sigma-\lambda'_\sigma+2}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0),\ldots,\underset{d_\sigma}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0) \qquad (\lambda'_\sigma = \text{fest!})$$

gebildeten Matrix verschwinden würden, d. h. diese Vektoren linear abhängig sein müßten, was mit (8.7) einen Widerspruch ergeben würde. Außerdem folgt in diesem Fall aus dem Verschwinden aller λ'_σ-reihigen Unterdeterminanten von $\left(\underset{\lambda_\sigma}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0)\right)$, bei denen mindestens ein Spaltenindex $a_1 \ldots a_\sigma$ ein $a_\varrho > m'$ enthält $(1 \leqq \varrho \leqq \sigma)$, die lineare Abhängigkeit des Spaltenvektors

$$\left\{\underset{1}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0), \underset{2}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0), \ldots, \underset{d_\sigma}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0)\right\}$$

mit diesem Spaltenindex von je $\lambda'_\sigma - 1$, also um so mehr von je $d_\sigma - 1$ Vektoren aus einer wegen (8.7) und (9.7) sicher existierenden Menge von $d_\sigma = d'_\sigma$ linear unabhängigen Spaltenvektoren der Matrix $\left(\underset{\lambda'_\sigma}{A}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0)\right)$. Dies bedeutet anschaulich gesprochen, daß der angegebene Spaltenvektor in allen denjenigen Hyperebenen des d_σ-dimensionalen affinen Raums liegt, welche durch den Nullpunkt dieses Raums gehen und von je $d_\sigma - 1$ der d_σ linear unabhängigen Spaltenvektoren von $\left(\underset{\lambda'_\sigma}{A}_{a'_1\ldots a'_\sigma}(P_0)\right)$ aufgespannt werden. Der Durchschnitt aller dieser Hyperebenen ist aber ein Punkt allein, was $\underset{\lambda_\sigma}{A}_{a_1\ldots a_\sigma}(P_0) = 0$ $(\lambda_\sigma = 1, 2, \ldots, d_\sigma)$ für den Fall zur Folge hat, daß hierbei ein $a_\varrho > m'$ ist $(1 \leqq \varrho \leqq \sigma)$. Daraus ergibt sich nun unter Benutzung von (9.7):

$$\underset{\lambda_\sigma\mu_\sigma}{\overset{\sigma}{W'}}(P_0) = \underset{\lambda_\sigma\mu_\sigma}{\overset{\sigma}{W}}(P_0), \text{ d. h. wegen (8.10) } \underset{\lambda_\sigma}{\overset{\sigma}{E'}}(P_0) = \underset{\lambda_\sigma}{\overset{\sigma}{E}}(P_0)\ (\lambda_\sigma, \mu_\sigma = 1, 2, \ldots, d_\sigma),$$

womit im Falle der Gleichheit bei einer Ungleichung von (9.4) auch die Gleichheit bei allen Ungleichungen (9.4) und damit die ganze Behauptung von Satz 19 erwiesen ist. w.z.b.w.

Wir bemerken noch, daß z. B. für den auf S. 240 behandelten Fall der Erzeugenden $V_{m'}$ einer zylindrischen m'-Torse V_m tatsächlich in (9.4) für jedes $\sigma > 1$ überall das Gleichheitszeichen steht[51]).

Es soll jetzt die Differenz $e - e'$ der Einbettungszahlen e und e' einer V_m im E_n und einer in V_m enthaltenen Untermannigfaltigkeit $V_{m'}$ abgeschätzt werden. Wir beschränken uns dabei auf total geodätische $V_{m'}$ der V_m. Dann besteht der folgende Zusammenhang zwischen $e - e'$ und den Invarianten von V_m und $V_{m'}$:

Satz 20: *Die Gültigkeit der Beziehung*

$$\sum_{\lambda'_2=1}^{d'_2} \underset{\lambda'_2}{\overset{2}{E'}}(u^{a'}, 0) = \sum_{\lambda_2=1}^{d_2} \underset{\lambda_2}{\overset{2}{E}}(u^{a'}, 0)^{52)} \qquad (1 \leqq a' \leqq m') \tag{9.10}$$

[51]) Natürlich kann in (9.4) wegen $d'_1 = m' < m = d_1$ für $\sigma = 1$ niemals ein Gleichheitszeichen auftreten, was man auch direkt mit Hilfe von (8.11) bestätigt.

[52]) Nach Satz 19 genügt es hier auch, die Gleichheit entsprechender anderer elementarsymmetrischer Funktionen der $\underset{\lambda'_2}{\overset{2}{E'}}(u^{a'}, 0)$ bzw. der $\underset{\lambda_2}{\overset{2}{E}}(u^{a'}, 0)$ vorauszusetzen.

ist eine hinreichende, wenn auch keineswegs notwendige Bedingung für das Bestehen der Ungleichung

$$e - e' \geqq m - m' \tag{9.11}$$

für die Einbettungszahlen e und e' einer zweimal stetig differenzierbaren V_m im E_n und einer durch $u^{m'+1} = \cdots = u^m = 0$ gegebenen, totalgeodätischen Untermannigfaltigkeit $V_{m'}$ der V_m.

Beweis: Wir können uns zunächst die Parameter u^a der V_m und die Vektoren $\underset{\lambda_1}{\overset{1}{\mathfrak{n}}}$ so gewählt denken, daß die Beziehungen

$$g_{\bar{\bar a} b}(u^{a'}, 0) = \delta^b_{\bar{\bar a}} \tag{9.12}$$

und

$$\underset{\lambda_1}{A}_{\bar{\bar a}}(u^{a'}, 0) = \delta^{\lambda_1}_{\bar{\bar a}} \quad (m' + 1 \leqq \bar{\bar a} \leqq m;\ \lambda_1 = 1, 2, \ldots, d_1) \tag{9.13}$$

bestehen. Durch eine Parametersubstitution der Form

$$\bar u^{a'} = \bar u^{a'}(P_0, u^{b'}),\ \overline{u^{\bar{\bar a}}} = u^{\bar{\bar a}} \tag{9.14}$$

läßt sich ferner wegen (9.12) erreichen, daß für einen beliebig gewählten Punkt P_0 der $V_{m'}$

$$g_{ab}(P_0) = \delta^b_a$$

gilt. Aus der vorausgesetzten Gleichung (9.10) folgt nun, da $V_{m'}$ als totalgeodätische Mannigfaltigkeit 2-normal in der zweimal stetig differenzierbaren V_m gelegen ist, nach dem Beweisgang von Satz 19 unter Berücksichtigung von (9.13):

$$\underset{\lambda_1}{A}_{\bar{\bar a} b'}(P_0) = \sum_{\lambda_1 = 1}^{m} \underset{\lambda_1}{A}_{\bar{\bar a}}(P_0) \underset{\lambda_1 \lambda_2}{\overset{1}{H}}_{b'}(P_0) = \underset{\bar{\bar a} \lambda_2}{\overset{1}{H}}_{b'}(P_0) = 0 \qquad (\lambda_2 = 1, 2, \ldots, d_2).$$

Wegen des tensoriellen Verhaltens von $\underset{\bar{\bar a} \lambda_2}{\overset{1}{H}}_{b'}(P_0)$ bei Rückgängigmachung der Substitution (9.14) ist dann aber auch ganz allgemein:

$$\underset{\bar{\bar a} \lambda_2}{\overset{1}{H}}_{b'}(u^{a'}, 0) = 0 \quad (1 \leqq a', b' \leqq m';\ m' + 1 \leqq \bar{\bar a} \leqq m;\ \lambda_2 = 1, 2, \ldots, d_2), \tag{9.15}$$

weil P_0 ja beliebig auf der $V_{m'}$ gewählt war.

Weiter ergibt sich aus der Tatsache, daß $V_{m'}$ 2-normal in V_m gelegen ist und daß sich der Vektor $\dfrac{\partial \underset{c'}{\overset{1}{\mathfrak{n}}}}{\partial u^{b'}}(u^{a'}, 0)$ von S_2' nach (8.21) in der Form

$$\frac{\partial \underset{c'}{\overset{1}{\mathfrak{n}}}}{\partial u^{b'}} = \sum_{a' = 1}^{m'} \underset{c' a'}{\overset{1}{T}}_{b'} \underset{a'}{\overset{1}{\mathfrak{n}}} + \sum_{\bar{\bar a} = m' + 1}^{m} \underset{c' \bar{\bar a}}{\overset{1}{T}}_{b'} \underset{\bar{\bar a}}{\overset{1}{\mathfrak{n}}} + \sum_{\lambda_2 = 1}^{d_2} \underset{c' \lambda_2}{\overset{1}{H}}_{b'} \underset{\lambda_2}{\overset{2}{\mathfrak{n}}}$$

darstellen läßt:

$$\underset{c' \bar{\bar a}}{\overset{1}{T}}_{b'}(u^{a'}, 0) = - \underset{\bar{\bar a} c'}{\overset{1}{T}}_{b'}(u^{a'}, 0) = 0 \quad (1 \leqq a', b', c' \leqq m';\ m' + 1 \leqq \bar{\bar a} \leqq m). \tag{9.16}$$

Jetzt wird wegen (8.21), (9.15) und (9.16):

$$\frac{\partial \overset{1}{\underset{\bar{a}}{\mathfrak{n}}}}{\partial u^{b'}}(u^{a'}, 0) = \sum_{\bar{c}=m'+1}^{m} \overset{1}{\underset{\bar{a}\bar{c}}{T}}{}_{b'}(u^{a'}, 0)\, \overset{1}{\underset{\bar{c}}{\mathfrak{n}}}(u^{a'}, 0) \quad (m'+1 \leqq \bar{a} \leqq m),$$

und damit ist nach § 2, Hilfssatz 3 der von den $m-m'$ Vektoren $\overset{1}{\underset{\bar{a}}{\mathfrak{n}}}$ aufgespannte lineare Raum für alle Punkte der $V_{m'}$ konstant. Dieser Raum ist zu dem linearen Teilraum L_e des E_n, in welchen V_m nach Voraussetzung eingebettet werden kann, parallel und andererseits zu N'_1 orthogonal, woraus ähnlich wie beim Beweis von Satz 18 wie behauptet $e' \leqq e-(m-m')$ oder $e-e' \geqq m-m'$ folgt.

Das Beispiel eines Großkreises auf der Einheitskugel zeigt endlich, daß (9.10) für (9.11) nicht notwendig ist, denn hier ist $m=2$, $m'=1$, $e=3$, $e'=2$ und $N'_2 = N_2$, aber $\sum_{\lambda'_2=1}^{d'_2} \overset{2}{\underset{\lambda'_2}{E}}{}' = 1$ und $\sum_{\lambda_2=1}^{d_2} \overset{2}{\underset{\lambda_2}{E}} = 2$. w.z.b.w.

Der eben bewiesene Satz enthält als Spezialfall die Tatsache, daß jede geodätische Linie einer Fläche des dreidimensionalen Raums notwendig eben ist, bei welcher das Quadrat ihrer Kurvenkrümmung gleich der doppelten Casorati-Krümmung der Fläche ist[53]). Wir erwähnen zum Schluß, daß in (9.11) z. B. dann das Gleichheitszeichen steht, wenn neben (9.10) noch $d'_3 = d_3$, $d'_4 = d_4, \ldots, d'_{\tau_0} = d_{\tau_0}$ gilt (τ_0 = Anzahl der eigentlichen Normalenräume der V_m), wie dies etwa bei der Erzeugenden einer zylindrischen Torse der Fall ist.

Literatur

[1] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, 1. Aufl. Berlin: Julius Springer 1923. — [2] Blaschke, W.: Über affine Geometrie XXXIII, Affinminimalflächen. Math. Z. **12**, 262—273 (1922). — [3] Bochner, S., u. W. T. Martin: Several complex variables. Princeton 1948. — [4] Casorati, F.: Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Acta math. **14**, 95—110 (1890). — [5] Duschek, A., u. W. Mayer: Lehrbuch der Differentialgeometrie II. Berlin: C. G. Teubner 1930. — [6] Eisenhart, L. P.: Riemannian Geometry. Princeton 1949. — [7] Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III, 3 D. 11. — [8] Grünbaum, S.: Über die Bestimmung von Flächen aus ihrer Normalkrümmung längs einer Schar geodätischer Linien. Comm. Math. Helvet. **11**, 336—361 (1939). — [9] Leichtweiss, K.: Natürliche Gleichungen einer Fläche. Math. Z. **57**, 244—264 (1953). — [10] Müller, E.: Relative Minimalflächen. Mh. Math. Phys. **31**, 3—19 (1921). — [11] Rellich, F.: Die Bestimmung einer Fläche durch ihre Gausssche Krümmung. Math. Z. **43**, 618—627 (1938). — [12] Süss, W.: Zur relativen Differentialgeometrie I. Jap. J. Math. **4**, 57—75 (1927). — [13] Süss, W.: Ein affines Analogon zur Bestimmung einer Fläche aus einer Grundform und einer Krümmungsfunktion durch W. Scherrer. Math. Z. **52**, 698—702 (1950). — [14] Süss, W.: Über Relativ-Minimalflächen und Verbiegung. Jap. J. Math. **4**, 203—207 (1927). — [15] Schmeidler, W.: Vorträge über Determinanten und Matrizen. Berlin: Akad. Verlagsges. 1949. — [16] Schouten, J. A., u. E. v. Kampen: Über die Krümmung einer V_m in V_n; eine Revision der Krümmungstheorie. Math. Ann. **105**, 144—159 (1931). — [17] Waerden, B. L. v. d.: Moderne Algebra, Teil 2. Berlin: Julius Springer 1931.

(Eingegangen am 1. November 1955)

[53]) Man sieht dies ohne weiteres ein, wenn man bedenkt, daß eine solche geodätische Linie gleichzeitig Krümmungslinie der Fläche sein muß.

KANOLD, H.-J.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 246—255 (1956)

Über einen Satz von L. E. Dickson. II

Von
HANS-JOACHIM KANOLD in Braunschweig

Wir beziehen uns in dieser Arbeit auf Teil I [1], der kurz mit I zitiert wird. Das Ziel dieses zweiten Teils soll sein, den am Schluß von I als Vermutung ausgesprochenen Satz 6 vollständig und in einer verallgemeinerten Gestalt zu beweisen. Ferner sollen aus diesem Satz einige Folgerungen hergeleitet werden.

§ 1

Wir wollen zunächst mit Hilfe eines bekannten Satzes von A. THUE (vgl. [3], insbesondere auch die dort gestellte Übungsaufgabe) einen Hilfssatz beweisen, der später als Grundlage für weitere Überlegungen dienen wird.

Hilfssatz. *Es sollen a, b, x, y natürliche Zahlen bedeuten; a und b seien fest gegeben und sollen $1 < a < b$ erfüllen. Dann besitzt die Gleichung*

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{x-1} = 1 + b + b^2 + \cdots + b^{y-1} \tag{1}$$

nur endlich viele Lösungen x, y.

Beweis. Die Gleichung (1) ist gleichbedeutend mit

$$a^x(b-1) - b^y(a-1) = b - a. \tag{2}$$

Ist

$$x \equiv r \pmod 3; \quad y \equiv s \pmod 3, \tag{3}$$

so können wir $0 \leqq r, s \leqq 2$ annehmen. Wir setzen ferner

$$a^{\frac{x-r}{3}} = X; \quad b^{\frac{y-s}{3}} = Y; \quad a^r(b-1) = A_r; \quad b^s(a-1) = B_s. \tag{4}$$

Dann nimmt (2) die Gestalt

$$A_r X^3 - B_s Y^3 = b - a > 0 \tag{5}$$

an. Nach dem erwähnten Satz von THUE und der daran anschließenden Übungsaufgabe genügt es zu zeigen, daß

$$\frac{f(z)}{A_r} = z^3 - \frac{B_s}{A_r} \tag{6}$$

nicht die dritte Potenz eines Polynoms ersten Grades mit rationalen Koeffizienten sein kann, um die Richtigkeit unseres Hilfssatzes nachzuweisen. Ist aber R eine beliebige rationale Zahl, so ist immer $(z-R)^3 \neq z^3 - \frac{B_s}{A_r}$, weil nach unseren Voraussetzungen $B_s \neq 0$ ist.

§ 2

Wir wollen nun darangehen, die in I begonnenen Untersuchungen zu verallgemeinern, zu verschärfen und zu einem gewissen Abschluß zu bringen.

Wir formulieren dazu den folgenden Satz 1, der eine Verallgemeinerung von I, Satz 6 darstellt.

Satz 1. *Es sollen k, n, N, r, Z natürliche Zahlen bedeuten; mit Ausnahme von n seien alle fest gegeben, wobei wir noch o. B. d. A. $(N, Z) = 1$ annehmen. Es sei $V(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n und $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$. Dann gilt: Es gibt dann und nur dann unendlich viele n, die*

a) $\dfrac{\sigma_r(n)}{n^r} = \dfrac{Z}{N}$ und b) $V(n) = k$

genügen, wenn alle vier folgenden Bedingungen erfüllt sind:

α) $r = 1$; β) $Z \equiv 0 \pmod 2$;

γ) *es gibt mindestens eine ungerade Zahl m, die*

$$\frac{\sigma_1(m)}{m} = \frac{\sigma(m)}{m} = \frac{Z}{2N} \quad \text{und} \quad V(m) = k - 2 \text{ genügt;}$$

δ) *es gibt unendlich viele gerade vollkommene Zahlen. In jedem Fall gibt es nur höchstens endlich viele n, die a) und b) genügen und nicht die Gestalt $n = m \cdot v$ besitzen, wobei $(m, v) = 1$ gilt und v eine gerade vollkommene Zahl bedeutet, von der wir noch annehmen können, daß sie oberhalb einer beliebig vorgegebenen Schranke S gelegen ist.*

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe eine Folge von unendlich vielen paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen $n_\varrho (\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$, die alle die Bedingungen a) und b) aus Satz 1 erfüllen. Wir bezeichnen

$$n_\varrho = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa}}; \quad f_{\varrho\varkappa} = 1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^r} + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^{2r}} + \cdots + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa} r}}. \tag{7}$$

Es ist

$$1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^r} \leq f_{\varrho\varkappa} < 1 + \frac{1}{p_{\varrho\varkappa}^r - 1}. \tag{8}$$

Wir wählen, wie in I, aus $\{n_\varrho\}$ geeignete Teilfolgen aus und erhalten schließlich die Folge $\{n_\varrho^{(k)}\}$ mit

$$f_{\varrho\varkappa}^{(k)} \to h_\varkappa \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, k. \tag{9}$$

Ferner ist wieder für alle $n_\varrho^{(k)}$ und $\varkappa = 1, \ldots, k$

$$f_{\varrho\varkappa}^{(k)} = h_\varkappa + \varepsilon_{\varrho\varkappa} \text{ mit } \lim_{\varrho \to \infty} \varepsilon_{\varrho\varkappa} = 0. \tag{10}$$

Schließlich erhalten wir

$$\frac{Z}{N} = \prod_{\varkappa=1}^{k} h_\varkappa. \tag{11}$$

Genau wie in I, § 3 gelangen wir zu einer Einteilung der $h_\varkappa$ in drei Klassen, die folgendermaßen gekennzeichnet sind: Klasse I enthält die $h_\varkappa$ mit

$$h_\varkappa = 1; \quad p_{\varrho\varkappa} \to \infty; \quad \varepsilon_{\varrho\varkappa} > 0. \tag{12}$$

Klasse II enthält die $h_\varkappa$ mit

$$h_\varkappa = 1 + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^{2r}} + \cdots + \frac{1}{p^{\alpha r}}, \tag{13}$$

wobei $\varepsilon_{\varrho\varkappa} = 0$ ist und p, α von ϱ unabhängig sind.

Klasse III enthält die $h_\varkappa$ mit

$$(14)\qquad h_\varkappa = 1 + \frac{1}{p^r - 1}\,; \quad \varepsilon_{\varrho\varkappa} < 0\,, \quad p \text{ unabhängig von } \varrho\,.$$

Aus der Bedingung a) von Satz 1 sowie (10) und (11) erhalten wir jetzt

$$(15)\qquad \frac{Z}{N} = \frac{\sigma_r(n_\varrho^{(k)})}{(n_\varrho^{(k)})^r} = \prod_{\varkappa=1}^{k} f_{\varrho\varkappa}^{(k)} = \prod_{\varkappa=1}^{k} (h_\varkappa + \varepsilon_{\varrho\varkappa}) = \prod_{\varkappa=1}^{k} h_\varkappa\,.$$

Wir lassen von nun an der Einfachheit halber wieder die oberen Indizes (k) fort, denken uns ϱ hinreichend groß (was später noch genauer erklärt werden soll) und kennzeichnen die $h_\varkappa$ bzw. $\varepsilon_{\varrho\varkappa}$ aus den drei Klassen I, II, III mit einer entsprechenden Anzahl von oberen Strichen. Die Anzahlen in den einzelnen Klassen seien wieder a, b und c. Damit können wir (15) in der folgenden Gestalt schreiben:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \frac{Z}{N} &= \prod_{\varkappa=1}^{a} \frac{(1 + p_{\varrho\varkappa}^r + \cdots + p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa} r})}{p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa} r}} \cdot \prod_{\varkappa=a+1}^{a+b} \frac{(1 + p_\varkappa^r + \cdots + p_\varkappa^{\alpha_\varkappa r})}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa r}} \times \\ &\times \prod_{\varkappa=a+b+1}^{k} \frac{(1 + p_\varkappa^r + \cdots + p_\varkappa^{\alpha_{\varrho\varkappa} r})}{p_\varkappa^{\alpha_{\varrho\varkappa} r}} = \prod_{\varkappa=a+1}^{a+b} h_\varkappa'' \cdot \prod_{\varkappa=a+b+1}^{k} \frac{p_\varkappa^r}{p_\varkappa^r - 1}\,. \end{aligned}$$

Wir beachten jetzt, daß die Beziehungen

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\lim_{\varrho\to\infty} p_{\varrho\varkappa} = \infty \quad \text{für } 1 \leqq \varkappa \leqq a; \\ &\lim_{\varrho\to\infty} \alpha_{\varrho\varkappa} = \infty \quad \text{für } a + b + 1 \leqq \varkappa \leqq k \end{aligned}$$

gelten, während die $p_\varkappa$ bzw. die $\alpha_\varkappa$ von ϱ unabhängig sind für $a + 1 \leqq \varkappa \leqq k$ bzw. $a + 1 \leqq \varkappa \leqq a + b$. Wir bemerken, daß in (16) noch die Möglichkeit offengelassen ist, daß eine der Zahlen a, b, c gleich Null ist. Dann ist das entsprechende Produkt durch 1 zu ersetzen. Wir beachten, daß

$$(18)\qquad \prod_{\varkappa=a+1}^{a+b} \frac{1 + p_\varkappa^r + \cdots + p_\varkappa^{\alpha_\varkappa r}}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa r}} = \prod_{\varkappa=a+1}^{a+b} h_\varkappa''$$

ist, ändern wie in I, (55) die Bezeichnungen um, indem wir statt $p_{a+b+1}, \ldots, p_k$ jetzt $q_1, \ldots, q_c$ und statt $\alpha_{\varrho, a+b+1}, \ldots, \alpha_{\varrho k}$ jetzt $\beta_{\varrho 1}, \ldots, \beta_{\varrho c}$ schreiben, und erhalten so aus (16) und (17)

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\prod_{\varkappa=1}^{a} (1 + p_{\varrho\varkappa}^r + \cdots + p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa} r}) \prod_{\gamma=1}^{c} (q_\gamma^{(\beta_{\varrho\gamma}+1) r} - 1) \\ &= \prod_{\varkappa=1}^{a} p_{\varrho\varkappa}^{\alpha_{\varrho\varkappa} r} \cdot \prod_{\gamma=1}^{c} q_\gamma^{(\beta_{\varrho\gamma}+1) r}; \quad \lim_{\varrho\to\infty} \beta_{\varrho\gamma} = \infty \quad \text{für} \quad \gamma = 1, \ldots, c. \end{aligned}$$

§ 3

Der weitere Beweis von Satz 1 besteht jetzt im wesentlichen in einer Diskussion von (19), wobei der Hilfssatz aus § 1 entscheidend benutzt werden soll. Zunächst führen wir die Abkürzungen

$$(20)\qquad \begin{aligned} &1 + q_\gamma + q_\gamma^2 + \cdots + q_\gamma^{\beta_{\varrho\gamma}} = Q_{\varrho\gamma}; \\ &1 + q_\gamma^{\beta_{\varrho\gamma}+1} + q_\gamma^{2(\beta_{\varrho\gamma}+1)} + \cdots + q_\gamma^{(r-1)(\beta_{\varrho\gamma}+1)} = R_{\varrho\gamma} \end{aligned}$$

ein. Weil die q_γ von ϱ unabhängige, feste Primzahlen sind, können wir nach dem Hilfssatz aus § 1 nun ϱ so groß wählen, daß die Ausdrücke $Q_{\varrho 1}, \ldots, Q_{\varrho c}$ für ein festes ϱ paarweise verschieden sind. Wir denken uns solch ein ϱ herausgegriffen und wollen jetzt zur Vereinfachung auch die Indizes ϱ fortlassen. Durch eventuelle Umnumerierung können wir ferner erreichen, daß für $a > 1$ bzw. $c > 1$

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_a \quad \text{bzw.} \quad Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_c \tag{21}$$

gilt. Nun sieht (19) so aus:

$$\prod_{\varkappa=1}^{a} (1 + p_\varkappa^r + p_\varkappa^{2r} + \cdots + p_\varkappa^{\alpha_\varkappa r}) \prod_{\gamma=1}^{c} (q_\gamma - 1)\, Q_\gamma R_\gamma = \prod_{\varkappa=1}^{a} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa r} \prod_{\gamma=1}^{c} q_\gamma^{(\beta_\gamma+1) r}. \tag{22}$$

Wegen (17) und (19) können wir dabei annehmen, daß alle $p_\varkappa$ und β_γ größer als eine beliebig vorgegebene Schranke sind. Wie früher gezeigt wurde [2], folgt aus Sätzen über Kreisteilungspolynome, daß jedes Q_γ stets mindestens durch eine der Primzahlen $p_\varkappa$ teilbar sein muß. Es sei nun

$$\begin{aligned} &p_1 < p_2 < \cdots < p_g < p_1^2 < p_{g+1} < \cdots < p_{g+h} < p_1^3 < \cdots < p_a; \\ &Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_i < p_1^2 \leqq Q_{i+1} < \cdots < Q_{i+j} < p_1^3 \leqq Q_{i+j+1} < \cdots < Q_c, \end{aligned} \tag{23}$$

wobei wir für h, i, j auch den Wert Null zulassen.

Aus (20) und (22) ergibt sich

$$\prod_{\varkappa=1}^{a} \left(1 + \frac{1}{p_\varkappa^r} + \frac{1}{p_\varkappa^{2r}} + \cdots + \frac{1}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa r}}\right) = \prod_{\gamma=1}^{c} \left(1 + \frac{1}{(q_\gamma - 1)\, Q_\gamma R_\gamma}\right); \quad Q_\gamma^{r-1} \leqq R_\gamma. \tag{24}$$

Wir bemerken, daß wir $a\,c > 0$ annehmen dürfen, weil alle n_ϱ paarweise verschieden sein sollten. Wie in I, § 8 können wir zeigen, daß jede der Zahlen $Q_1, \ldots, Q_i$ gleich einem $p_\varkappa$ (wegen (23) mit $1 \leqq \varkappa \leqq g$) sein muß. Die Zahlen $Q_{i+1}, \ldots, Q_{i+j}$ sind entweder gleich einem $p_\varkappa$ (wegen (23) mit $g + 1 \leqq \varkappa \leqq g + h$) oder gleich einem Produkt von zwei (gleichen oder verschiedenen) $p_\varkappa$ (wegen (23) mit $1 \leqq \varkappa \leqq g$) oder, falls $\beta_\gamma + 1$ keine Primzahl ist (dann muß $\beta_\gamma + 1$ das Doppelte einer Primzahl sein für $i + 1 \leqq \gamma \leqq i + j$), gleich $(1 + q_\gamma)\, p_\varkappa p_\lambda$ mit $1 \leqq \varkappa < \lambda \leqq g$. Im letzten Fall hat Q_γ die Gestalt

$$Q_\gamma = (1 + q_\gamma)\, p_\varkappa p_\lambda = (1 + q_\gamma)(1 + q_\gamma^2 + q_\gamma^4 + \cdots + q_\gamma^{\beta_\gamma - 1}). \tag{25}$$

Nach dem Hilfssatz aus § 1 kann es nun nicht vorkommen, daß für $i + 1 \leqq \gamma$, $\delta \leqq i + j$ zu zwei verschiedenen Q_γ, Q_δ die gleiche Kombination $p_\varkappa p_\lambda$ gehören kann, derart, daß $p_\varkappa p_\lambda$ sowohl Teiler von Q_γ als auch von Q_δ ist. Jetzt schätzen wir die rechte Seite von (24) nach oben ab. Aus den soeben durchgeführten Überlegungen ergibt sich

$$\begin{aligned} &\prod_{\gamma=1}^{i} \left(1 + \frac{1}{(q_\gamma - 1)\, Q_\gamma R_\gamma}\right) \leqq \prod_{\gamma=1}^{i} \left(1 + \frac{1}{(q_\gamma - 1)\, p_\gamma^r}\right); \\ &\prod_{\gamma=i+1}^{i+j} \left(1 + \frac{1}{(q_\gamma - 1)\, Q_\gamma R_\gamma}\right) \leqq \prod_{\gamma=i+1}^{i+j} \left(1 + \frac{1}{(q_\gamma - 1)\, Q_\gamma^r}\right) \leqq \prod_{\varkappa=g+1}^{g+h} \left(1 + \frac{1}{p_\varkappa^r}\right) \times \\ &\qquad \times \prod_{1 \leqq \varkappa \leqq \lambda \leqq g} \left(1 + \frac{1}{p_\varkappa^r p_\lambda^r}\right); \\ &\prod_{\gamma=i+j+1}^{c} \left(1 + \frac{1}{(q_\gamma - 1)\, Q_\gamma R_\gamma}\right) \leqq \prod_{i+j+1}^{c} \left(1 + \frac{1}{p_1^{3r}}\right) < 1 + \frac{c+1}{p_1^{3r}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Somit erhalten wir

$$\prod_{\gamma=1}^{c}\left(1+\frac{1}{(q_\gamma-1)\,Q_\gamma R_\gamma}\right) \leqq \left(1+\frac{1}{(q_1-1)\,p_1^{r}}\right)\left(1+\frac{c+1}{p_1^{2r}}\right)\cdot \prod_{\gamma=2}^{g+h}\left(1+\frac{1}{p_\gamma^{r}}\right)\times$$

$$\times \prod_{1\leqq\varkappa\leqq\lambda\leqq g}\left(1+\frac{1}{p_\varkappa^{r}\,p_\lambda^{r}}\right) \leqq \left(1+\frac{1}{(q_1-1)\,p_1^{r}}\right)\left(1+\frac{c+1}{p_1^{2r}}\right)\times \tag{27}$$

$$\times \prod_{\gamma=2}^{g+h}\left(1+\frac{1}{p_\gamma^{r}}\right)\cdot \prod_{\varkappa=1}^{g}\left(1+\frac{g+1}{p_\varkappa^{2r}}\right),$$

wobei wir beachten, daß $i \leqq g$ sein muß.

Ist $q_1 > 2$, so ergibt sich ein Widerspruch nach (24) bis (27) aus der Ungleichung

$$\prod_{\varkappa=1}^{s}\left(1+\frac{1}{p_\varkappa^{r}}\right) \leqq \prod_{\gamma=1}^{c}\left(1+\frac{1}{(q_\gamma-1)\,Q_\gamma^{r}}\right) \leqq$$

$$\leqq \left(1+\frac{1}{2\,p_1^{r}}\right)\left(1+\frac{c+1}{p_1^{2r}}\right)\left(1+\frac{g+1}{p_1^{2r}}\right)\prod_{\gamma=2}^{g+h}\left(1+\frac{1}{p_\gamma^{r}}\right)\cdot \prod_{\varkappa=2}^{g}\left(1+\frac{g+1}{p_\varkappa^{2r}}\right) \leqq \tag{28}$$

$$\leqq \left(1+\frac{2}{3\,p_1^{r}}\right)\left(1+\frac{g(g+1)}{p_1^{2r}}\right)\prod_{\gamma=2}^{g+h}\left(1+\frac{1}{p_\gamma^{r}}\right),$$

die zu

$$1+\frac{1}{p_1^{r}} \leqq \left(1+\frac{2}{3\,p_1^{r}}\right)\left(1+\frac{g(g+1)}{p_1^{2r}}\right) < \left(1+\frac{2}{3\,p_1^{r}}\right)\left(1+\frac{1}{6\,p_1^{r}}\right) < 1+\frac{1}{p_1^{r}} \tag{29}$$

führt.

§ 4

Wir können von nun an bei unserem Beweis

$$q_1 = 2 \tag{30}$$

voraussetzen. Jetzt wollen wir zunächst zeigen, daß

$$i > 0 \tag{31}$$

sein muß. Wäre $i = 0$, so erhielten wir aus (23) und (24) den Widerspruch

$$1+\frac{1}{p_1^{r}} \leqq \left(1+\frac{1}{p_1^{2r}}\right)^{c} < 1+\frac{c+1}{p_1^{2r}} < 1+\frac{1}{p_1^{r}}\,. \tag{32}$$

Aus (30) und (31) folgt

$$1+2+2^2+\cdots+2^{\beta_1} = Q_1 = p_\varkappa \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq g). \tag{33}$$

Das bedeutet, daß für hinreichend großes ϱ die Zahl n_ϱ immer eine (große) Mersennesche Primzahl als Teiler besitzen muß. Aus (26), (30) und (31) gewinnen wir die schärferen Abschätzungen

$$\prod_{\gamma=1}^{i}\left(1+\frac{1}{(q_\gamma-1)\,Q_\gamma R_\gamma}\right) \leqq \left(1+\frac{1}{p_1^{r}}\right)\prod_{\gamma=2}^{i}\left(1+\frac{1}{2\,p_\gamma^{r}}\right);$$

$$\prod_{\gamma=i+1}^{i+j}\left(1+\frac{1}{(q_\gamma-1)\,Q_\gamma R_\gamma}\right) \leqq \prod_{\varkappa=g+1}^{g+h}\left(1+\frac{1}{2\,p_\varkappa^{r}}\right)\cdot \prod_{1\leqq\varkappa\leqq\lambda\leqq g}\left(1+\frac{1}{2\,p_\varkappa^{r}\,p_\lambda^{r}}\right), \tag{34}$$

die zu

$$(35)\quad \begin{aligned} &\left(1+\frac{1}{p_1^r}+\cdots+\frac{1}{p_1^{\alpha_1 r}}\right)\prod_{\kappa=2}^{a}\left(1+\frac{1}{p_\kappa^r}\right)\leqq \\ &\leqq\left(1+\frac{1}{p_1^r}\right)\left(1+\frac{c+1}{p_1^{2r}}\right)\prod_{\gamma=2}^{g+h}\left(1+\frac{1}{2p_\gamma^r}\right)\prod_{1\leqq\kappa\leqq\lambda\leqq g}\left(1+\frac{1}{2p_\kappa^r p_\lambda^r}\right) \\ &\leqq\left(1+\frac{1}{p_1^r}\right)\left(1+\frac{c+1}{p_1^{2r}}\right)\left(1+\frac{1}{2p_1^{2r}}\right)\cdot\prod_{\gamma=2}^{g+h}\left(1+\frac{1}{2p_\gamma^r}\right)\cdot\prod_{\kappa=2}^{g}\left(1+\frac{g+1}{2p_1^r p_\kappa^r}\right) \\ &<\left(1+\frac{1}{p_1^r}+\frac{1}{p_1^{2r}}\right)\prod_{\gamma=2}^{a}\left(1+\frac{1}{p_\gamma^r}\right) \end{aligned}$$

führen. Daraus ersehen wir, daß

$$(36)\qquad \alpha_1=1$$

sein muß. Wäre nun $Q_1>p_1$, so wäre statt (34) und (35)

$$\prod_{\gamma=1}^{t}\left(1+\frac{1}{(q_\gamma-1)Q_\gamma R_\gamma}\right)\leqq\left(1+\frac{1}{p_2^r}\right)\prod_{\gamma=2}^{t}\left(1+\frac{1}{2p_{\gamma+1}^r}\right);$$

$$(37)\quad \begin{aligned} \prod_{\kappa=1}^{a}\left(1+\frac{1}{p_\kappa^r}\right)&\leqq\left(1+\frac{1}{p_2^r}\right)\prod_{\gamma=2}^{g+h}\left(1+\frac{1}{2p_{\gamma+1}^r}\right)\prod_{\kappa=1}^{g}\left(1+\frac{g+1}{2p_1^r p_\kappa^r}\right)\cdot\left(1+\frac{c+1}{p_1^{2r}}\right) \\ &\leqq\left(1+\frac{(g+1)^2}{2p_1^{2r}}\right)\left(1+\frac{c+1}{p_1^{2r}}\right)\prod_{\kappa=2}^{a}\left(1+\frac{1}{p_\kappa^r}\right), \end{aligned}$$

also auch

$$(38)\qquad 1+\frac{1}{p_1^r}\leqq\left(1+\frac{(g+1)^2}{2p_1^{2r}}\right)\left(1+\frac{c+1}{p_1^{2r}}\right)$$

gültig, was aber bei großen p_1 einen Widerspruch darstellt. Also muß

$$(39)\qquad 1+2+2^2+\cdots+2^{\beta_1}=Q_1=p_1$$

sein. Mit Hilfe von (22) und (36) ergibt sich daraus für $r=1$

$$(40)\quad \begin{aligned} &2^{\beta_1+1}\cdot\prod_{\kappa=2}^{a}(1+p_\kappa+p_\kappa^2+\cdots+p_\kappa^{\alpha_\kappa})\cdot p_1\cdot\prod_{\gamma=2}^{c}(q_\gamma-1)\,Q_\gamma \\ &=p_1\cdot\prod_{\kappa=2}^{a}p_\kappa^{\alpha_\kappa}\cdot 2^{\beta_1+1}\cdot\prod_{\gamma=2}^{c}q_\gamma^{\beta_\gamma+1}. \end{aligned}$$

Es muß dann $c=a=1$ sein. Damit ist die Richtigkeit von Satz 1 für $r=1$ bewiesen.

§ 5

Wir nehmen jetzt

$$(41)\qquad r>1$$

an. Wäre $Q_\gamma=p_1^2$, so hätten wir nach (39)

$$(42)\qquad 1+q_\gamma+q_\gamma^2+\cdots+q_\gamma^{\beta_\gamma}=(2^{\beta_1+1}-1)^2,$$

woraus wir

$$(43)\qquad q_\gamma(1+q_\gamma+\cdots+q_\gamma^{\beta_\gamma-1})=2^{\beta_1+2}(2^{\beta_1}-1)$$

erhielten. Aus dieser Gleichung leiten wir jetzt einen Widerspruch her. Denn sei $2^\xi \mid 1 + q_\gamma$; $2^{\xi+1} \nmid 1 + q_\gamma$, so folgt aus (43)

$$(44)\qquad \begin{gathered} q_\gamma (1 + q_\gamma)(1 + q_\gamma^2)(1 + q_\gamma^{2^2}) \cdots \left(1 + q_\gamma^{2^{\beta_1+2-\xi}}\right) \Big| \, 2^{\beta_1+2}(2^{\beta_1} - 1); \\ 3^{2^{\beta_1+3-\xi}} \leqq q_\gamma^{2^{\beta_1+3-\xi}} < 2^{2\beta_1+2}. \end{gathered}$$

Nun können wir annehmen, daß $\beta_1 + 3 - \xi > \frac{\beta_1+1}{2}$ ist. Dann ist die Ungleichung von (44) sicher falsch für hinreichend große β_1. Also ist

$$(45)\qquad Q_\gamma \neq p_1^2.$$

Sei jetzt

$$(46)\qquad \begin{gathered} p_1 < p_2 < \cdots < p_{s'} < p_1 p_2 < p_{s'+1}; \\ p_1 = Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_{t'} < p_1 p_2 \leqq Q_{t'+1}, \end{gathered}$$

so erhalten wir

$$(47)\qquad \begin{aligned} &\prod_{\gamma=1}^{c} \left(1 + \frac{1}{(q_\gamma - 1) Q_\gamma^r}\right) < \left(1 + \frac{1}{p_1^r}\right) \prod_{\gamma=2}^{t'} \left(1 + \frac{1}{2 p_\gamma^r}\right) \prod_{\gamma=t'+1}^{c} \left(1 + \frac{1}{2 p_1^r p_2^r}\right) \\ &< \left(1 + \frac{1}{p_1^r}\right)\left(1 + \frac{1}{2 p_2^r}\right)\left(1 + \frac{c+1}{2 p_1^r p_2^r}\right) \cdot \prod_{\gamma=3}^{t'} \left(1 + \frac{1}{2 p_\gamma^r}\right) < \prod_{\varkappa=1}^{a} \left(1 + \frac{1}{p_\varkappa^r}\right), \end{aligned}$$

womit Satz 1 auch für $r > 1$ bewiesen ist.

§ 6

Wir wollen nun einige Folgerungen aus Satz 1 herleiten. Dazu erklären wir zunächst die Menge $\mathfrak{N}(K_0, N_0)$ als die Menge, die genau aus den natürlichen Zahlen n besteht, welche die beiden Bedingungen

$$(48)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \frac{\sigma_r(n)}{n^r} = \frac{Z}{N} \quad \text{mit} \quad (Z, N) = 1 \quad \text{und} \quad N \leqq N_0; \\ &\text{b)}\quad V(n) \leqq K_0 \end{aligned}$$

mit vorgegebenen natürlichen Zahlen N_0, K_0 erfüllen, wobei wir für r alle natürlichen Zahlen zulassen. Es bezeichne $A(K_0, N_0, x)$ die Anzahl der $n \in \mathfrak{N}(K_0, N_0)$, $n \leqq x$. $\mathfrak{N}(\infty, N_0)$ soll die Menge aller n bedeuten, welche die Bedingung (48), a) erfüllen. $A(\infty, N_0, x)$ sei sinngemäß wie oben erklärt. Wir bemerken jetzt, daß für $n, r > 1$ gilt

$$(49)\qquad \begin{aligned} 1 + \frac{1}{N} \leqq \frac{Z}{N} = \frac{\sigma_r(n)}{n^r} &= \prod_{\varkappa=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_\varkappa^r} + \cdots + \frac{1}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa r}}\right) \\ &< \zeta(r) \leqq \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2. \end{aligned}$$

Aus (49) und (48), a) folgt

$$(50)\qquad N < Z < 2N \leqq 2N_0.$$

Wir sehen daraus, daß $\frac{Z}{N}$ nicht mehr als $\binom{N_0}{2}$ verschiedene Werte annehmen kann. Die Ungleichung $1 + \frac{1}{N_0} < \zeta(r)$ liefert auch für r nur endlich viele Möglichkeiten.

Satz 2. *Es ist* $A(K_0, N_0, x) = O\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right)$.

Beweis. Sei zunächst $r > 1$. Wie wir oben sahen, bestehen für r und $\frac{Z}{N}$ dann nur endlich viele Möglichkeiten. Nach Satz 1 existieren also nur endlich viele Zahlen, die bei $r > 1$ die Bedingungen (48), a) und b) erfüllen. Wir können daher im weiteren Beweis $r = 1$ voraussetzen. Dann folgt aus

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{Z}{N} < K_0 + 1 \tag{51}$$

sofort

$$Z < N_0(K_0 + 1). \tag{52}$$

Die Anzahl der verschiedenen in Frage kommenden Zahlen $\frac{Z}{N}$ ist also wiederum endlich. Aus Satz 1 folgt ferner, daß es nur endlich viele ungerade Zahlen m geben kann, die die beiden Bedingungen

$$\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{Z}{2N}\,; \quad V(m) \leq K_0 - 2 \tag{53}$$

erfüllen. Daher ist $A(K_0, N_0, x)$ kleiner als eine Konstante, multipliziert mit der Anzahl der geraden vollkommenen Zahlen $\leq x$. Das liefert den Beweis von Satz 2.

§ 7

Wir betrachten zum Schluß die Menge $\mathfrak{N}(\infty, N_0)$. Es gilt

Satz 3. *Es ist* $A(\infty, N_0, x) = o(x^{1/2+\varepsilon})$, *bei beliebig vorgegebenem* $\varepsilon > 0$.

Beweis. Nach § 6 brauchen wir nur solche n zu betrachten, für die $V(n) = k$ größer als eine beliebig vorgegebene Zahl K_0 ist. Aus

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \leq x \tag{54}$$

folgt zunächst für k die Abschätzung

$$k^{k/2} < k! < p_1 \cdots p_k \leq x; \quad k + 1 < \log x. \tag{55}$$

Wir erhalten damit

$$\frac{Z}{N} < k + 1 < \log x. \tag{56}$$

Die Anzahl der verschiedenen in Frage kommenden $\frac{Z}{N}$ ist also nach oben beschränkt durch

$$N_0^2\,(k + 1) < N_0^2 \log x. \tag{57}$$

Wir greifen jetzt eine bestimmte rationale Zahl $\frac{Z}{N}$ heraus und halten sie fest. Wir denken uns die natürlichen Zahlen $n \leq x$ in zwei teilerfremde Faktoren zerlegt:

$$n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} = n' \cdot n''; \qquad (n', n'') = 1, \tag{58}$$

wobei n' gleich dem Produkt aller in n enthaltenen $p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ mit $\alpha_\varkappa > 1$ sei. Dann

ist n'' eine quadratfreie Zahl. Wir behaupten nun, daß die Zuordnung

$$n \leftrightarrow n' \tag{59}$$

eineindeutig sei. Daß jedem n genau ein n' entspricht, ist klar. Sei jetzt n' gegeben und sei

$$n_1 = n' \cdot n_1'' < n_2 = n' \cdot n_2''\,;\quad (n', n_1'' \cdot n_2'') = 1\,;$$
$$\frac{\sigma_r(n_i)}{n_i^r} = \frac{\sigma_r(n')}{n'^r} \cdot \frac{\sigma_r(n_i'')}{n_i''^r} = \frac{Z}{N} \quad \text{für} \quad i = 1, 2. \tag{60}$$

Die n_i'' sind nach den obigen Ausführungen quadratfrei. Es sei ferner

$$n_i'' = h \cdot n_i'''\,;\ (n_1''', n_2''') = 1. \tag{61}$$

Wir erhalten aus (60) und (61)

$$N\,\sigma_r(n'\,h)\,\sigma_r(n_i''') = Z\,(n'\,h)^r\, n_i'''^r \qquad (i = 1, 2). \tag{62}$$

Das liefert

$$1 < \frac{\sigma_r(n_1''')}{n_1'''^r} = \frac{\sigma_r(n_2''')}{n_2'''^r}\,. \tag{63}$$

Daraus folgt wegen (61)

$$n_i'''^r \,\big|\, \sigma_r(n_i''') \qquad (i = 1, 2). \tag{64}$$

Es muß also

$$\frac{\sigma_r(n_i''')}{n_i'''^r} = \lambda > 1 \qquad (i = 1, 2) \tag{65}$$

sein, wobei λ eine natürliche Zahl bedeutet. Nach (49) ergibt sich ein Widerspruch, wenn $r > 1$ ist. Für $r = 1$ erhalten wir den Widerspruch so: Es sei

$$n_1''' = q_1\,q_2 \ldots q_s \quad \text{mit} \quad q_1 < \cdots < q_s \tag{66}$$

die Primfaktorenzerlegung der quadratfreien Zahl n_1'''. Aus (65) folgt

$$(1 + q_1)\,(1 + q_2) \ldots (1 + q_s) = \lambda\, q_1 \ldots q_s. \tag{67}$$

Das führt zu $q_1 = 2, q_2 = q_s = 3, \lambda = 2$. Aus $\frac{\sigma(n_2''')}{n_2'''} = 2$ folgt aber $n_1''' = n_2''' = 6$ entgegen der Annahme (60). Damit ist die Richtigkeit von (59) gezeigt. Aus (57) und (59) ergibt sich

$$A(\infty, N_0, x) < N_0^2 \cdot \log x \cdot A'(x), \tag{68}$$

wobei $A'(x)$ die Anzahl der $n' = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \leqq x$ mit $\alpha_\varkappa > 1$ für $\varkappa = 1, \ldots, k$ bedeuten soll. Wir ordnen jetzt jedem n' die Zahl

$$w' = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\left[\frac{\alpha_\varkappa}{2}\right]} \leqq \sqrt{n'} \leqq \sqrt{x} \tag{69}$$

zu. Diese Zuordnung ist zwar eindeutig, aber nicht mehr eineindeutig. Zu einem w' können aber nicht mehr als 2^k verschiedene n' gehören. Ähnlich wie in (55) erhalten wir

$$k^k < x. \tag{70}$$

Beachten wir, daß $k > K_0 > 2^{\frac{2}{\varepsilon}}$ bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ angenommen werden kann, so folgt

$$2^k = \left(2^{\frac{2}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}k} < k^{k \cdot \frac{\varepsilon}{2}} < x^{\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{71}$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$A(\infty, N_0, x) < N_0^2 \cdot \log x \cdot x^{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = o\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{72}$$

womit die Richtigkeit von Satz 3 bewiesen ist.

Zusatz bei der Korrektur. Verf. trug u. a. über die vorliegende Arbeit auf dem IV. Österreichischen Mathematikerkongreß in Wien vor. In einem Brief vom 2. 10. 1956 bemerkt Herr Th. Skolem, daß der Hilfssatz aus § 1 bereits ohne Anwendung des Satzes von Thue aus einem Ergebnis von B. Delaunay und T. Nagell folgt, welches besagt, daß (5) nur endlich viele ganzzahlige Lösungen X, Y besitzt.

Literatur

[1] Kanold, H.-J.: Über einen Satz von L. E. Dickson. Math. Ann. 131, 167—179 (1956). — [2] Kanold, H.-J.: Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. I. J. reine u. angew. Math. 187, 169—182 (1949). — [3] Landau, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 3, S. 58/59. Leipzig: S. Hirzel 1927.

(Eingegangen am 23. April 1956)

LANDSBERG, M.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 256—262 (1956)

Filter mit endlichem Index und Linearformen auf Produkten R^J

Von

MAX LANDSBERG in Dresden

Einleitung und Ergebnisse

Mit J bezeichnen wir im folgenden eine unendliche Menge. Abweichend von BOURBAKI verstehen wir unter einem Filter auf J ein nichtleeres System von Teilmengen von J, das mit A auch jedes $X \subset J$ mit $X \supset A$ und mit A, B auch immer $A \cap B$ enthält. Wir nennen einen Filter Φ eigentlich, wenn die leere Menge θ nicht zu Φ gehört. Offensichtlich gibt es genau einen uneigentlichen Filter auf J, nämlich die Potenzmenge $\mathfrak{P}(J)$ von J. Ein Filter Φ wird als Ultrafilter bezeichnet, wenn für jedes $X \subset J$ entweder $X \in \Phi$ oder $J - X \in \Phi$ gilt. Insbesondere ist also die Potenzmenge $\mathfrak{P}(J)$ ein Ultrafilter. Der Filter Φ wird δ-Filter genannt, wenn für jede Folge $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ von Filtermengen auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ zu Φ gehört. Alle $X \subset J$ mit endlichem $J - X$ bilden den sog. charakteristischen Filter von J. Einen Filter, der feiner als der charakteristische Filter ist, nennt man hypercharakteristisch. Der Filter Φ heißt prinzipal, wenn es ein $J_0 \subset J$ gibt, so daß Φ aus allen $X \subset J$ mit $X \supset J_0$ besteht. Man sieht, daß der Ultrafilter $\mathfrak{P}(J)$ hypercharakteristisch und prinzipal ist.

Wir sagen, daß ein Filter einen endlichen Index hat, wenn er mit dem Durchschnittsfilter von endlich vielen Ultrafiltern zusammenfällt. $D(\Phi)$ sei die Menge aller Ultrafilter, die den Filter Φ enthalten. Man erkennt leicht, daß ein Filter Φ genau dann einen endlichen Index besitzt, wenn $D(\Phi)$ endlich ist. Die Kardinalzahl von $D(\Phi)$ nennen wir den Index von Φ. Es ist klar, daß $\mathfrak{P}(J)$ den Index 1 hat, während jeder eigentliche Ultrafilter den Index 2 besitzt. Ist Φ kein Ultrafilter, so ist offenbar $D(\Phi) > 2$. Ist Φ eigentlich, so sei $Q(\Phi)$ das System aller $X \subset J$ mit $X \cap A \neq \theta$ $(A \in \Phi)$. Es wird $Q(\mathfrak{P}(J)) = \mathfrak{P}(J)$ gesetzt.

Ein Filter Φ ist nun genau dann von endlichem Index, wenn es endlich viele Ultrafilter gibt, deren Vereinigung mit $Q(\Phi)$ zusammenfällt. Der Filter Φ besitzt genau dann den Index n $(n = 2, 3, \ldots)$, wenn es in $Q(\Phi)$ $n - 1$ paarweise fremde Elemente gibt, während n Elemente aus $Q(\Phi)$ in keinem Fall paarweise fremd sind. Ist Φ von endlichem Index, so ist Φ genau dann prinzipal bzw. ein δ-Filter, wenn alle Ultrafilter aus $D(\Phi)$ prinzipal bzw. δ-Filter sind.

R sei der Körper der reellen Zahlen. Das Produkt R^J, d. h. den linearen Raum aller Abbildungen $j \to x(j)$ von J in R, denken wir uns mit der üblichen

Topologie versehen. R^J ist dann ein lokalkonvexer Hausdorffraum. $(R^J)'$ sei der duale Raum von R^J, d. h. der lineare Raum aller stetigen Linearformen auf R^J. Mit o wird das Nullelement von $(R^J)'$ bezeichnet. Ist nun $u \neq o$ eine Linearform auf R^J, so sei $\Phi\{u\}$ das System aller nichtleeren $A \subset J$, für die aus $x \in R^J$, $x(j) = 0 (j \in A)$ stets $u(x) = 0$ folgt. Es wird $\Phi\{o\} = \mathfrak{P}(J)$ gesetzt. Für jede Linearform u auf R^J ist $\Phi\{u\}$ ein Filter auf J. Wir sagen kurz, daß die Linearform u einen endlichen Index hat, wenn das für $\Phi\{u\}$ gilt. Man erkennt leicht, daß für eine stetige Linearform u der zugehörige Filter $\Phi\{u\}$ von endlichem Index und prinzipal, also auch ein δ-Filter ist. Ist $(R^J)_0$ die Menge aller Linearformen auf R^J, deren zugehöriger Filter von endlichem Index und zugleich ein δ-Filter ist, so ist also $(R^J)' \subset (R^J)_0$.

Eine Linearform u auf R^J ist nun genau dann stetig, wenn der Filter $\Phi\{u\}$ eine endliche Menge enthält. Eine Linearform u mit einem endlichen Index ist genau dann stetig, wenn alle Ultrafilter aus $D(\Phi\{u\})$ prinzipal sind. Genau dann fällt $(R^J)_0$ mit $(R^J)'$ zusammen, wenn jeder Ultrafilter auf J, der ein δ-Filter ist, prinzipal ist.

§ 1. Filter von endlichem Index

Bemerkung 1. Ein Filter Φ ist genau dann von endlichem Index (s. Einleitung), wenn $D(\Phi)$ endlich ist.

Beweis. Wir können Φ als eigentlich voraussetzen. a) Bekanntlich ist jeder Filter der Durchschnittsfilter aller ihn enthaltenden Ultrafilter. Ist also $D(\Phi)$ endlich, so ist Φ nach der oben gegebenen Definition von endlichem Index.

b) Φ besitze einen endlichen Index. Es gibt dann eine Menge $U = \{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$ von eigentlichen Ultrafiltern mit $\bigcup_{k=1}^{n} \Psi_k = \Phi$. Ψ sei ein eigentlicher Ultrafilter, der Oberfilter von Φ ist. $\Psi \in U$ soll gezeigt werden. Wir nehmen an, daß Ψ mit keinem $\Psi_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ identisch ist. Es gibt dann zu jedem k ein $A_k \in \Psi$ mit $A_k \notin \Psi_k$. Setzt man $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A$, so gehört A zu Ψ und $J-A$ zu allen Ψ_k. Also gilt $J-A \in \bigcap_{k=1}^{n} \Psi_k = \Phi$ und damit auch $J-A \in \Psi$. $A \in \Psi$, $J-A \in \Psi$ ist aber beim eigentlichen Filter Ψ nicht möglich. Ψ gehört doch zu U, es ist also $D(\Phi) = \{\mathfrak{P}(J)\} \cup U = \{\mathfrak{P}(J), \Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$.

Der Teil b) des letzten Beweises enthält

Korollar 1. $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$ sei eine Menge von n eigentlichen Ultrafiltern. Ist Φ der Durchschnittsfilter der $\Psi_k (k = 1, 2, \ldots, n)$, so ist

$$D(\Phi) = \{\mathfrak{P}(J), \Psi_1, \ldots, \Psi_n\}.$$

Satz 1. *Ein Filter Φ ist genau dann von endlichem Index, wenn es endlich viele Ultrafilter gibt, deren Vereinigung mit $Q(\Phi)$* (s. Einleitung) *zusammenfällt.*

Beweis. Wir können Φ als eigentlich annehmen. a) $U = \{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$ sei eine Menge von n Ultrafiltern mit $\bigcup_{k=1}^{n} \Psi_k = Q(\Phi)$. Wegen $\theta \notin Q(\Phi)$ ist

$\mathfrak{P}(J) \notin U$, die $\Psi_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ sind also alle eigentlich. Wir zeigen zunächst $\Phi \subset \bigcap_{k=1}^{n} \Psi_k$. Es sei A ein Element von Φ, das nicht zu einem gewissen Ψ_k gehört. Dann gehört $J - A$ zu Ψ_k, also auch zu $Q(\Phi)$. $A \in \Phi$, $J - A \in Q(\Phi)$ ist aber wegen $(J - A) \cap A = \theta$ beim eigentlichen Filter Φ nicht möglich. Nun wird noch $\bigcap_{k=1}^{n} \Psi_k \subset \Phi$ gezeigt. P gehöre zu jedem Ψ_k. Dann gehört $J - P$ zu keinem Ψ_k, also auch nicht zu $Q(\Phi)$. Es existiert daher ein $A \in \Phi$ mit $(J - P) \cap A = \theta$. Das bedeutet aber $A \subset P$, P ist somit ein Element des Filters Φ. b) Φ sei von endlichem Index. Es gibt dann eine Menge $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$ von n eigentlichen Ultrafiltern mit $\bigcap_{k=1}^{n} \Psi_k = \Phi$. $\bigcup_{k=1}^{n} \Psi_k \subset Q(\Phi)$ ist klar. Es sei nun P ein Element von $Q(\Phi)$, das zu keinem $\Psi_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ gehört. Dann gehört $J - P$ zu jedem Ψ_k, also auch zu Φ. $J - P \in \Phi$, $P \in Q(\Phi)$ ist aber wegen $P \cap (J - P) = \theta$ beim eigentlichen Filter Φ nicht möglich. Daher gilt auch $Q(\Phi) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Psi_k$. Der Teil b) des letzten Beweises enthält

Korollar 2. $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$ sei eine Menge von n eigentlichen Ultrafiltern. Ist Φ der Durchschnittsfilter der $\Psi_k (k = 1, 2, \ldots, n)$, so ist $\bigcup_{k=1}^{n} \Psi_k = Q(\Phi)$.

Hilfssatz 1. Φ sei ein Filter auf J. A, B seien Teilmengen von J mit $A \cup B \in Q(\Phi)$. Dann gehört A oder B zu $Q(\Phi)$.

Beweis. Wir können $\Phi \neq \mathfrak{P}(J)$ voraussetzen. Wir nehmen $A \notin Q(\Phi)$ und $B \notin Q(\Phi)$ an. Es gibt dann Elemente $A', B' \in \Phi$ mit $A \cap A' = \theta$, $B \cap B' = \theta$. Dann ist aber $(A \cup B) \cap A' \cap B' = \theta$, was nicht möglich sein kann, da $A \cup B$ nach Voraussetzung zu $Q(\Phi)$ gehört und $A' \cap B'$ ein Element von Φ ist.

Bemerkung 2. Φ sei ein Filter auf J. $P_1, \ldots, P_n$ seien n paarweise fremde Elemente aus $Q(\Phi)$. $n + 1$ paarweise fremde Elemente soll es in $Q(\Phi)$ nicht geben. Mit Ψ wird das System aller $X \subset J$ mit $P_1 \cap X \in Q(\Phi)$ bezeichnet. Dann ist Ψ ein eigentlicher Ultrafilter aus Elementen von $Q(\Phi)$, der Oberfilter von Φ ist.

Beweis. Nach unseren Voraussetzungen ist $\Phi \neq \mathfrak{P}(J)$, d. h. Φ ist eigentlich. Offensichtlich gilt $X \neq \theta$ und $X \in Q(\Phi)$ für jedes $X \in \Psi$. Wegen $J \in \Psi$ ist Ψ nicht leer. Man sieht, daß $A \in \Psi$, $X \subset J$, $A \subset X$ stets $X \in \Psi$ nach sich zieht. Wir zeigen nun, daß aus $A, B \in \Psi$ immer $A \cap B \in \Psi$ folgt. Wäre nämlich $A \cap B$ kein Element von Ψ, so würde aus $A \cap P_1 = A' \in Q(\Phi)$, $B \cap P_1 = B' \in Q(\Phi)$ und aus Hilfssatz 1 folgen, daß $A'' = A' - (A \cap B)$ und $B'' = B' - (A \cap B)$ zum System $Q(\Phi)$ gehören. Dann gibt es aber im Gegensatz zu den Voraussetzungen in $Q(\Phi)$ $n + 1$ paarweise fremde Elemente, nämlich $P_2, P_3, \ldots, P_n, A'', B''$. Ψ ist also ein eigentlicher Filter, der nur aus Elementen von $Q(\Phi)$ besteht. Es sei nun Y eine Teilmenge von J mit $Y \notin \Psi$. Wir wollen $J - Y \in \Psi$ zeigen. $Y \notin \Psi$ bedeutet $P_1 \cap Y \notin Q(\Phi)$. Nach Hilfssatz 1 gehört $P_1 \cap (J - Y)$ zu $Q(\Phi)$, also gilt $J - Y \in \Psi$. Ψ ist somit ein Ultrafilter. Es ist noch nachzuweisen, daß Ψ ein Oberfilter von Φ ist.

Es sei A ein Element von Φ mit $A \notin \Psi$. Dann gehört $J - A$ zu Ψ, also auch zu $Q(\Phi)$. Das ist aber wegen $(J - A) \cap A = \theta$ nicht möglich.

Bemerkung 3. Es sei Φ ein Filter von endlichem Index und Ψ ein eigentlicher Ultrafilter aus $D(\Phi)$. Dann existiert ein $P \in \Psi$, so daß Ψ aus allen $X \subset J$ mit $P \cap X \in Q(\Phi)$ besteht.

Beweis. Offenbar ist Φ eigentlich. Nach den vorangegangenen Überlegungen ist $D(\Phi)$ von der Gestalt $D(\Phi) = \{\mathfrak{P}(J), \Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$, wo die $\Psi_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ eigentliche Ultrafilter sind. Man stellt leicht fest, daß es zu jedem Ψ_k ein $P_k \in \Psi_k$ gibt, so daß die P_k paarweise fremd sind. Wegen der aus Korollar 2 folgenden Beziehung $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \Psi_k = Q(\Phi)$ kann es nicht $n + 1$ paarweise fremde Elemente in $Q(\Phi)$ geben. Alle $X \subset J$ mit $P_k \cap X \in Q(\Phi)$ bilden nach Bemerkung 2 einen eigentlichen Ultrafilter Ψ_k', der Oberfilter von Φ ist. Ψ_k' gehört zu $D(\Phi)$ und muß wegen $P_k \in \Psi_k'$ mit Ψ_k zusammenfallen. Aus der Tatsache, daß Ψ mit (genau) einem Ψ_k identisch sein muß, folgt dann die Behauptung.

Bemerkung 4. Φ sei ein Filter auf J. $P_1, \ldots, P_n$ seien n paarweise fremde Elemente aus $Q(\Phi)$. $n + 1$ paarweise fremde Elemente soll es in $Q(\Phi)$ nicht geben. $\Psi_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichne das System aller $X \subset J$ mit $P_k \cap X \in$ $\in Q(\Phi)$. Dann ist $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \Psi_k = \Phi$.

Beweis. Nach Bemerkung 2 ist jedes System Ψ_k ein eigentlicher Ultrafilter, der Oberfilter von Φ ist. Es ist also $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \Psi_k \supset \Phi$. Wir zeigen noch $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \Psi_k \subset \Phi$. Es gehöre P zu jedem Ψ_k, also $J - P$ zu keinem Ψ_k. Es gibt dann zu jedem k ein gewisses $A_k \in \Phi$ mit $(J - P) \cap P_k \cap A_k = \theta$. Dann ist $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ ein Element von Φ mit $(J - P) \cap A \cap P_k = \theta$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. $(J - P) \cap A$ kann wegen der letzten Beziehung nicht zu $Q(\Phi)$ gehören, da dann im Gegensatz zu unseren Voraussetzungen $n + 1$ paarweise fremde Elemente in $Q(\Phi)$ existieren würden, nämlich $P_1, P_2, \ldots, P_n, (J - P) \cap A$. Wegen $(J - P) \cap A \notin Q(\Phi)$ gibt es ein $B \in \Phi$ mit $(J - P) \cap A \cap B = \theta$. Das besagt aber, daß P das Element $A \cap B$ aus Φ enthält, also selbst zum Filter Φ gehört.

Satz 2. *Ein Filter Φ besitzt genau dann den Index n $(n = 2, 3, \ldots)$, wenn es in $Q(\Phi)$ $n - 1$ paarweise fremde Elemente gibt, während n Elemente aus $Q(\Phi)$ in keinem Fall paarweise fremd sind.*

Beweis. a) $P_1, \ldots, P_{n-1}$ seien $n - 1$ paarweise fremde Elemente aus $Q(\Phi)$. n paarweise fremde Elemente soll es in $Q(\Phi)$ nicht geben. $\Psi_k (k = 1, 2, \ldots, n - 1)$ bedeute das System aller $X \subset J$ mit $P_k \cap X \in Q(\Phi)$. Nach Bemerkung 2 ist Ψ_k ein eigentlicher Ultrafilter und ein Oberfilter von Φ. Nach Bemerkung 4 ist der Durchschnittsfilter der Ψ_k mit Φ identisch. Nach Korollar 1 ist $D(\Phi) = \{\mathfrak{P}(J), \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}\}$. Φ hat also den Index n. b) Nun sei Φ vom Index n. Es gibt dann eine Menge $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}\}$ von $n - 1$ eigentlichen

Ultrafiltern mit $\bigcap_{k=1}^{n-1} \Psi_k = \Phi$. Man sieht leicht ein, daß es zu jedem Ψ_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) ein gewisses $P_k \in \Psi_k$ gibt, so daß die P_k paarweise fremd sind. n paarweise fremde Elemente kann es in $Q(\Phi)$ wegen der aus Korollar 2 folgenden Beziehung $\bigcup_{k=1}^{n-1} \Psi_k = Q(\Phi)$ nicht geben.

Anmerkung. Man erkennt leicht, daß ein Filter Φ genau dann hypercharakteristisch ist, wenn jeder Ultrafilter aus $D(\Phi)$ hypercharakteristisch ist.

Satz 3. *Φ sei ein Filter von endlichem Index. Φ ist genau dann prinzipal, wenn alle Ultrafilter aus $D(\Phi)$ prinzipal sind.*

Beweis. Eine einfache Überlegung zeigt, daß Φ prinzipal ist, wenn alle Ultrafilter aus $D(\Phi)$ prinzipal sind. Es sei nun Φ prinzipal und eigentlich. Φ besteht dann aus allen $X \subset J$, die eine gewisse nichtleere Teilmenge J_0 von J enthalten. Gehört j zu J_0, so bilden alle $Y \subset J$ mit $Y \supset \{j\}$ einen eigentlichen prinzipalen Ultrafilter Ψ_j. Offensichtlich kann es nur endlich viele Ψ_j geben, und es ist $\bigcap_{j \in J_0} \Psi_j = \Phi$. Nach Korollar 1 ist jeder eigentliche Ultrafilter aus $D(\Phi)$ mit (genau) einem Ψ_j identisch, also prinzipal.

Satz 4. *Φ sei ein Filter von endlichem Index. Φ ist genau dann ein δ-Filter, wenn alle Ultrafilter aus $D(\Phi)$ δ-Filter sind.*

Beweis. Falls alle Ultrafilter aus $D(\Phi)$ δ-Filter sind, ist ersichtlich auch Φ ein δ-Filter. Es sei nun Φ ein δ-Filter und eigentlich. Ψ sei ein eigentlicher Ultrafilter aus $D(\Phi)$. Wir wollen zeigen, daß auch Ψ ein δ-Filter ist. Nach Bemerkung 3 existiert ein $P \in \Psi$, so daß Ψ aus allen $X \subset J$ mit $X \cap P \in Q(\Phi)$ besteht. Es sei nun $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge von Elementen aus Ψ mit $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \notin \Psi$. Dann ist $J - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (J - A_n)$ ein Element von Ψ, wobei aber kein $J - A_n$ zu Ψ gehört. Es gibt dann zu jedem n ein $B_n \in \Phi$ mit $(J - A_n) \cap P \cap B_n = \theta$. Nach Voraussetzung gehört $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ zum Filter Φ, und es ist $(J - A) \cap P \cap B = \theta$. Das ist aber wegen $J - A, P, B \in \Psi$ nicht möglich. A muß zu Ψ gehören, Ψ ist ein δ-Filter.

§ 2. Linearformen auf R^J

Bemerkung 5. Ist u eine Linearform auf R^J, so ist $\Phi\{u\}$ (s. Einleitung) ein Filter auf J.

Beweis. Wir können $u \neq o$ annehmen. Wegen $J \in \Phi\{u\}$ ist $\Phi\{u\}$ nicht leer. Offensichtlich folgt aus $A \in \Phi\{u\}$, $X \subset J$, $A \subset X$ stets $X \in \Phi\{u\}$. Es seien nun A, B zwei beliebige Elemente aus $\Phi\{u\}$ und $A_0 = A \cap B$. Dann ist zunächst $A_0 \neq \theta$. Denn aus $A_0 = \theta$ würde für beliebiges $x \in R^J$

$$u(x) = u(x-y) + u(y) = 0$$

(d. h. $u = o$) folgen, falls man $y(j) = 0$ ($j \in A$), $y(j) = x(j)$ ($j \in J - A$) setzt. Es sei nun z ein Element aus R^J mit $z(j) = 0$ ($j \in A_0$). Dann ist $u(z) = u(z-y) + u(y) = 0$, wenn man jetzt $y(j) = 0$ ($j \in A$), $y(j) = z(j)$ ($j \in J - A$) setzt. $A_0 = A \cap B$ gehört also zu $\Phi\{u\}$, $\Phi\{u\}$ ist ein Filter.

Satz 5. *Eine Linearform u auf R^J ist genau dann stetig, wenn der zu u gehörige Filter $\Phi\{u\}$ eine endliche Menge enthält.*

Beweis. Bei festem $j \in J$ ist durch die Abbildung $x \to x(j)$ von R^J in R ein Element u_j aus $(R^J)'$ erklärt. Jede stetige Linearform u auf R^J ist von der Gestalt $u = a_1 u_{j_1} + \cdots + a_n u_{j_n}$ (a_k reell, $j_k \in J$; $k = 1, 2, \ldots, n$). Wir können $u \neq o$ voraussetzen. a) Die nichtleere endliche Menge $A = \{j_1, \ldots, j_n\}$ gehöre zum Filter $\Phi\{u\}$. Ist j irgendein Element aus J, so soll mit h_j die charakteristische Funktion von $\{j\}$ bezeichnet werden. x sei ein beliebiges Element aus R^J. Wir setzen

$$y = x - u_{j_1}(x)\, h_{j_1} - \cdots - u_{j_n}(x)\, h_{j_n}.$$

Dann ist $y(j_1) = y(j_2) = \cdots = y(j_n) = 0$, also $u(y) = 0$, somit

$$u = u(h_{j_1})\, u_{j_1} + \cdots + u(h_{j_n})\, u_{j_n}.$$

u ist stetig. b) u sei stetig. u ist dann von der Gestalt $u = a_1 u_{j_1} + \cdots + a_n u_{j_n}$. Verschwindet ein $x \in R^J$ auf der Menge $A = \{j_1, \ldots, j_n\}$, so ist offenbar $u(x) = 0$. Also gehört die (nichtleere) endliche Menge A zum Filter $\Phi\{u\}$.

Satz 6. *u sei eine Linearform auf R^J mit endlichem Index* (s. Einleitung). *u ist genau dann stetig, wenn alle Ultrafilter aus $D(\Phi\{u\})$ prinzipal sind.*

Beweis. Wir können $u \neq o$ voraussetzen. a) Alle zu $D(\Phi\{u\})$ gehörigen Ultrafilter seien prinzipal. Dann ist auch $\Phi\{u\}$ prinzipal nach Satz 3. $\Phi\{u\}$ besteht aus allen $X \subset J$, die eine gewisse (nichtleere) Teilmenge A von J enthalten. Da offensichtlich $\{j\} \in Q(\Phi\{u\})$ gilt für jedes $j \in A$, muß A nach Satz 2 endlich sein. Nach Satz 5 ist u stetig. b) u sei stetig. u ist dann von der Gestalt $u = a_1 u_{j_1} + \cdots + a_n u_{j_n}$. Man stellt leicht fest, daß $\Phi\{u\}$ aus allen $X \subset J$ mit $X \supset \{j_1, \ldots, j_n\}$ besteht. $\Phi\{u\}$ ist daher prinzipal. Also sind es nach Satz 3 auch alle Ultrafilter aus $D(\Phi\{u\})$.

Hilfssatz 2. *Ψ sei ein Ultrafilter auf J und ein δ-Filter. Es existiert dann eine Linearform w auf R^J, deren zugehöriger Filter $\Phi\{w\}$ mit Ψ identisch ist.*

Beweis. Wir können Ψ als eigentlich annehmen. x sei ein beliebiges Element aus R^J. Man bestätigt leicht die Existenz einer Folge $(I_n)_{n=1,2,\ldots}$ von abgeschlossenen Intervallen in R, wo I_n ($n = 1, 2, \ldots$) die Länge $1/2^n$ hat und $I_n \supset I_{n+1}$, $x^{-1}(I_n) \in \Psi$ ist. $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} x^{-1}(I_n)$ gehört dann nach Voraussetzung zu Ψ und für jedes $j \in S$ ist $x(j) = \varrho$, wenn ϱ die durch die Intervallschachtelung $(I_n)_{n=1,2,\ldots}$ bestimmte reelle Zahl ist. Man sieht, daß es zu jedem $x \in R^J$ genau eine reelle Zahl $w(x)$ und eine Filtermenge A mit $x(j) = w(x)$ ($j \in A$) gibt. Ersichtlich ist w eine von o verschiedene Linearform auf R^J. Wir wollen $\Phi\{w\} = \Psi$ zeigen. Es sei $A \in \Phi\{w\}$, jedoch $A \notin \Psi$. Wir nehmen nun das Element $y \in R^J$ mit $y(j) = 0$ ($j \in A$), $y(j) = 1$ ($j \in J - A$). Wegen $A \in \Phi\{w\}$, $y(j) = 0$ ($j \in A$) ist $w(y) = 0$. Wegen $J - A \in \Psi$, $y(j) = 1$ ($j \in J - A$) ist aber auch $w(y) = 1$. Widerspruch. Also gilt $\Phi\{w\} \subset \Psi$. Nun sei P ein Element aus Ψ und z ein Element aus R^J mit $z(j) = 0$ ($j \in P$). Dann muß aber $w(z) = 0$ sein. Also gehört P auch zu $\Phi\{w\}$, es ist auch $\Psi \subset \Phi\{w\}$.

Satz 7. *Genau dann fällt $(R^J)_0$* (s. Einleitung) *mit dem dualen Raum $(R^J)'$ von R^J zusammen, wenn jeder Ultrafilter auf J, der ein δ-Filter ist, prinzipal ist.*

Beweis. a) Jeder Ultrafilter auf J, der ein δ-Filter ist, sei prinzipal. u sei ein Element aus $(R^J)_0$, $u \in (R^J)'$ ist zu zeigen. Nach Satz 4 sind alle Ultrafilter aus $D(\Phi\{u\})$ δ-Filter, also nach Voraussetzung prinzipal. Nach Satz 6 ist u stetig. b) Es sei $(R^J)_0 = (R_J)'$. Wir nehmen an, daß es auf J einen eigentlichen nicht prinzipalen (also hypercharakteristischen) Ultrafilter Ψ gibt, der ein δ-Filter ist. Nach Hilfssatz 2 existiert eine (von o verschiedene) Linearform w auf R^J mit $D(\Phi\{w\}) = D(\Psi) = \{\mathfrak{P}(J), \Psi\}$. w gehört offenbar zu $(R^J)_0$, jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung $(R^J)_0 = (R^J)'$ nach Satz 6 nicht zu $(R^J)'$.

Die Begriffe charakteristischer, hypercharakteristischer, prinzipaler Filter stammen aus einer Arbeit von J. Schmidt [5], die Bezeichnung δ-Filter ist dem Nöbelingschen Buch über analytische Topologie entnommen (s. [4], S. 22).

Die Arbeit [1] von W. F. Donoghue und K. T. Smith enthält (ohne Verwendung des Filterbegriffs) verschiedene Angaben, die mit den hier durchgeführten Überlegungen im Zusammenhang stehen. Nach Ansicht des Verf. vorliegender Note sind die Aussagen auf S. 336/337 in [1] nicht genügend begründet, da ohne Beweis jede beschränkte Linearform als Linearform mit endlichem Index, um es mit der hier gebrauchten Terminologie auszudrücken, vorausgesetzt wird. Es wird in [1] angenommen (s. Satz 2 dieser Note), daß es zu jeder beschränkten Linearform $u \neq o$ eine gewisse natürliche Zahl n gibt, so daß in $Q(\Phi\{u\})$ n paarweise fremde Elemente existieren, während $n + 1$ Elemente aus $Q(\Phi\{u\})$ in keinem Fall paarweise fremd sind. In Lemma 5 von [1] wird nur gezeigt, daß $Q(\Phi\{u\})$ keine unendliche Folge von paarweise fremden Elementen enthält.

Die im ersten Teil des Beweises von Hilfssatz 2 angegebene Konstruktion der Linearform w stammt von Mackey [3].

Über die Existenz hypercharakteristischer Ultrafilter, die zugleich δ-Filter sind, findet man Näheres in Landsberg [2].

Zusatz bei der 1. Korrektur. In einem Brief vom 13. Juni 1956 teilte W. F. Donoghue (Lawrence, Kansas) dem Verfasser dieser Note einen Satz mit, mit dem sich die in [1] vorhandenen Ungenauigkeiten, auf die oben hingewiesen wurde, beseitigen lassen.

Literatur

[1] Donoghue, W. F., a. K. T. Smith: On the symmetry and bounded closure of locally convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 321—344 (1952). — [2] Landsberg, M.: Der Durchschnittsgrad hypercharakteristischer Filter. Math. Ann. **131**, 429—434 (1956). — [3] Mackey, G. W.: Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 719—722 (1944). — [4] Nöbeling, G.: Grundlagen der analytischen Topologie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954. — [5] Schmidt, J.: Beiträge zur Filtertheorie. I. Math. Nachr. (Berlin) **7**, 359—378 (1952).

(Eingegangen am 11. Mai 1956)

Chalk, J. H. H.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 263—276 (1956)

An Estimate for the Fundamental Solutions of a Generalized Pell Equation

By

J. H. H. Chalk in London

1. It is well known that, if $\sigma = 1$ or 2 and D is a positive integer other than a perfect square (with $D \equiv 0, 1 \pmod 4$ when $\sigma = 2$), the Pell equation $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ always has a solution in integers $t, u > 0$ and that if $T > 0$, $U > 0$ is the solution with least $u > 0$, all solutions are generated by

$$\frac{1}{\sigma}\left(t + u\sqrt{D}\right) = \pm\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Various elementary methods[1]) give an upper bound for T and U (e. g. by considering the continued fraction for $\sqrt{D}$) but the most effective is that discovered by J. Schur [13] and developed by E. Landau [8]. For $\sigma = 2$, $D \equiv 0,1 \pmod 4$ and $\varepsilon(D) = \frac{1}{2}\left(T + U\sqrt{D}\right)$, Schur found the inequality

$$\log\log\varepsilon(D) < \frac{1}{2}\log D + \log\log D;$$

a significant improvement on those given by elementary means. In fact, the first term in this estimate is of the correct order of magnitude when D is large. For, as he showed, in the case $D = 2^{2m+1}$ where m is a positive integer,

$$\log\log\varepsilon(2^{2m+1}) = \frac{1}{2}\log 2^{2m+1} + \log\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(3 + \sqrt{8}\right)\right).$$

His method is based upon Kronecker's form [7] of the class-number formula

$$h(D)\log\varepsilon(D) = \sqrt{D}\,\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} \tag{1}$$

of Dirichlet, where $h(D)$ denotes the number of classes of properly primitive indefinite binary quadratic forms $a x^2 + b x y + c y^2$ of determinant $D = b^2 - 4ac > 0$, and the sum on the right is over all positive integers n prime to $2D$. Since $h(D) \geqq 1$ when $D \equiv 0,1 \pmod 4$, this sum is an upper bound for $\sqrt{D}\log\varepsilon(D)$, and Schur estimated its order of magnitude by means of the famous result of Pólya [11] and Vinogradov [16] on character sums.

In this note, I apply Schur's method to the Pellian-type equation

$$x^2 + y^2 - D(z^2 + w^2) = 1, \tag{2}$$

where D is any positive integer. We observe that this equation always has a solution in integers x, y, z, w with $z^2 + w^2 > 0$. For if $D = \boxed{2}$, there is such a solution with $z^2 + w^2 = D$, $x = D$, $y = 1$, and if $D \neq \boxed{2}$, there is a solution

1) See e. g. L. E. Dickson [1], II, pp. 399—400.

with $y = w = 0$, $x = T$, $z = U$. Moreover, there are an infinity of such solutions; a fact which is obvious from our remarks on the ordinary Pell equation in the case $D \neq \square$. Our object is to obtain an upper bound for the least value of $z^2 + w^2 > 0$ in terms of D, and henceforward, I exclude the case $D = \square$, since it requires slight modifications in the argument and the final result is no better than that given by the obvious solution with $z^2 + w^2 = D$. But if $D \neq \square$, I do not know of any simple direct method of improving the obvious bound arising from our knowledge of T, U. We put $t = x + i\,y$, $u = z + i\,w$ and consider the same equation

$$t\,\bar{t} - D\,u\,\bar{u} = 1\,, \quad u \neq 0\,, \tag{3}$$

expressed in terms of gaussian integers t, u. Then Schur's method leads to the following result.

Theorem. *There exist gaussian integers t, u satisfying* (3) *for which*

$$|t| \leq 1 + D \prod_{\substack{p \mid D \\ p > 2}} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right). \tag{4}$$

As I show in § 8, (21), it is possible to improve this bound by a constant factor (when D is large), on using the Siegel-Tsuji [14, 15] estimate for the number of generators of a Fuchsian group, but it appears unlikely that its order of magnitude can be improved by arguments of this kind. The basis of our proof of the inequality (4) is an effective use of the group G_1 of proper automorphs of the special hermitian form $f_1 = x\,\bar{x} - D\,y\,\bar{y}$. We observe that, if t, u are any gaussian integer solutions of (3), then

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & D\bar{u} \\ u & \bar{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

is a proper automorph of f_1, and in § 4, we show that all proper automorphs of f_1 arise in this way. While these automorphisms are relevant to the Pell equation (3), it is important to note that the group G_1 is (isomorphic to) a *proper* sub-group of the group Γ_1 of proper automorphs of the special real quaternary quadratic form $x^2 + y^2 - D(z^2 + w^2)$ where, of course, a more general class of automorphisms is allowable. This suggests, and leaves open, the question of whether an investigation of Γ_1, rather than G_1, would lead to a substantially better estimate for a small solution of (2), and so of (3).

The classic method of Dirichlet, mentioned earlier in connection with quadratic forms, has also been applied to binary hermitian forms and the first stages of the development are analogous, Fatou [2] and Humbert [4, 5, 6] having considered positive definite and indefinite hermitian forms, respectively. Here, we shall be concerned exclusively with *indefinite* forms. Let $f(x, y) = (a, b, \bar{b}, c) = a\,x\,\bar{x} + b\,x\,\bar{y} + \bar{b}\,\bar{x}\,y + c\,y\,\bar{y}$ denote an indefinite binary hermitian form of positive determinant $D = b\bar{b} - ac \neq \square$, where a, c are rational integers, b is a gaussian integer and x, y are gaussian integer variables. We shall say that f is properly primitive if a, c are not both even, and if a, b, c have no common rational integral factor. Our argument depends upon an identity, due to Humbert, which is the counterpart of (1) for hermitian forms. Since

this involves a knowledge of the group G of proper automorphs of f and its fundamental domain, we introduce and summarize their properties in the following paragraph. It will be convenient to refer to the standard work [3] on groups of linear transformations, "L. R. FORD, *Automorphic Functions*", by the letter F.

2. We identify $\Omega = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, the matrix of coefficients of an element S of the group G of proper automorphs of $f(x, y)$, with S. Then $-\Omega = \begin{pmatrix} -p & -q \\ -r & -s \end{pmatrix} \in G$. If we denote by Λ the group of order 2 consisting of the elements $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $-I$, then G/Λ is isomorphic to the group, which we shall denote by $\mathfrak{G}$, of linear transformations T:

$$z' = \frac{pz + q}{rz + s} \tag{5}$$

of the complex z-plane. We shall say that a point z_1 is *congruent* to a point z_2 with respect to $\mathfrak{G}$ if and only if there exists an element T of $\mathfrak{G}$ such that $z_1 = T z_2$. By routine calculation, it is possible to characterize the elements of G, and so of $\mathfrak{G}$, and I state and prove the result in Lemma 1. From our knowledge of the ordinary Pell equation, it is evident that G and $\mathfrak{G}$ are infinite groups (see Lemma 1, Cor. 3). It is essential for a later argument to know that $\mathfrak{G}$ is finitely generated, and this requires a deeper argument. In fact, the first proof was achieved by PICARD [10][2]) in his memoir on hermitian forms, by applying Hermite's method of continual reduction to an associated positive definite form. PICARD showed that $\mathfrak{G}$ is a Fuchsian group with principal circle $C(f): f(z, 1) = 0$ and constructed a finite sequence of contiguous polygons, each within the principal circle, the sum-set of which constituted a fundamental domain $\mathfrak{D}$ for $\mathfrak{G}$ (F. Ch. III §§ 30, 34; for a summary of Picard's proof, see L. E. DICKSON [1], III, Ch. XV, 271–272). Each polygon is bounded by at most five sides, each side (or arc) being an arc of a circle orthogonal to $C(f)$. Thus $\mathfrak{D}$ has at most a finite number of sides and hence

(i) $\mathfrak{G}$ is a Fuchsian group of the first kind (i. e., horocyclic)

(F. Ch III, § 34, RANKIN [12], 219)

(ii) the non-euclidian area $\sigma(\mathfrak{D})$ of $\mathfrak{D}$, defined by

$$\sigma(\mathfrak{D}) = 4D \iint\limits_{\substack{z = z_1 + iz_2 \\ z \in \mathfrak{D}}} f^{-2}(z, 1)\, dz_1\, dz_2 \tag{6}$$

is finite.

Now, $\sigma(\mathfrak{D})$ is an invariant of the group $\mathfrak{G}$, and $\mathfrak{D}$ may be replaced by any convenient fundamental domain. For our purpose, Picard's domain is unsuitable and we shall adopt that defined by FORD for the general horocyclic group. Thus our fundamental domain for $\mathfrak{G}$, which we shall denote by $\mathfrak{D}(f)$ to distinguish it from Picard's domain, is the region *outside* $C(f)$, defined for horocyclic groups by Ford's method (F §§ 19, 21, 31, 34). When $\mathfrak{G}$ contains

[2]) An account of this proof is also given in FRICKE-KLEIN, „Automorphe Funktionen" (Leipzig 1897), I, (3) § 8, pp. 471—477.

elements, other than the identity, with a fixed point at ∞, we adopt the modified fundamental domain given in F § 35, Theorem 22. The fundamental domain for G is defined to be $\mathfrak{D}(f)$. If T is the element of $\mathfrak{G}$ as expressed in (5), the circle $|r z + s| = 1$ is called the *isometric* circle of T. We now state certain properties, all of which are established for the general horocyclic group, in Ford's work, for later use.

No point of $\mathfrak{D}(f)$ is inside $C(f)$, the sides of $\mathfrak{D}(f)$ are arcs of isometric circles orthogonal to $C(f)$ and these arcs are congruent in pairs. Two congruent arcs are equal in length and, if two points on them are congruent, they are equidistant from the centre of $C(f)$, (F § 31). *The transformations by which the boundary arcs of $\mathfrak{D}(f)$ are congruent form a set of generating transformations for* $\mathfrak{G}$ (F §§ 23, 28, 32).

Since $\sigma(\mathfrak{D}) = \sigma(\mathfrak{D}(f))$ it follows from the work of Picard (loc. cit. [10]) that $\sigma(\mathfrak{D}(f))$ is finite, and hence by the Siegel-Tsuji theorem, that the number $N(f)$ of arcs of $\mathfrak{D}(f)$ is bounded in terms of $\sigma(\mathfrak{D}(f))$:

$$N(f) \leq 6 + \frac{3}{\pi}\sigma(\mathfrak{D}(f)). \tag{7}$$

We shall also need an explicit definition of $\mathfrak{D}(f_1)$ in the case $f_1 = x\bar{x} - D y\bar{y}$. By Lemma 1, Cor. 1, $\mathfrak{G}_1$ consists of all elements of the form

$$z' = (\lambda z + D\bar{\nu}) / (\nu z + \bar{\lambda}),$$

where λ, ν are gaussian integers satisfying $\lambda\bar{\lambda} - D\nu\bar{\nu} = 1$. There is only one element $z' = -z$, apart from the identity, which has a fixed point at ∞ (Lemma 1, Cor. 2). Hence (F § 35), we define $\mathfrak{D}(f_1)$ in a half-plane $I z \geq 0$, say. The set of inner points of $\mathfrak{D}(f_1)$ then consists of all points z satisfying

$$I z > 0, |z|^2 > D, |\nu z + \bar{\lambda}| > 1,$$

for all gaussian integers λ, ν with $\lambda\bar{\lambda} - D\nu\bar{\nu} = 1$. To this set, we adjoin certain boundary points (F §§ 19, 21 (c)):

(i) all boundary points with $I z = 0$, $R z \geq D$,

(ii) one arc from each pair of (open) congruent arcs,

(iii) one vertex from each ordinary cycle of congruent vertices[3]).

3. We are now able to introduce Humbert's identity. If $f(x_0, y_0) = n$ for some gaussian integers x_0, y_0, then we shall say that $\binom{x_0}{y_0}$ is a *representation* of n by f. If $(x_0, y_0) = 1$, the representation is proper, otherwise it is improper. For each such representation, $A\binom{x_0}{y_0}$ where A is a proper automorph of f, is also a representation of n by f. For the moment, let us regard such representations as identical, so that in particular, $\binom{-x_0}{-y_0}$ is identified with $\binom{x_0}{y_0}$. Let $f_1, \ldots, f_h$ ($f_1 = x\bar{x} - D y\bar{y}$) denote a complete set of properly primitive forms of fixed determinant $D > 0$, no two of which are properly equivalent,

[3]) Since $D \neq \boxed{2}$, there are no parabolic cycles. We remark that $\mathfrak{D}(f_1)$ was discovered by Humbert, ibid, **162**, 697—702 (1916).

(by a classical result, h is finite). As in the case of quadratic forms, there is no loss of generality in assuming that their first coefficients $a_1, \ldots, a_h$ are all positive and prime to $2\,D$. Then it may be verified (by modifications of a well known method) that the total number[4]) of *distinct* representations of a number $n > 0$ prime to $2\,D$ by the set of forms $f_1, \ldots, f_h$ is $\sigma(n)$, the sum of the divisors of n. This result, when expressed analytically takes the form stated below; the factor 2 on the right of (8) arising from the fact that every distinct representation $\binom{x}{y}$ as well as its negative $\binom{-x}{-y}$ is counted on the left.

For any $s = \sigma + i\,\tau$ with $\sigma > 2$,

$$(8)\qquad \Sigma_1 f_1^{-s}(x,y) + \cdots + \Sigma_h f_h^{-s}(x,y) = 2\,\Sigma\,\sigma(n)\,n^{-s} = 2\,\Sigma\,n^{-s}\,\Sigma\,n^{-s+1},$$

the summations on the right being over all positive integers n prime to $2\,D$, and the symbol Σ_j on the left signifying summation over all gaussian integers x, y for which $f_j(x,y)$ is positive and prime to $2\,D$ and for which the point $z = x/y$ is inside or on the boundary of the fundamental domain $\mathfrak{D}(f_j)$ of the group of proper automorphs of f_j (Humbert).

This result, with an arbitrary fundamental domain (having no point inside the principal circle $C(f_j)$) in place of $\mathfrak{D}(f_j)$, $j = 1, \ldots, h$ was first stated by Humbert [4]. The next step in Dirichlet's method, and carried through by Humbert [5], consists of putting $s = 2 + \varrho$ in (8), where ϱ is real and positive and letting $\varrho \to +0$. The resulting identity is as follows, and we observe that Picard's inequality $\sigma(\mathfrak{D}(f)) < \infty$ is an obvious necessary condition for its validity:

$$(9)\qquad \sum_{j=1}^{h} \iint\limits_{\substack{z = z_1 + i z_2 \\ z \in \mathfrak{D}(f_j)}} f_j^{-2}(z,1)\,dz_1\,dz_2 = \frac{\pi}{4} \prod_{\substack{p \text{ prime} \\ p > 2 \\ p \mid D}} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right).$$

This is the counterpart of (1) for indefinite hermitian forms. But our knowledge of the class-number h is much more precise than in the case of binary quadratic forms. Using a classical theorem of A. Meyer [9] on real indefinite ternary quadratic form [5]), Humbert [6] proved *inter alia* that $h = 1$ when $D \equiv \pm 1, 2 \pmod 4$; and so all properly primitive forms of determinant $D \equiv \pm 1, 2 \pmod 4$ are properly equivalent to $f_1 = x\bar{x} - D\,y\bar{y}$. But so far as the proof of our theorem is concerned, all we need to know about h is the inequality $h \geqq 1$.

4. **Lemma 1.** *The proper automorphs of $f = (a, b, \bar{b}, c)$ are given by*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

where p, r are any gaussian integers satisfying

$$f(p,r) = a\,, \quad a \mid b\,\bar{r} + \bar{b}\,r\,, \quad a \mid \bar{b}\,p - \bar{b}\,\bar{p} - c\,\bar{r}\,,$$

[4]) A proof does not appear to have been published, although the result is implicit in later work of Humbert. For completeness, the argument is given in Lemma 2.

[5]) G. L. Watson informs me that when $D \equiv 0 \pmod 4$, there are at most two classes $(\pm f_1)$.

and q, s are defined by

$$a\,q = \bar{b}\,p - \bar{b}\,\bar{p} - c\,\bar{r}, \quad a\,s = a\,\bar{p} + b\,\bar{r} + \bar{b}\,r.$$

Proof. It is necessary and sufficient for p, q, r, s to satisfy the conditions:

$$ap\bar{p} + bp\bar{r} + \bar{b}\bar{p}r + cr\bar{r} = a, \tag{10}$$

$$ap\bar{q} + bp\bar{s} + \bar{b}r\bar{q} + cr\bar{s} = b, \tag{11}$$

$$aq\bar{q} + bq\bar{s} + \bar{b}\bar{q}s + cs\bar{s} = c, \tag{12}$$

$$ps - qr = 1. \tag{13}$$

Substituting for q from (13) into (11), we obtain

$$ap(\bar{p}\bar{s} - 1) + b\,p\bar{s}\bar{r} + \bar{b}r(\bar{p}\bar{s} - 1) + cr\bar{r}\bar{s} = b\bar{r},$$

$$\bar{s}f(p,r) = ap + \bar{b}r + b\bar{r},$$

$$as = a\bar{p} + b\bar{r} + \bar{b}r.$$

From (13), we also have

$$p(a\bar{p} + b\bar{r} + \bar{b}r) = a(1 + qr),$$

which reduces, by (10), to

$$a + aqr = a - \bar{b}\bar{p}r - cr\bar{r} + \bar{b}pr.$$

Hence either $r = 0$ or $aq = \bar{b}p - \bar{b}\bar{p} - c\bar{r}$. Conversely, if we take q, s to have these values, then (11), (12) and (13) are satisfied; the case $r = 0$ being included in the more general case.

Corollary 1. The proper automorphs of the form $f_1 = (1, 0, 0, D)$ are given by

$$\pm\begin{pmatrix}\lambda & D\bar{\nu} \\ \nu & \bar{\lambda}\end{pmatrix},$$

where λ, ν are gaussian integers satisfying $\lambda\bar{\lambda} - D\,\nu\bar{\nu} = 1$.

Corollary 2. The only proper automorphs with $r = 0$, apart from the identity and its negative, are given by

$$\pm\begin{pmatrix}i, & 2\,b\,a^{-1}\,i \\ 0, & -\,i\end{pmatrix}.$$

Corollary 3. If (i) $b \neq 0$, G contains the elements

$$\begin{pmatrix}t - b\bar{b}u, & -\bar{b}cu \\ abu, & t + b\bar{b}u\end{pmatrix},$$

where t, u are any rational integral solutions of the Pell equation $t^2 - b\bar{b}\,Du^2 = 1$ and if (ii) $b = 0$, G contains the elements

$$\begin{pmatrix}t, & -au \\ -cu, & t\end{pmatrix},$$

where t, u are any rational integral solutions of the Pell equation $t^2 - |ac|\,u^2 = 1$.

5. **Lemma 2.** *The total number of distinct representations of an integer $n > 0$ prime to $2\,D$ by the set of forms $f_1, \ldots, f_h$ is $\sigma(n)$.*

Proof. We consider firstly *any* properly primitive form f of determinant D and suppose that $f(\alpha, \gamma) = n$, where α, γ are gaussian integers with $(\alpha, \gamma) = 1$.

Then f is properly equivalent to a *reduced* form

(14) $f(n;x,y) = n x\bar{x} + (\xi + i\,\eta)\, x\bar{y} + (\xi - i\,\eta)\,\bar{x}y + n^{-1}(\xi^2 + \eta^2 - D)\, y\bar{y}$

where

(15) $$\xi^2 + \eta^2 \equiv D\,(\mathrm{mod}\, n),\ 0 \leq \xi < n,\ 0 \leq \eta < n,$$

the matrix of coefficients of the substitution taking f into $f(n;x,y)$ being of the form $S = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, with $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1$. Let S' denote any other matrix with determinant $+1$ and having this property i. e. reducing f to the same form $f(n;x,y)$. Then $S' = SA$, where A is some proper automorph of f. For $f = (S'^{-1}S)\,f$ with $|S'^{-1}S| = +1$, and so $S'^{-1}S$ is a proper automorph of f. Since the proper automorphs form a group, it contains an element $A^{-1} = S'^{-1}S$ and so $S' = SA$. Conversely, for any proper automorph A of f, SA effects a reduction of f to $f(n;x,y)$. Thus two proper representations of n by f are distinct (by our definition) if, and only if, they give rise to different values of ξ, η in the reduction of f. But any given form $f(n;x,y)$ satisfying the conditions in (15) is properly primitive since $(n, 2D) = 1$, and hence it is properly equivalent to one, and only one, of the complete set of forms $f_1, \ldots, f_h$. Thus the total number of distinct proper representations of n by the set of forms $f_1, \ldots, f_h$ is equal to the number of forms (14) satisfying the conditions (15). This is precisely the number $\lambda(n)$ of incongruent solutions (mod n) of the congruence $x^2 + y^2 \equiv D\,(\mathrm{mod}\,n)$. An elementary calculation gives

$$\lambda(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right)$$

when $(n, 2D) = 1$.

Suppose now that $d|n$ and that $\binom{\alpha}{\gamma}$ is a proper representation of n/d by f. Then there are $\frac{1}{4}\,r(d)$ non-associated gaussian integers δ satisfying $\delta\bar{\delta} = d$, each δ giving rise to a different *improper* representation $\binom{\delta\alpha}{\delta\gamma}$ of n by f. Thus from each proper representation of n/d by f, there are $\frac{1}{4}\,r(d)$ improper representations of n by f. Hence the total number of distinct representations (proper and improper) of n by the set of forms $f_1, \ldots, f_h$ is

$$\tfrac{1}{4} \sum_{d|n} \lambda(n/d)\, r(d).$$

Thus it remains to prove that

$$\sigma(n) = \tfrac{1}{4} \sum_{d|n} \lambda\,(n/d)\, r(d).$$

We observe that

$$r(m) = 4 \sum_{d|m} \chi(d), \text{ where } \chi(d) = \begin{cases}(-1)^{(d-1)/2} & \text{if } 2 \nmid d,\\ 0 & \text{if } 2 \mid d,\end{cases}$$

and so

$$\Sigma\, n^{-s}\, \Sigma\, \chi(n)\, n^{-s} = \tfrac{1}{4}\, \Sigma\, r(n)\, n^{-s}, \qquad (Rs > 1)$$

where Σ denotes summation over all integers $n > 0$ prime to $2D$. If Π denotes

a product over all primes p with $p \nmid 2D$, we have

$$\begin{aligned}\Sigma\,\chi(n)\,n^{-s} &= \Pi(1+\chi(p)\,p^{-s}+\chi(p^2)\,p^{-2s}+\cdots)\\ &= \Pi(1-\chi(p)\,p^{-s})^{-1},\\ &= \Pi\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1},\end{aligned}$$

when $Rs > 1$. Writing $\lambda(n) = n\,\lambda'(n)$, we also have

$$\begin{aligned}\Sigma\,\lambda(n)\,n^{-s} &= \Sigma\,\lambda'(n)\,n^{-s+1}\\ &= \Pi(1+\lambda'(p)\,p^{-s+1}+\lambda'(p^2)\,p^{-2s+2}+\cdots),\\ &= \Pi(1+\lambda'(p)\,p^{-s+1}+\lambda'(p)\;p^{-2s+2}+\cdots),\\ &= \Pi\left(1+\frac{\lambda'(p)\,p^{-s+1}}{1-p^{-s+1}}\right),\\ &= \Pi(1-p^{-s+1})^{-1}\cdot\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-s}\right),\end{aligned}$$

when $Rs > 2$. Hence

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\,\Sigma\,\lambda(n)\,n^{-s}\,\Sigma\,r(n)\,n^{-s} &= \Sigma\,n^{-s}\,\Sigma\,\chi(n)\,n^{-s}\,\Sigma\,\lambda(n)\,n^{-s}\\ &= \Pi\,(1-p^{-s})^{-1}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1}(1-p^{-s+1})^{-1}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-s}\right),\\ &= \Pi(1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-s+1})^{-1},\\ &= \Sigma\,n^{-s}\,\Sigma\,n^{-s+1},\\ &= \Sigma\,\sigma(n)\,n^{-s},\end{aligned}$$

when $Rs > 2$. Putting $\Phi(n) = \frac{1}{4}\,\Sigma\,\lambda(n/d)\,r(d)$, we have

$$\Sigma\,\Phi(n)\,n^{-s} = \tfrac{1}{4}\,\Sigma\,\lambda(n)\,n^{-s}\,\Sigma\,r(n)\,n^{-s}, \qquad (Rs > 2)$$

and so $\Sigma\,\Phi(n)\,n^{-s} = \Sigma\,\sigma(n)\,n^{-s}$ for $Rs > 2$. This implies the required result.

6. *Proof of the Theorem.* Each double integral in Humbert's identity:

$$\sum_{j=1}^{h}\iint\limits_{\mathfrak{D}(f_j)} f_j^{-2}(z,1)\,dz_1\,dz_2 = \frac{\pi}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\mid D}}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right)$$

is clearly non-negative, and since $f_1 = x\bar{x} - D\,y\bar{y}$ is properly primitive, we have

$$(16)\qquad I(f_1) = \iint\limits_{\substack{z=z_1+iz_2\\ z\in\mathfrak{D}(f_1)}} [z_1^2+z_2^2-D]^{-2}\,dz_1\,dz_2 \le \frac{\pi}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\mid D}}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right).$$

Now $\mathfrak{D}(f_1)$ is contained in the closure of the region in the upper half-plane $I\,z \geqq 0$, external to the principal circle $|z|^2 = D$ and all isometric circles $|\nu\,z+\bar{\lambda}| = 1$ of the elements $z' = (\lambda\,z + D\,\bar{\nu})/(\nu\,z+\bar{\lambda})$ of $\mathfrak{G}_1$. Since $\lambda\bar{\lambda} - D\,\nu\bar{\nu} = 1$, we observe that the centre of each isometric circle satisfies

$$\left|-\frac{\bar{\lambda}}{\nu}\right|^2 = D + \frac{1}{|\nu|^2} \le D + \frac{1}{|U|^2},$$

where T, U denote any solutions of $T\bar{T} - D\,U\bar{U} = 1$ for which $|U|$ takes

its least positive value. Thus all isometric circles are contained in the circle

$$|z| \leq \sqrt{(D + |U|^{-2})} + |U|^{-1}.$$

Hence, if we define Π as the region:

$$|z| \geq \sqrt{(D + |U|^{-2})} + |U|^{-1}, \qquad Iz \geq 0$$

then $\mathfrak{D}(f_1) \supset \Pi$, and so

$$I(f_1) \geq \iint_{\Pi} [z_1^2 + z_2^2 - D]^{-2} dz_1 dz_2$$

$$= \int_{R=R_0}^{\infty} \int_0^{\pi} (R^2 - D)^{-2} R \, d R \, d \theta,$$

where $R_0 = \sqrt{(D + |U|^{-2})} + |U|^{-1}$. Thus, we have

$$I(f_1) \geq \pi \int_{R_0}^{\infty} (R^2 - D)^{-2} R \, d R,$$

$$= \tfrac{1}{2} \pi (R_0^2 - D)^{-1},$$

$$= \tfrac{1}{4} \pi \frac{|U|^2}{\sqrt{(D|U|^2 + 1)} + 1},$$

and so, on using (16),

$$\sqrt{(D|U|^2 + 1)} - 1 \leq D \prod_{\substack{p > 2 \\ p \mid D}} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right) \frac{1}{p}\right),$$

which gives the inequality (4).

For the improvement of this estimate when D is large, we need an elementary result in the geometry of circles.

7. **Lemma 3.** *Let $C_1 \neq C_2$ be fixed circles with the same radius r and let Γ be another fixed circle containing the centres O_1, O_2 of C_1, C_2 on a minor arc of its circumference. Suppose that the segment $O_1 O_2$ satisfies*

(17) $$O_1 O_2 > 2 r \sin \theta,$$

where θ is the (fixed) angle in the minor segment $O_1 O_2$ of the circle Γ. Suppose also that there is some circle $C(P)$ of radius r with its centre P on the minor arc $O_1 O_2$ of Γ, such that

(18) $$C_1 \cap C(P) \neq 0, \quad C_2 \cap C(P) \neq 0.$$

Let $C(P)$ meet the circles C_1 and C_2 at angles θ_1, θ_2 respectively (see figure). Then, for all such points P on the minor arc $O_1 O_2$ of Γ, the maximum value of $\theta_1 + \theta_2$ is attained, and attained only when $\theta_1 = \theta_2$.

Proof. We remark that, by continuity considerations, $\theta_1 + \theta_2$ assumes its maximum value for some point P satisfying (18), and that when $P = P_0$, where $O_1 P_0 = O_2 P_0$, the circle $C(P_0)$ satisfies (18) and $\theta_1 = \theta_2$.

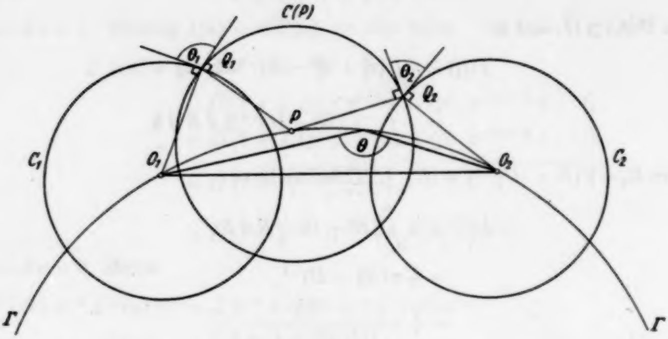
Suppose that $C(P)$ is any circle satisfying the hypotheses of the lemma. For $i = 1, 2$, let Q_i denote the point of intersection of C_i and $C(P)$ which is outside or on the boundary of the angular convex domain bounded by the

lines PO_1 produced and PO_2 produced. Then, by our hypotheses, we have

$$\text{(i)}\qquad O_1P \leqq 2r,\quad O_2P \leqq 2r,$$

$$\text{(ii)}\qquad 0 \leqq \theta_1 \leqq \pi,\quad 0 \leqq \theta_2 \leqq \pi,$$

$$\text{(iii)}\qquad \tfrac{1}{2}\pi < \theta < \pi,$$



and from the figure, we observe that

$$O_1\hat{Q}_1P = \pi - \theta_1,\quad O_2\hat{Q}_2P = \pi - \theta_2,$$

$$O_1P = 2r\cos\tfrac{1}{2}\theta_1,\quad O_2P = 2r\cos\tfrac{1}{2}\theta_2,$$

$$\text{(19)}\qquad O_1O_2^2 = O_1P^2 + O_2P^2 - 2\cdot O_1P\cdot O_2P\cos\theta.$$

For conciseness, we write

$$x = \cos\tfrac{1}{2}\theta_1,\quad y = \cos\tfrac{1}{2}\theta_2,\quad \lambda = O_1O_2/2r,\quad c = |\cos\theta|,$$

$$\text{(20)}\qquad \xi = (\lambda^2 - x^2 - y^2)/2c.$$

Then

$$0 \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq y \leqq 1,\quad \lambda > \sin\theta,\quad 0 < c < 1.$$

and, by (19),

$$\text{(21)}\qquad \xi = xy.$$

Our proof is based upon the fact that since $c^2 + \lambda^2 > 1$, the function $F(\xi)$, where

$$F(\xi) = \xi - (1 - \lambda^2 + 2c\xi + \xi^2)^{1/2}$$

$$= (c^2 + \lambda^2 - 1)\,[(1 - \lambda^2 + 2c\xi + \xi^2)^{1/2} + \xi + c]^{-1} - c,$$

is a continuous decreasing function of ξ for $\xi \geqq 0$. From (20) and (21), we have

$$x^2 + y^2 + 2cxy = \lambda^2,$$

and so, by the inequality of the arithmetic and geometric means,

$$x^2 + y^2 \geqq \lambda^2(1 + c)^{-1}.$$

Hence

$$\xi \leq \frac{1}{2c}\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{1+c}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda^2(1+c)^{-1},$$

the equality sign being necessary only in the case $x = y$, $\theta_1 = \theta_2$. Thus, we have

$$F(\xi) \geq F\left(\tfrac{1}{2}\lambda^2(1+c)^{-1}\right),$$

with strict inequality, unless $\theta_1 = \theta_2$. Since

$$\cos\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$
$$= \xi - (1 - \lambda^2 + 2c\,\xi + \xi^2)^{1/2},$$
$$= F(\xi),$$

by (20) and (21), and $0 \leq \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \leq \pi$, the result follows.

8. *An Improvement of the Inequality* (4). Writing

$$\Omega = \prod_{\substack{p>2\\ p|D}}\left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

for convenience, we shall prove that

$$(22)\qquad |T| < \frac{3}{\pi} D\,\Omega + \frac{6}{\pi}$$

for all sufficiently large values of D. This is a slight improvement on (4) for large D, since

$$\frac{3}{\pi} = 0{,}954929\ldots < 1.$$

For reasons of symmetry, it is convenient to ignore the element $z' = -z$ of $\mathfrak{G}_1$, for then the remaining automorphs form a horocyclic group $\mathfrak{G}_1'$ say with the simpler fundamental domain comprised of $\mathfrak{D}(f_1)$ and its image in O. In fact, if we denote this sum-set by Δ, its inner points consist of all points outside the principal circle $|z|^2 = D$ and external to the isometric circles $|\nu z + \bar{\lambda}| = 1$, where λ, ν satisfy $\lambda\bar{\lambda} - D\,\nu\bar{\nu} = 1$. Let N denote the number of bounding arcs of Δ, then by the SIEGEL-TSUJI theorem,

$$(23)\qquad N \leq 6 + \frac{3}{\pi}\sigma(\Delta),$$

If two isometric circles, with centres $-\bar{\lambda}\,\nu^{-1}, -\bar{\lambda}'\,\nu'^{-1}$ say, have arcs bounding Δ, then

$$\arg(-\bar{\lambda}\,\nu^{-1}) \neq \arg(-\bar{\lambda}'\,\nu'^{-1}),$$

unless $(\lambda, \nu) = \pm(\lambda', \mu')$ or $\pm(i\,\lambda', i\,\mu')$, since the circles are orthogonal to the principal circle[6]). Thus we can enumerate the isometric circles which contribute to the sides of Δ, without ambiguity, by taking them to be

$$|\nu_i z + \bar{\lambda}_i| = 1,\ (i = 1, 2, \ldots, N),$$

[6]) It is understood that $\arg z$ satisfies $0 \leq \arg z < 2\pi$.

where[7]) $\arg(-\bar{\lambda}_{i+1}\nu_{i+1}^{-1}) > \arg(-\bar{\lambda}_i\nu_i^{-1})$ for each i. We introduce the following construction. Replace each isometric circle $|\nu_i z + \bar{\lambda}_i| = 1$ by the circle C_i with radius $|U|^{-1}$ which is centred at the point

$$-\left|\frac{T\nu_i}{U\lambda_i}\right|\frac{\bar{\lambda}_i}{\nu_i}.$$

Then C_i is orthogonal to the principal circle and since $|U|^{-1} \geqq |\nu_i|^{-1}$, it contains the isometric circle $|\nu_i z + \bar{\lambda}_i| = 1$. Define Π' to be the open region outside the principal circle and external to the circles $C_i (i = 1, \ldots, N)$. Then $\Delta \supset \Pi'$ and so

$$2\,\sigma(\mathfrak{D}(f_1)) = \sigma(\Delta) \geqq \sigma(\Pi'). \tag{24}$$

We observe that, since $\arg(-\bar{\lambda}_i\nu_i^{-1}) \neq \arg(-\bar{\lambda}_j/\nu_j^{-1})$ when $i \neq j$, each of the circles C_i contributes an arc to the boundary of Π'. Moreover, each circle has radius $|U|^{-1}$ and its centre is situated on the fixed circle Γ:

$$|z|^2 = |TU^{-1}|^2 = D + |U|^{-2}.$$

It is essential to note that as the bounding arcs of Δ are external to the principal circle, the bounding arcs of Π' have the same property. That is to say, C_i intersects C_{i+1}, and since both are orthogonal to the principal circle $|z|^2 = D$, one point of intersection is outside the principal circle and the other is inside. Clearly, for this property to hold, N cannot be too small; in fact, since the distance between the centres O_i, O_{i+1} of C_i and C_{i+1} is less than $2\,|U|^{-1}$, the angle $O_i\hat{O}O_{i+1}$ is less than $2\sin^{-1}(|U|^{-1}/|TU^{-1}|)$ and so

$$2N\sin^{-1}(|T|^{-1}) > \sum_{i=1}^{N} O_i\hat{O}O_{i+1} = 2\pi,$$

$$|T|\sin\frac{\pi}{N} < 1, \tag{25}$$

where for $\sin^{-1}$ we take the value between 0 and $\frac{1}{2}\pi$. Let Q_i denote the point, outside the principal circle, at which C_i, C_{i+1} intersect and let θ_i denote the angle at which the bounding arcs of C_i and C_{i+1} intersect. Then, by an extension of the well known formula for the non-euclidean area of a triangle, we have

$$\sigma(\Pi') = N\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N) - 2\pi. \tag{26}$$

Our next step is to obtain an upper bound for $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N$, thus giving a lower bound for $\sigma(\mathfrak{D}(f_1))$, by (24). Consider then, *any* chain of circles (denoting them for convenience by the same symbols $C_1, \ldots, C_N$) with equal radii $|U|^{-1}$ and with centres $O_1, \ldots, O_N$ lying on the fixed circle Γ. We suppose that they have the property $C_i \cap C_{i+1} \neq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$. We remark firstly that for any two circles C_i and C_j with centres situated on a minor arc of Γ, the condition (17) of Lemma 3 is satisfied. For, if θ is the angle in the segment O_iO_j of Γ,

$$O_iO_j = 2\,|TU^{-1}|\sin\theta,$$
$$> 2\,|U|^{-1}\sin\theta.$$

[7]) For a consistent notation, we identify the suffix j with i $(1 \leqq i \leqq N)$ when $j \equiv i \pmod N$.

Now, by continuity considerations, there is some chain of circles for which $\theta_1 + \cdots + \theta_N$ (N fixed) assumes its maximum value. Let us suppose that $C_1, \ldots, C_N$ are so arranged; we shall prove that then $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_N$. For otherwise, $\theta_i \neq \theta_j$ for some suffices i, j and so there is a suffix ν for which $\theta_\nu \neq \theta_{\nu+1}$. Now, for $D \geq 10$ say, the centres $O_\nu, O_{\nu+2}$ of $C_\nu, C_{\nu+2}$ are obviously situated on a minor arc of Γ, since the chain is composed of equal circles with radius $|U|^{-1} \leq 1$ small compared with the radius $|TU^{-1}| > \sqrt{D}$ of Γ. Hence by Lemma 3, we may select a new position for $C_{\nu+1}$, without affecting the other circles in the chain, or θ_i for $i \neq \nu$, $\nu + 1$, so that $\theta_\nu + \theta_{\nu+1}$ assumes a larger value. This is a contradiction to our hypothesis that $\theta_1 + \cdots + \theta_N$ has its maximum value. Hence, we may suppose that if $\theta_1 + \cdots + \theta_N$ has its maximum value, then $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_N$ and the circles $C_1, \ldots, C_N$ are situated symmetrically around the fixed circle Γ. Thus, in general,

$$\theta_1 + \cdots + \theta_N \leq 2N \cos^{-1}\left(|T| \sin\frac{\pi}{N}\right), \tag{27}$$

where for $\cos^{-1}$ we take the value between 0 and $\frac{1}{2}\pi$. By (24) and (26), we have

$$\begin{aligned} \sigma(\mathfrak{D}(f_1)) &\geq \frac{1}{2}\sigma(\Pi') \\ &\geq \frac{1}{2}N\pi - N\cos^{-1}\left(|T|\sin\frac{\pi}{N}\right) - \pi, \\ &= N\sin^{-1}\left(|T|\sin\frac{\pi}{N}\right) - \pi. \end{aligned} \tag{28}$$

Since Ω^{-1} is of a lower order of magnitude than D when D is large, we can choose an absolute constant $D_0 \geq 10$ such that

$$(D\,\Omega + 2)\sin\left(\frac{1}{6}\pi(D\,\Omega + 1)^{-1}\right) \geq \frac{1}{6}\pi \tag{29}$$

for all $D \geq D_0$. Then for the inequality (22), it suffices to assume that

$$|T| \geq \frac{3}{\pi}D\,\Omega + \frac{6}{\pi} \tag{30}$$

for all $D \geq D_0$, and deduce a contradiction. By (28) and our fundamental inequality

$$\sigma(\mathfrak{D}(f_1)) \leq \pi D\,\Omega, \tag{31}$$

we have

$$D\,\Omega \geq |T|\left(\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{\frac{\pi}{N}}\right)\left(\frac{\sin^{-1}\left(|T|\sin\frac{\pi}{N}\right)}{|T|\sin\frac{\pi}{N}}\right) - 1\,. \tag{32}$$

Since $N \leq 6 + 6\pi^{-1}\sigma(\mathfrak{D}(f_1)) \leq 6(D\,\Omega + 1)$, by (23), (24) and (31), we also have

$$\begin{aligned} |T|\sin\frac{\pi}{N} &\geq |T|\sin\left(\frac{1}{6}\pi(D\,\Omega + 1)^{-1}\right), \\ &\geq 3\pi^{-1}(D\,\Omega + 2)\sin\left(\frac{1}{6}\pi(D\,\Omega + 1)^{-1}\right), \\ &\geq \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{33}$$

for all $D \geqq D_0$. Now, for $0 \leqq \sin^{-1} t \leqq \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{t}\sin^{-1} t$ is a continuous increasing function of t, and so by (33),

$$\frac{\sin^{-1}\left(|T|\sin\frac{\pi}{N}\right)}{|T|\sin\frac{\pi}{N}} \geqq \frac{\sin^{-1}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\pi, \ (D \geqq D_0). \tag{34}$$

From the inequality (25), we have a lower bound for N. Since also, N is a positive multiple of 4, we have

$$0 < \frac{\pi}{2N} < \frac{\pi}{N} - \frac{\pi^3}{6N^3} < \sin\frac{\pi}{N} \leqq |T|^{-1} \tag{35}$$

and so

$$\frac{\pi}{N} < 2|T|^{-1}. \tag{36}$$

Thus, by (32), (34), (35) and (36), we obtain

$$\begin{aligned} D\,\Omega &> \frac{1}{3}\pi|T|\left(1 - \frac{\pi^2}{6N^2}\right) - 1 \\ &> \frac{1}{3}\pi|T| - \frac{4\pi}{18}|T|^{-1} - 1, \\ &> \frac{1}{3}\pi|T| - 2, \end{aligned}$$

for all $D \geqq D_0$. This gives the required contradiction.

References

[1] DICKSON, L. E.: History of the Theory of Numbers. New York 1934. — [2] FATOU, P.: C. r. Acad. Sci. (Paris) **142**, 505—506 (1906); **166**, 581 (1918). — [3] FORD, L. R.: Automorphic Functions, Ch. I, II, III. New York 1929. — [4] HUMBERT, M. G.: C. r. Acad. Sci. (Paris) **166**, 581—587 (1918). — [5] HUMBERT, M. G.: C. r. Acad. Sci. (Paris) **166**, 753—758 (1918). — [6] HUMBERT, M. G.: C. r. Acad. Sci. (Paris) **166**, 865—870 (1918). [7] KRONECKER, L.: Sitzgsber. Akad. Wiss. Berlin, **2**, 768—780 (1885). — [8] LANDAU, E.: Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen **1918**, 86—87. — [9] MEYER, A.: J. reine u. angew. Math. **108**, 125—139 (1891). — [10] PICARD, E.: Ann. Sci. Ecole norm. sup. (3), **1**, 9—54 (1884). — [11] PÓLYA, G.: Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen **1918**, 21—29. — [12] RANKIN, R. A.: Proc. London Math. Soc. (3), **4**, 219—234 (1954). — [13] SCHUR, J.: Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen **1918**, 30—36. — [14] SIEGEL, C. L.: Ann. of Math. **46**, 708—718 (1945), Theorem 5. — [15] TSUJI, M.: Jap. J. of Math. **21**, 1—27 (1951), Theorem 1. — [16] VINOGRADOV, I. M.: Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 209—217 (1927).

(Eingegangen am 12. März 1956)

Remmert, R.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 277—288 (1956)

Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen

Von

Reinhold Remmert in München

1. K. Weierstrass hat 1880 bemerkt (vgl. [25]), daß zwischen $n+1$ meromorphen, $2n$-fach periodischen Funktionen von n komplexen Veränderlichen, unter denen n analytisch unabhängig sind, stets eine algebraische Relation besteht. Dieser Weierstraßsche Satz ist seither der Gegenstand und Ausgangspunkt zahlreicher Untersuchungen gewesen. Im Jahre 1902 hat H. Poincaré [11] einen ersten Beweis für den Weierstraßschen Satz skizziert. Später, 1929, versuchte W. F. Osgood in seinem Lehrbuch [10], den Satz zu beweisen. Bei der exakten Durchführung beider Beweise ergeben sich jedoch Schwierigkeiten, die im wesentlichen davon herrühren, daß die durch die gegebenen periodischen Funktionen vermittelte Abbildung im allgemeinen nicht überall eindeutig ist, sondern vielmehr Unbestimmtheitspunkte aufweist, die als Bilder mehrdimensionale Mengen besitzen.

Der erste einwandfreie Beweis des Satzes von Weierstrass wurde meines Wissens 1939 von W. Thimm in seiner Dissertation [22] gegeben. W. Thimm beweist in [22] den folgenden Satz:

In einer n-dimensionalen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit sind $n+1$ meromorphe Funktionen algebraisch abhängig, wenn unter ihnen n analytisch unabhängige Funktionen gibt.

Hierin ist offensichtlich der Satz von Weierstrass enthalten, denn das Periodenparallelotop von $2n$-fach periodischen Funktionen bildet eine n-dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Zwei weitere Beweise für den Satz von Weierstrass selbst, von denen der eine wesentlich spezielle Eigenschaften der periodischen Funktionen heranzieht, gab C. L. Siegel 1948/49 in seinen Vorlesungen in Princeton [17].

2. Schon 1903 hat sich O. Blumenthal [1, 2] bemüht, den Satz von Weierstrass auf Modulfunktionen von mehreren komplexen Veränderlichen zu übertragen. Der angegebene Satz von Thimm zeigt, daß eine solche Übertragung sicher dann möglich ist, wenn der Fundamentalbereich der Automorphismengruppe eine n-dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist und es n unabhängige automorphe Funktionen gibt. Für automorphe Funktionen gilt nun allgemein der folgende

Satz (C. L. Siegel, A. Borel)*: Ist X ein Holomorphiegebiet im Raum C^n von n komplexen Veränderlichen und G eine Gruppe von auf X operierenden analytischen Automorphismen (diskontinuierlich oder nicht), derart, daß der Quotientenraum X/G kompakt ist, so sind $n+1$ bezüglich G in X automorphe Funktionen stets algebraisch abhängig.*

Ist X beschränkt und G diskontinuierlich, so existieren n analytisch unabhängige automorphe Funktionen; der Körper der in X bezüglich G automorphen Funktionen ist ein endlich-algebraischer Funktionenkörper in n Unbestimmten[1]).

In der angegebenen Fassung findet sich der Satz bei A. BOREL ([3], théorème 3 und 4). C. L. SIEGEL behandelt in [17] den Fall eines beschränkten Gebietes X mit einer diskontinuierlichen Gruppe G (theorem 18, p. 132; theorem 19, p. 137). In diesem Falle ist übrigens X stets ein Holomorphiegebiet ([17], Lemma 8, p. 136). Für diskontinuierliche Untergruppen der symplektischen Gruppe n-ten Grades mit kompaktem Fundamentalbereich, die im sog. Siegelschen Halbraum wirken, ist der obige Satz bereits 1942 von C. L. SIEGEL [16] bewiesen worden.

Als spezielle Folgerung aus dem Satz von SIEGEL und BOREL ergibt sich, daß $n+1$ meromorphe, $2n$-fach periodische Funktionen von n Veränderlichen stets algebraisch abhängig sind; auch wenn man nicht verlangt, daß unter ihnen n unabhängige Funktionen vorkommen. Dadurch wird die Frage nahegelegt, ob etwa auch im Satze von THIMM die Forderung nach der analytischen Unabhängigkeit von n der vorgegebenen Funktionen überflüssig ist. Diese Frage ist nicht ganz unwichtig, weil es kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten gibt, in denen nicht n unabhängige meromorphe Funktionen existieren. (Das tritt z. B. bereits bei $2n$-fach periodischen Funktionen ein, wenn die Periodenrelationen verletzt sind, vgl. [17], theorem 15, p. 101.) W. THIMM hat 1954 die aufgeworfene Frage bejahend beantwortet und in einer umfangreichen Arbeit bewiesen (vgl. [23], Hauptsatz IV, p. 48):

In einer n-dimensionalen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit sind $n+1$ meromorphe Funktionen stets algebraisch abhängig.

3. Der Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit ist in der komplexen Analysis mehrerer Veränderlichen nicht das vollständige Analogon zum Begriff der Riemannschen Fläche aus der klassischen Funktionentheorie. Da bekanntlich nicht einmal die analytischen Gebilde algebraischer Funktionen von mehreren Veränderlichen stets überall Mannigfaltigkeitscharakter haben, muß man, um nicht zu speziell zu sein, notwendig algebroide Singularitäten als innere Punkte der zu betrachtenden Gebilde zulassen. Für solche Gebilde ist in der neueren Literatur der Begriff des *komplexen Raumes (espace analytique général)* geläufig. Es ist keineswegs trivial, daß die Thimmschen Sätze über die algebraische Abhängigkeit auch für meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen gelten. Indessen gelang THIMM auch hier durch detaillierte Überlegungen der Nachweis, daß die Abhängigkeitssätze richtig bleiben. In [24] beweist er den folgenden Satz, der alle seine früher bewiesenen Abhängigkeitssätze umfaßt (p. 457, Hauptsatz II):

Satz (W. THIMM): *In kompakten komplexen Räumen sind analytisch abhängige meromorphe Funktionen stets algebraisch abhängig*[1a]).

---

[1]) Die zweite Aussage dieses Satzes ergibt sich auch unmittelbar aus einem Satz von H. CARTEN (vgl. [4], Exp. XV).

[1a]) Für den Fall zweier meromorpher Funktionen wurde dieser Satz auch von K. STEIN [19], S. 106, bewiesen.

4. Die Sätze von THIMM sowie SIEGEL und BOREL lehren, daß zwischen den Begriffen „kompakt" und „algebraisch" analog wie in der klassischen Funktionentheorie auch bei mehreren Veränderlichen starke Bindungen bestehen. Als weiteres Beispiel hierfür kann der folgende Satz angeführt werden, der 1952 von W. L. CHOW ohne Beweis angekündigt wurde[2]):

Satz (W. L. CHOW): *Ist X ein zusammenhängender kompakter n-dimensionaler komplexer Raum, so ist der Körper $K(X)$ der auf X meromorphen Funktionen isomorph einer einfachen algebraischen Erweiterung eines Körpers in höchstens n Unbestimmten über dem Körper C der komplexen Zahlen.*

Dieser Satz wurde inzwischen von J. P. SERRE (vgl. [4], Exp. II) für den Fall bewiesen, daß X eine komplexe Mannigfaltigkeit ist und der Transzendenzgrad von $K(X)$ über C mit der komplexen Dimension n von X übereinstimmt. Später hat C. L. SIEGEL [18] mit den von ihm entwickelten Methoden ebenfalls einen Beweis für diese Teilaussage des Satzes von CHOW gegeben. H. KNESER hat bemerkt[3]), daß die Schlußweisen von SIEGEL so modifiziert werden können, daß sich auch noch die entsprechende Aussage für komplexe Räume ergibt. Ein Beweis für den allgemeinen Chowschen Satz steht implizit in den Thimmschen Arbeiten [23] und [24].

5. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, mit Hilfe eines allgemeinen Satzes über holomorphe Abbildungen komplexer Räume einfache Beweise für die Sätze von THIMM und CHOW zu geben. Durch eine Verfeinerung der Beweismethode läßt sich auch der Satz von SIEGEL-BOREL sowie ein Analogon dazu für komplexe Räume ableiten[4]), darüber möchte ich jedoch in einer anderen Arbeit berichten. Der den Überlegungen zugrunde liegende Gedanke ist sehr naheliegend und wurde auch bereits vielfach benutzt: Um die algebraische Abhängigkeit von k in einem komplexen Raum gegebenen meromorphen Funktionen zu beweisen, wird die durch die Funktionen bestimmte meromorphe Abbildung φ des Raumes X in den k-dimensionalen Osgoodschen Raum $\overline{C}^k$ betrachtet[5]). Die Funktionen sind sicher dann algebraisch abhängig, wenn das Bild $\varphi(X)$ des Raumes X im $\overline{C}^k$ eine algebraische, d. h. durch Polynomgleichungen beschreibbare, echte Teilmenge von $\overline{C}^k$ ist. Hierzu reicht nach einem Satz von CHOW ([5], auch [8, 15]; [4], Exp. XIV) hin, daß $\varphi(X)$ eine analytische, d. h. im Kleinen durch lokal-holomorphe Funktionen beschreibbare, echte Teilmenge von $\overline{C}^k$ ist.

Zur Durchführung des geschilderten Ansatzes ist es offenbar wichtig, Bedingungen zu kennen, unter denen bei *meromorphen* Abbildungen komplexer Räume die Bilder analytische Mengen sind. Es wird sich zeigen (vgl. §1), daß man sich dabei auf das Studium *holomorpher* Abbildungen beschränken kann; denn durch ein allgemeines Verfahren, welches die Unbestimmtheitsstellen

---

[2]) Vgl. hierzu die Bemerkung in der Einleitung der Arbeit [6] von W. L. CHOW und K. KODAIRA. Mir ist nicht bekannt, ob inzwischen die dort angekündigte Arbeit "On complex analytic varieties" veröffentlicht worden ist.

[3]) Vortrag, gehalten auf der DMV-Tagung in Göttingen 1955.

[4]) Vgl. hierzu auch J. P. SERRE [4], Exp. II.

[5]) Unter dem k-dimensionalen Osgoodschen Raum $\overline{C}^k$ wird das cartesische Produkt von k Riemannschen Zahlenkugeln verstanden.

eliminiert, läßt sich jeder durch meromorphe Funktionen vermittelten Abbildung in natürlicher Weise eine holomorphe Abbildung zuordnen.

Für holomorphe Abbildungen habe ich nun Bedingungen der gewünschten Art in meiner Dissertation angegeben. Es wurde insbesondere bewiesen (vgl. hierzu auch [13, 14] und [20]):

Ist $\tau : X \to Y$ *eine holomorphe Abbildung eines kompakten komplexen Raumes* X *in einen beliebigen komplexen Raum* Y, *so ist* $\tau(X)$ *eine analytische Menge in* Y.

Aus diesem Satze sowie aus einigen Zusätzen ergeben sich die Sätze von W. THIMM und W. L. CHOW als einfache Folgerungen. In § 1 sind der Vollständigkeit halber noch einmal kurz die grundlegenden Begriffe und Sätze zusammengestellt, mit deren Hilfe in § 2 der Satz von THIMM und in § 3 der Satz von CHOW abgeleitet werden. § 4 enthält Bemerkungen zum Satz von CHOW; insbesondere wird eine Beziehung zu der von K. STEIN [19, 21] begründeten Theorie der analytischen Projektionen und Zerlegungen hergestellt. Durch Einführung des Begriffes der Faserzahl gelingt es, Schranken für die Grade der Polynome, die jeweils die algebraische Abhängigkeit zum Ausdruck bringen, anzugeben. Auf diese Weise ergibt sich auch ein Beweis für den Hauptsatz I in [23] in seiner scharfen Form, der sich somit ebenfalls als Folgerung aus dem allgemeinen Abbildungssatz erweist [6]).

§ 1. Vorbereitungen zum Beweise der Sätze von THIMM und CHOW

1. Wir stellen in diesem Paragraphen einige Begriffe und Sätze zusammen, die wir zum Beweise der Sätze von THIMM und CHOW benötigen. Komplexe Räume, analytische Mengen und holomorphe Abbildungen seien wie in [4] bzw. [14] definiert [7]); ein komplexer Raum braucht also weder zusammenhängend noch endlich-dimensional zu sein. Es werden nur holomorphe Abbildungen τ eines komplexen Raumes X in eine komplexe Mannigfaltigkeit Y betrachtet, da dieser Fall in den hier interessierenden Anwendungen stets vorliegen wird. Ist $\tau : X \to Y$ eine solche Abbildung, so ist für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\tau^{-1}(\tau(x))$ eine analytische Menge in X, die den Punkt x enthält. Wir nennen $\tau^{-1}(\tau(x))$ die *Faser der Abbildung* τ über dem Punkt $y = \tau(x) \in Y$.

Den Begriff des Ranges einer holomorphen Abbildung definieren wir nach bekanntem Vorbild: in der Umgebung eines jeden uniformisierbaren Punktes $x \in X$ kann eine holomorphe Abbildung $\tau : X \to Y$ durch holomorphe Funktionen

$$w_1 = f_1(z_1, \ldots, z_a), \ldots, w_b = f_b(z_1, \ldots, z_a)$$

gegeben werden, wenn $z_1, \ldots, z_a$ bzw. $w_1, \ldots, w_b$ Ortsuniformisierende in x bzw. $\tau(x)$ sind.

Unter dem Rang $\varrho_\tau(x)$ der Abbildung τ im Punkte $x \in X$ werde nun der Rang der Funktionalmatrix $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_b)}{\partial(z_1, \ldots, z_a)}$ im Punkte $x \in X$ verstanden. Be-

[6]) Die vorliegende Arbeit ist der sehr stark abgeänderte und erweiterte 3. Teil der Dissertation des Verf., die 1954 der Math.-Nat. Fakultät der Universität Münster vorgelegen hat. Vgl. hierzu auch die in den Colloquiumsberichten der Universität Straßburg erschienenen Arbeit [20] von Herrn Prof. Dr. K. STEIN.

[7]) Zum Begriff des komplexen Raumes vgl. auch [7] sowie [12] und [13]; eine Einführung in die Theorie der analytischen Mengen findet sich in [15], [13] sowie [4].

zeichnet $\dot{X}$ die in X enthaltene komplexe Mannigfaltigkeit, so ist offenbar die Funktion $\varrho_\tau(x)$ in $\dot{X}$ wohldefiniert. Für jede zusammenhängende Komponente X_ι von X existiert

$$r_\tau(X_\iota) = \sup_{x \in X_\iota \cap \dot{X}} \varrho_\tau(x);$$

wir nennen $r_\tau(X_\iota)$ den *Rang von τ auf X_ι*. Es gilt $r_\tau(X_\iota) \leq d(X_\iota)$, wenn $d(X_\iota)$ die komplexe Dimension von X_ι bezeichnet. Die Zahl

$$r(\tau) = \sup_{x \in \dot{X}} \varrho_\tau(x)$$

heißt der *Rang von τ schlechthin*. Es gilt $r(\tau) \leq d(X)$; ist also X endlichdimensional, so ist $r(\tau)$ sicher endlich[8]).

Aus der Definition des Ranges folgert man leicht (vgl. hierzu auch die schärferen Aussagen in [13, 14]):

Satz 1: Ist $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung und ist X zusammenhängend, so ist die Menge aller Punkte $x \in \dot{X}$, in denen gilt: $\varrho_\tau(x) = r(\tau)$, eine offene und dichte Menge in X.

In [14] (vgl. auch [13, 20]) wurde der folgende Satz bewiesen, den wir in den §§ 2.3 entscheidend benutzen werden:

Satz 2: Ist $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung und ist X kompakt, so ist $\tau(X)$ eine $r(\tau)$-dimensionale analytische Menge in Y.

2. Sind $f_1, \ldots, f_k$ holomorphe Funktionen in einem komplexen Raum X, so wird durch die Gleichungen

$$z_1 = f_1(x), \ldots, z_k = f_k(x), \; x \in X,$$

eine holomorphe Abbildung $\tau : X \to C^k$ von X in den Raum C^k der k komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_k$ definiert, die wir die zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gehörende holomorphe Abbildung nennen. Sind die Funktionen $f_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, meromorph in X und hat keine Funktion $f_\varkappa$ eine Unbestimmtheitsstelle in X, so kann in analoger Weise eine zu den $f_1, \ldots, f_k$ gehörende holomorphe Abbildung $\tau : X \to \overline{C}^k$ von X in den k-dimensionalen Osgoodschen Raum $\overline{C}^k$ (darunter wird das direkte Produkt von k Riemannschen Zahlenkugeln verstanden) definiert werden. Hat jedoch eine der Funktionen $f_\varkappa$ eine Unbestimmtheitsstelle, so kann man den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ nicht mehr ohne weiteres eine holomorphe Abbildung zuordnen, da jetzt gewissen Punkten $x \in X$ höherdimensionale Mengen im $\overline{C}^k$ entsprechen. Es gibt in diesem Falle lediglich noch eine natürliche holomorphe Abbildung $\tau : X - N \to \overline{C}^k$, dabei bezeichnet N diejenige analytische Menge in X, die aus all den Punkten besteht, in denen wenigstens eine der Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ eine Unbestimmtheitsstelle hat.

Es gibt eine recht umfangreiche Literatur, in der das Verhalten einer durch in X meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gegebenen holomorphen Abbildung $\tau : X - N \to \overline{C}^k$ in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle $x \in N$ untersucht

[8]) In [13, 14] wird eine Definition des Ranges in einem Punkt gegeben, die für viele Betrachtungen bequemer ist als die hier gegebene Definition. Es läßt sich jedoch zeigen, daß in beiden Fällen die Begriffe des Ranges schlechthin äquivalent sind (vgl. [14]).

wird. Hierher gehören z. B. Arbeiten von BLUMENTHAL [2] und OSGOOD ([9], p. 603); vor allem aber die Untersuchungen von W. THIMM ([22, 23, 24] sowie die dort weiter zitierten Arbeiten). Gerade durch ein intensives Studium der Unbestimmtheitsstellen war es W. THIMM möglich, seine Abhängigkeitssätze zu beweisen.

In [12] (vgl. auch [14]) wurde gezeigt, daß im Hinblick auf Fragen, wie sie hier interessieren, ein näheres Eingehen auf die Natur der Unbestimmtheitsstellen nicht unbedingt nötig ist. Es gilt nämlich:

Satz 3: Sind in einem zusammenhängenden komplexen Raum X meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ mit der Unbestimmtheitsmenge N gegeben, so gibt es einen komplexen Raum $'X$ mit folgenden Eigenschaften:

a) *$'X$ ist eine eigentliche Modifikation von X, d. h. es gibt eine eigentliche*[9]*, holomorphe Abbildung π von $'X$ auf X, die außerhalb einer in $'X$ analytischen Menge $'N \neq {'X}$ umkehrbar ist. Es gilt: $N = \pi('N)$.*

b) *Der durch die Gleichung $\pi^*(f(x)) = {'f}('x) = f \circ \pi('x)$ definierte Homomorphismus π^* des Körpers $K(X)$ der in X meromorphen Funktionen in den Körper $K('X)$ der in $'X$ meromorphen Funktionen ist ein Isomorphismus von $K(X)$ auf $K('X)$. Die Funktionen $'f_\varkappa = f_\varkappa \circ \pi$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, haben keine Unbestimmtheitsstellen in $'X$.*

c) *Zwischen den zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ und $'f_1, \ldots, 'f_k$ gehörenden holomorphen Abbildungen $\tau: X - N \to \overline{C}^k$ und $'\tau: {'X} \to \overline{C}^k$ bestehen folgende Beziehungen:*

$$'\tau('x) = \tau \circ \pi('x) \text{ für } 'x \in {'X} - {'N};\ r('\tau) = r(\tau),\ \tau(X - N) \subset {'\tau}('X) \subset \overline{\tau(X - N)}.$$

Ein ausführlicher Beweis dieses Satzes findet sich in [14], hier sei nur bemerkt, daß $'X$ im wesentlichen der im Produktraum $X \times \overline{C}^k$ gelegene Graph der Abbildung τ ist[10]).

Satz 3 sagt — grob gesprochen — aus, daß man die Unbestimmtheitsstellen von endlich vielen in einem komplexen Raum X meromorphen Funktionen simultan eliminieren kann, wenn man X in den Unbestimmtheitsstellen geringfügig abändert (modifiziert). Der Raum $'X$ spielt im folgenden eine besondere Rolle; wir nennen ihn einen zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gehörenden komplexen Raum und entsprechend $'\tau$ eine zugehörige Abbildung. Man kann im übrigen durch eine naheliegende weitere Forderung erreichen, daß $'X$ bis auf analytische Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

§ 2. Algebraische und analytische Abhängigkeit meromorpher Funktionen. Beweis des Satzes von THIMM

1. Es sei X ein komplexer Raum, $f_1, \ldots, f_k$ seien meromorphe Funktionen in X. Mit P sei die Vereinigung der Polstellenmengen der Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ bezeichnet; P ist eine analytische Menge in X. Wir definieren (vgl. auch [20]):

---

[9]) Eine stetige Abbildung heißt bekanntlich *eigentlich*, wenn die Urbilder kompakter Mengen stets kompakt sind.

[10]) Zu Satz 3 vgl. auch [12], § 7; zur allgemeinen Theorie der Modifikationen siehe etwa [7].

Def. 1 (Algebraische Abhängigkeit): Die im komplexen Raum X meromorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ heißen algebraisch abhängig, wenn es ein Polynom $Q(z_1, \ldots, z_k) \not\equiv 0$ mit komplexen Koeffizienten gibt, so daß für jeden Punkt $x \in X - P$ gilt:

$$Q(f_1(x), \ldots, f_k(x)) = 0.$$

Wir beweisen sofort ($'X$ sei ein gemäß Satz 3 zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gehörender komplexer Raum; $'\tau$ die zugehörige Abbildung von $'X$ in $\overline{C}^k$):

Satz 4: Die in X meromorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ sind genau dann algebraisch abhängig, wenn es eine analytische Menge M im $\overline{C}^k$ gibt, $M \neq \overline{C}^k$, so daß gilt:

$$'\tau('X) \subset M.$$

In der Tat! Sind $f_1, \ldots, f_k$ algebraisch abhängig und ist $Q(z_1, \ldots, z_k)$ ein Polynom mit der in Def. 1 angegebenen Eigenschaft, so sei M die durch die Gleichung $Q(z_1, \ldots, z_k) = 0$ in $\overline{C}^k$ definierte analytische Menge, wegen $Q(z_1, \ldots, z_k) \not\equiv 0$ gilt $M \neq \overline{C}^k$. Nach Def. 1 gilt: $\tau(X - P) \subset M$, wenn τ die zu den $f_1, \ldots, f_k$ gehörende holomorphe Abbildung von $X - N$ in $\overline{C}^k$ bezeichnet. Aus Stetigkeitsgründen gilt alsdann auch $\tau(X - N) \subset M$. Da $'\tau('X)$ nach Satz 3c) in der abgeschlossenen Hülle von $\tau(X - N)$ enthalten und M abgeschlossen ist, so folgt weiter $'\tau('X) \subset M$.

Gibt es umgekehrt eine in $\overline{C}^k$ analytische Menge M mit der in Satz 4 angegebenen Eigenschaft, so folgt zunächst aus einem bekannten Satz von Chow (vgl. hierzu [5, 8, 15] sowie [4], Exp. XIV), daß M eine algebraische Menge im $\overline{C}^k$ ist. Daher ist $M \cap C^k$ im Nullstellengebilde eines Polynoms $Q(z_1, \ldots, z_k) \not\equiv 0$ enthalten. Da $'\tau('X) \subset M$, so gilt wegen Satz 3c) auch $\tau(X - N) \subset M$ und wegen $N \subset P$ also erst recht: $\tau(X - P) \subset M$. Das bedeutet aber: $Q(f_1(x), \ldots, f_k(x)) = 0$ für jeden Punkt $x \in X - P$, q. e. d.

2. Um den Begriff der analytischen Abhängigkeit für in einem komplexen Raum X meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ einzuführen, bezeichnen wir mit X_P die im komplexen Raum $X - P$ enthaltene komplexe Mannigfaltigkeit. In X_P sind die Differentialformen $df_1, \ldots, df_k$ wohldefiniert und holomorph. Wir sagen nun:

Def. 2 (Analytische Abhängigkeit): Die im komplexen Raum X meromorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ heißen analytisch abhängig im Punkte $x_0 \in X$, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so daß in jedem Punkt $x \in U(x_0) \cap X_P$ die Differentialformen $df_1, \ldots, df_k$ linear abhängig sind. Die Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ heißen analytisch abhängig schlechthin, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in X$ analytisch abhängig sind.

Offenbar sind algebraisch abhängige meromorphe Funktionen stets analytisch abhängig. Man beweist nun durch direkte Rechnung sofort:

Die meromorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ sind genau dann analytisch abhängig im Punkte $x_0 \in X$, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so daß in jedem Punkt $x \in U(x_0) \cap X_P$ der Rang $\varrho_\tau(x)$ der zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gehörenden holomorphen Abbildung $\tau: X - N \to \overline{C}^k$ kleiner als k ist.

Hieraus folgt auf Grund von Satz 1 und Satz 3:

Satz 5: In einem zusammenhängenden komplexen Raum X sind meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ genau dann analytisch abhängig in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn der Rang $r('\tau)$ von $'\tau : 'X \to \overline{C}^k$ kleiner als k ist.

Hierin ist der bekannte Satz enthalten: *In einem zusammenhängenden komplexen Raum X sind meromorphe Funktionen, die in wenigstens einem Punkt $x_0 \in X$ analytisch abhängig sind, analytisch abhängig schlechthin.*

3. Wir können nun beweisen:

Satz 6 (W. THIMM): *In kompakten komplexen Räumen sind analytisch abhängige meromorphe Funktionen algebraisch abhängig.*

Der Beweis ist mit den hier zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln trivial: Sind $f_1, \ldots, f_k$ im kompakten komplexen Raum X meromorph und analytisch abhängig, so betrachten wir die zugehörige holomorphe Abbildung $'\tau : 'X \to \overline{C}^k$. Aus Satz 5 folgt sofort: $r('\tau) \leqq k - 1$. Nach Satz 2 ist also $'\tau('X)$ eine höchstens $(k-1)$-dimensionale analytische Menge in $\overline{C}^k$. Da somit sicher gilt: $'\tau('X) \neq \overline{C}^k$, so folgt aus Satz 4 mit $M = '\tau('X)$ die Behauptung.

Offenbar haben wir sogar bewiesen:

Satz 6': In zusammenhängenden kompakten komplexen Räumen sind meromorphe Funktionen, die in wenigstens einem Punkt analytisch abhängig sind, algebraisch abhängig.

Aus Satz 6 folgt sofort, da in einem n-dimensionalen komplexen Raum $(n + 1)$ meromorphe Funktionen stets analytisch abhängig sind:

Satz 6'': In n-dimensionalen, kompakten komplexen Räumen sind $(n + 1)$ meromorphe Funktionen algebraisch abhängig.

§ 3. Beweis des Satzes von CHOW

Wir beweisen in diesem Paragraphen den folgenden

Satz 7 (W. L. CHOW): *Ist X ein zusammenhängender kompakter n-dimensionaler komplexer Raum, so ist der Körper $K(X)$ der auf X meromorphen Funktionen isomorph einer einfachen algebraischen Erweiterung eines Körpers höchstens vom Transzendenzgrad n über dem Körper C der komplexen Zahlen.*

Beweis: a) Nach Satz 6'' besitzt $K(X)$ über C einen Transzendenzgrad $k \leqq n$. Es sei $f_1, \ldots, f_k$ eine Transzendenzbasis von $K(X)$ über C, die wir uns ein für alle Mal fest gewählt denken. Um zu zeigen, daß $K(X)$ einfach algebraisch über $K^* = C(f_1, \ldots, f_k)$ ist, genügt es, folgendes zu beweisen:

Es gibt eine feste natürliche Zahl m, derart, daß für jedes Element $f \in K(X)$ gilt: $[f : K^*] \leqq m$[11]). Daraus ergibt sich dann die Behauptung wie folgt: Man adjungiere zu K^* ein Element $f_0 \in K(X)$, welches über K^* von maximalem Grad ist. Würde $K^*(f_0)$ nicht mit $K(X)$ übereinstimmen, so könnte man noch ein nicht in $K^*(f_0)$ liegendes Element $g \in K(X)$ zu $K(f_0)$ adjungieren. Nach dem Satz vom primitiven Element[12]) gäbe es dann ein Element $h \in K(X)$,

---

[11]) Mit $[f : K^*]$ wird wie üblich der Grad von f über K^* bezeichnet.

[12]) Der Satz vom primitiven Element ist anwendbar, da der Grundkörper C die Charakteristik 0 hat.

so daß $K^*(h) = K^*(f_0, g)$. Hieraus folgt aber

$$[h : K^*] = [g : K^*(f_0)] \cdot [f_0 : K^*] > [f_0 : K^*],$$

was der Wahl von f_0 widerspricht. Also gilt $K^*(f_0) = K(X)$ wie behauptet.

b) Sei $f \in K(X)$ irgendeine auf X meromorphe Funktion. Wir bezeichnen mit $'X_f$ einen zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k, f$ gehörenden komplexen Raum im Sinne von Satz 3 und mit $'\tau_f$ die natürliche holomorphe Abbildung von $'X_f$ in den Raum $\overline{C}^{k+1}$ der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_k, w$. Da die Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ analytisch unabhängig und die Funktionen $f_1, \ldots, f_k, f$ analytisch abhängig sind, so gilt: $r('\tau_f) = k$. Daher ist nach Satz 2 die Menge $'\tau_f('X_f)$ eine k-dimensionale analytische und also nach CHOW algebraische Menge im $\overline{C}^{k+1}$. Die Menge $'\tau_f('X_f) \cap C^{k+1}$ ist folglich enthalten im Nullstellengebilde eines Polynoms $Q_f(w, z_1, \ldots, z_k) \not\equiv 0$, das wir etwa in der Form anschreiben:

$$Q_f(w, z_1, \ldots, z_k) = \sum_{\alpha=0}^{a_f}{}' P_\alpha^{(f)}(z_1, \ldots, z_k) \cdot w^\alpha,$$

$$\text{wo } P_\alpha^{(f)}(z_1, \ldots, z_k) \in C[z_1, \ldots, z_k], \quad P_{a_f}^{(f)}(z_1, \ldots, z_k) \not\equiv 0.$$

Da das über $C(f_1, \ldots, f_k)$ gebildete Polynom $Q_f(w) = \sum_{\alpha=0}^{a_f}{}' P_\alpha^{(f)}(f_1, \ldots, f_k) \cdot w^\alpha$ nicht identisch verschwindet und von $f \in K(X)$ annulliert wird, so genügt es also, die Existenz einer nicht von $f \in K(X)$ abhängenden natürlichen Zahl m zu beweisen, so daß für jedes $f \in K(X)$ gilt: $a_f \leq m$.

Bezeichnet N_f die im Raum C^k der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_k$ liegende höchstens $(k-1)$-dimensionale analytische Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome $P_\alpha^{(f)}(z_1, \ldots, z_k)$:

$$N_f : \{P_0^{(f)}(z_1, \ldots, z_k) = \cdots = P_{a_f}^{(f)}(z_1, \ldots, z_k) = 0\},$$

so ist das sicher bewiesen, wenn gezeigt wird:

Es gibt eine nicht von der Wahl des Elementes $f \in K(X)$ abhängende natürliche Zahl m und eine nichtleere offene Menge $B_f \subset C^k - N_f$, so daß über jedem Punkt $z \in B_f$ höchstens m verschiedene Punkte von $'\tau_f('X_f)$ liegen (B_f darf von f abhängig sein).

c) Um diese letzte Aussage zu beweisen, werde mit $'X$ ein zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gehörender komplexer Raum und mit $'\tau$ die zugehörige holomorphe Abbildung von $'X$ in den $\overline{C}^k$ der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_k$ bezeichnet. Es gilt $r('\tau) = k$, nach Satz 2 gilt somit $'\tau('X) = \overline{C}^k$. Den in X meromorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_k, f$ entsprechen nach Satz 3 in $'X$ meromorphe Funktionen $'f_1, \ldots, 'f_k, 'f$. Die Funktionen $'f_1, \ldots, 'f_k$ besitzen nach Konstruktion von $'X$ keine Unbestimmtheitsstellen (und definieren die Abbildung $'\tau$); die Funktion $'f$ kann Unbestimmtheitspunkte in $'X$ besitzen. Bezeichnet $\widetilde{N}_f$ diese im n-dimensionalen komplexen Raum $'X$ höchstens $(n-2)$-dimensionale Unbestimmtheitsmenge, so ist auf jeden Fall $'f$ außerhalb $\widetilde{N}_f$ eine eindeutige, sicher stetige Funktion (hierbei wird $w = \infty$ als Funktionswert zugelassen). Da die Funktionen $f_1, \ldots, f_k, f$ und also auch die Funktionen $'f_1, \ldots, 'f_k, 'f$ einer algebraischen Relation genügen, kann $'f$ auf jeder Faser $'\tau^{-1}(z)$, $z \in \overline{C}^k$,

von $'\tau$, soweit dieselbe in $'X - \tilde{N}_f$ verläuft, höchstens endlich viele Werte annehmen; dies hat zur Folge, daß $'f$ auf jeder zusammenhängenden Komponente von $'\tau^{-1}(z) \cap ('X - \tilde{N}_f)$ konstant ist.

Es gilt nun $'\tau(\tilde{N}_f) \cap C^k \subset N_f$, denn höchstens über den Punkten von N_f liegen im C^{k+1} unendlich viele Punkte von $'\tau_f('X_f)$. Es hat somit keine Faser $'\tau^{-1}(z)$ Punkte mit $\tilde{N}_f$ gemeinsam, wenn $z \in C^k - N_f$; folglich ist $'f$ auf jeder zusammenhängenden Komponente von $'\tau^{-1}(z)$, $z \in C^k - N_f$, konstant. Da $'X$ kompakt ist (man beachte, daß $\pi: 'X \to X$ gemäß Satz 3 eine eigentliche Abbildung ist), zerfällt jede Faser $'\tau^{-1}(z)$ in $'X$ in endlich viele irreduzible und also auch endlich viele zusammenhängende Komponenten. Bezeichnen wir mit $m(z)$ ihre Anzahl, so kann also $'f$ auf $'\tau^{-1}(z)$, $z \in C^k - N_f$, höchstens $m(z)$ verschiedene Werte annehmen. Für die oben betrachtete Menge $'\tau_f('X_f)$ bedeutet das, daß über jedem Punkt $z \in C^k - N_f$ höchstens $m(z)$ verschiedene Punkte von $'\tau_f('X_f)$ liegen.

Nach einem bekannten Lemma von Osgood (vgl. [9], p. 230) gibt es nun eine natürliche Zahl m und eine nichtleere offene Menge $B_f \subset C^k - N_f$, derart, daß die Menge der Punkte $z \in B_f$ mit $m(z) \leq m$ dicht in B_f liegt. Wenn aber über jedem Punkt einer in B_f dichten Menge höchstens m verschiedene Punkte von $'\tau_f('X_f)$ liegen, so können über jedem Punkt $z \in B_f$ überhaupt höchstens m verschiedene Punkte von $'\tau_f('X_f)$ liegen. Da m unabhängig von f ist (m hängt nur von der Wahl der Transzendenzbasis ab!), ist somit der Satz von Chow bewiesen.

§ 4. Bemerkungen zu den Sätzen von Thimm und Chow

1. Spezialfälle der Sätze von Thimm und Chow ergeben sich aus einem von K. Stein herrührenden Satz über die Existenz einer „komplexen Basis". Wir führen im folgenden den Begriff der komplexen Basis einer holomorphen Abbildung etwas abweichend von der in [21], Abschnitt 6 gegebenen Definition ein.

Def. 3 (Komplexe Basis): Ist $\tau: X \to \overline{C}^k$ eine holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in den Osgoodschen Raum $\overline{C}^k$, die durch k in X meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ ohne Unbestimmtheitsstellen vermittelt wird, so heißt ein Paar (Φ, X^*) eine zu τ gehörende komplexe Basis, wenn folgendes gilt:

a) *X^* ist ein komplexer Raum; Φ ist eine holomorphe Abbildung von X auf X^*, derart, daß jede zusammenhängende Faserkomponente von Φ eine zusammenhängende Faserkomponente von τ ist und umgekehrt.*

b) *Ist f eine in X meromorphe Funktion, die von den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ analytisch abhängt, so gibt es eine meromorphe Funktion f^* in X^*, so daß $f = f^* \circ \Phi$.*

Aus einem von K. Stein bewiesenen Satz (vgl. [21], Satz 13) kann nun gefolgert werden:

Satz 8: Ist X ein zusammenhängender, n-dimensionaler kompakter komplexer Raum, so existiert zur Abbildung $\tau: X \to \overline{C}^k$ eine komplexe Basis (Φ, X^*) sicher dann, wenn gilt: $r(\tau) > n - 2$.

Hieraus ergibt sich aber unter Heranziehung von Satz 3 sofort: *Sind $f_1, \ldots, f_k$, $k > n - 2$, analytisch unabhängige meromorphe Funktionen in einem*

n-dimensionalen kompakten komplexen Raum X, so ist jede von $f_1, \ldots, f_k$ analytisch abhängige, in X meromorphe Funktion f algebraisch von $f_1, \ldots, f_k$ abhängig. Es gibt eine natürliche Zahl m, die nicht von f, sondern nur von den $f_1, \ldots, f_k$ abhängt, so daß f über $C(f_1, \ldots, f_k)$ algebraisch höchstens vom Grade m ist.

In der Tat! Ist $'X$ ein zu den $f_1, \ldots, f_k$ gehörender komplexer Raum, so ist auch die zugehörige Abbildung $'\tau : 'X \to \overline{C}^k$ vom Range $k > n - 2$. Da $'X$ kompakt ist, gibt es also nach dem Satz von Stein eine komplexe Basis (Φ, X^*) zur Abbildung $'\tau$. Entsprechen nun den Funktionen $f_1, \ldots, f_k, f \in K(X)$ die Funktionen $'f_1, \ldots, 'f_k, 'f \in K('X)$, so gibt es nach Def. 3 b) Funktionen $f_1^*, \ldots, f_k^*, f^* \in K(X^*)$, so daß jeweils gilt: $'f_\varkappa = f_\varkappa^* \circ \Phi$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, $'f = f^* \circ \Phi$. Die Funktionen $f_1, \ldots, f_k, f$ sind offenbar genau dann algebraisch abhängig, wenn f^* Nullstelle eines Polynoms $Q_f(w; f_1^*, \ldots, f_k^*) \not\equiv 0$ ist. Das aber ist auf Grund bekannter Schlußweisen klar, denn X^* kann in natürlicher Weise als eine analytisch-verzweigte Überlagerung des $\overline{C}^k$ aufgefaßt werden. Ist m die Blätterzahl dieser Überlagerung, so kann sogar ein Polynom $Q_f(w; f_1^*, \ldots, f_k^*) \not\equiv 0$ gefunden werden, das in w höchstens vom Grade m ist, q. e. d.

In genau derselben Weise folgert man aus dem Satz von Stein den Satz von Chow, wenn man voraussetzt, daß der Transzendenzgrad des Körpers $K(X)$ über C mindestens $n - 1$ ist. Der Grad von $K(X)$ über $C(f_1, \ldots, f_k)$ ist analog wie oben höchstens gleich der Blätterzahl des zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gehörenden Basisraumes X^*, wenn X^* als Überlagerung des $\overline{C}^k$ aufgefaßt wird.

2. Wir haben in § 3 beim Beweise des Satzes von Chow die Schranke m für den Grad des Körpers $K(X)$ über $C(f_1, \ldots, f_k)$ im wesentlichen dadurch erhalten, daß wir die Anzahl $m(x)$ der zusammenhängenden Komponenten der Fasern $'\tau^{-1}('\tau(x))$ betrachteten und zeigten, daß diese Funktion $m(x)$ in einer „hinreichend großen" Punktmenge beschränkt ist. Dieser Tatsache liegt nun ein allgemeiner Sachverhalt zugrunde, der hier ohne Beweise angegeben sei (vgl. auch [14]; Spezialfälle des folgenden Satzes ergeben sich wieder aus dem Satz von Stein):

Satz 9: Ist $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung eines kompakten komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y, so gibt es eine natürliche Zahl m derart, daß für jeden Punkt $x \in X$ die Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$ in höchstens m zusammenhängende Komponenten zerfällt.

Nennen wir die kleinste Zahl m mit dieser Eigenschaft die *Faserzahl der Abbildung* τ, so haben wir also den

Zusatz zum Satz von Chow*: Ist $f_1, \ldots, f_k$ eine Transzendenzbasis von $K(X)$ über C und $'\tau : 'X \to \overline{C}^k$ eine zugehörige Abbildung, so gilt:*

$$[K(X) : C(f_1, \ldots, f_k)] \leqq \textit{Faserzahl von } '\tau.$$

Analog ergibt sich als

Zusatz zum Satz von Thimm*: Sind $f_1, \ldots, f_k, f$ analytisch abhängige meromorphe Funktionen in einem zusammenhängenden komplexen Raum X, so ist f algebraisch über $C(f_1, \ldots, f_k)$ und es gilt:*

$$[f : C(f_1, \ldots, f_k)] \leqq \textit{Faserzahl von } '\tau.$$

Literatur

[1] BLUMENTHAL, O.: Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen, 1. Teil. Math. Ann. 56, 509—548 (1903). — [2] BLUMENTHAL, O.: Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen, 2. Teil. Math. Ann. 58, 497—527 (1904). — [3] BOREL, A.: Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes. Bull. Soc. Math. France 80, 167—182 (1952). — [4] CARTAN, H.: Séminaire E.N.S. 1953/54, Paris (hektographiert). — [5] CHOW, W. L.: On compact analytic varieties. Amer. J. Math. 71, 893—914 (1949). — [6] CHOW, W. L., u. K. KODAIRA: On analytic surfaces with two independent meromorphic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 38, 319—325 (1952). — [7] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. 129, 274—296 (1955). — [8] KNESER, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. 4, 382—391 (1950/51). [9] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1. Berlin u. Leipzig 1929. — [10] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 2. Berlin u. Leipzig 1932. — [11] POINCARÉ, H.: Sur les fonctions abéliennes. Acta math. (Uppsala) 26, 43—98 (1902). — [12] REMMERT, R.: Über stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Coll. de Topologie, Strasbourg 1954 (hektographiert). — [13] REMMERT, R.: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. 130, 410—441 (1956). — [14] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. (1957). — [15] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 126, 263—306 (1953). — [16] SIEGEL, C. L.: Note on automorphic functions of several variables. Ann. of Math. 43, 613—616 (1942). — [17] SIEGEL, C. L.: Analytic functions of several complex variables; Lectures delivered at the Institute for Advanced Study (1948/49) (hektographiert). — [18] SIEGEL, C. L.: Meromorphe Funktionen auf kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl., math.-physik.-chem. Abt., 1955, 71—77. — [19] STEIN, K.: Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten. Coll. Fonct. Plus. Var. Brüssel 1953. — [20] STEIN, K.: Analytische Abbildungen allgemeiner analytischer Räume. Coll. de Topologie, Strasbourg 1954 (hektographiert). — [21] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. 132, 63—93 (1956). — [22] THIMM, W.: Über die algebraischen Relationen zwischen meromorphen Funktionen in abgeschlossenen Räumen. Dissertation Königsberg 1939. — [23] THIMM, W.: Über meromorphe Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 128, 1—48 (1954). — [24] THIMM, W.: Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen. Math. Z. 60, 435—457 (1954). — [25] WEIERSTRASS, K.: Untersuchungen über die $2r$-fach periodischen Funktionen von r Veränderlichen (Brief an BORCHARDT). J. reine u. angew. Math. 89, 1—8 (1880), sowie Werke II, 125—133.

(Eingegangen am 17. Mai 1956)

Levin, F.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 289—309 (1956)

On Ideals in Multidifferential Polynomial Rings*)

By

Frank Levin in Lexington, Ky.

Introduction

The object of the present paper is to extend to rings of multidifferential polynomials (in the sense of A. Jaeger [2][1])) certain results and methods from the theory of rings of ordinary differential polynomials over ground fields of characteristic zero as given by O. Ore [6]. The essential distinction between the present case and the one for ordinary differential polynomials is that the multidifferential polynomial rings are not generally principal idealrings.

In the first section basic definitions and properties of ideals of multidifferential polynomials are discussed. Canonical bases of such ideals are introduced in Section two, where it is also shown under what conditions the ring of multidifferential polynomials is a simple ring. In Section three examples of maximal right ideals are given; in Section four the adjoint transformation is introduced and this provides a one-to-one correspondence between left and right ideals in the ring, so that the subsequent discussions in most cases may be limited to those for right ideals.

Section five deals with solutions of the multidifferential equation in the ground field. The restricted similarity transform of ideals considered in Section six is the algebraic counterpart of the analytic one given by A. Loewy [3], [4]. This was also considered by E. Noether and W. Schmeidler [5], and their results are commented upon in Section six. Section seven takes up completely reducible ideals which were considered in the analytic sense again by Loewy. The general similarity discussed in Section eight will be of importance in considerations of factorizations of multidifferential polynomials.

1. Multidifferentiations and Multidifferential Polynomials

Let F be an arbitrary (commutative) field of characteristic zero. A mapping

$$D : a \to (a)\, D = a', \quad a \in F$$

of F into itself is called a *derivation of* F if, for any two elements $a, b \in F$, the following conditions are satisfied:

1) $(a + b)' = a' + b'$;
2) $(ab)' = ab' + a'b$.

The set C of all elements mapped onto 0 by D is a field, called the *D-constant field of* F. If $C = F$, the derivation is called *trivial*.

---

*) The author wishes to express his appreciation to Prof. Arno Jaeger of the University of Cincinnati for invaluable suggestions made during the preparation of this paper.

[1]) Numbers in brackets refer to items in the bibliography.

D^t will denote the t-th iteration of D if t is a positive integer and the identity mapping if $t=0$. The semi-group generated by D (consisting of all D^t) is called a *differentiation of* F and is denoted by $[D]$.

Let I be the set of all positive integers $i \leq n$, where n is a fixed integer. In the sequel we shall be concerned with a family $(D_i)_{i \in I}$ of n (≥ 1) derivations of F, where it will be assumed that these derivations commute in pairs. To each D_i there corresponds the differentiation $[D_i]$ and the D_i-constant field C_i. The field $\bigcap_{i \in I} C_i$ will be called the *field of absolute constants of* F. If 1 denotes the identity of F, it follows immediately from the definitions that $(1)\, D_i = 0$ for any $i \in I$, so that the prime field of F is contained in the field of absolute constants of F.

The commutative semi-group (with respect to the compositions of mappings in the usual sense) generated by the family $(D_i)_{i \in I}$ is called a *multidifferentiation of dimension* n *of* F [1] and is denoted by $\mathfrak{D}$; $[D_i]$ is called the *i-th component of* $\mathfrak{D}$. If J is a subset of I, the sub-semi-group of $\mathfrak{D}$ generated by $(D_i)_{i \in J}$ is called a *multicomponent of* $\mathfrak{D}$. In particular, $\mathfrak{D}_t$ will be used to denote that multicomponent of $\mathfrak{D}$ generated by $(D_i)_{i \leq t}$.

It follows from the above that the restriction of $\mathfrak{D}$ to any C_i is also a multidifferentiation of C_i. For, if $c \in C_i$, $(c)\, D_i = 0$, so that

$$0 = (c)\, D_i D_j = (c)\, D_j D_i \,,$$

$j \in I$, and hence $(c)\, D_j \in C_i$.

A multidifferentiation $\mathfrak{D}$ is called *regular in* F [1] if there exists a set of elements $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ such that

$$\det((x_k)\, D_i) \neq 0.$$

This implies that the trivial derivation is not regular. An equivalent characterization of a regular multidifferentiation is given in the following theorem:

Theorem 1.1. *The multidifferentiation $\mathfrak{D}$ is regular if and only if there do not exist $c_i \in F$ not all zero such that*

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (a)\, D_\nu = 0 \tag{1.1}$$

for all $a \in F$.

Proof: If $\det ((x_k)\, D_i)_{i,k=1,\ldots,n} \neq 0$, it follows immediately that (1.1) cannot be true for all $a \in F$ and non-zero c_i.

Suppose now that $\det ((x_k)\, D_i) = 0$ and assume that the maximal rank of all possible matrices $((x_k)\, D_i)_{i,k=1,\ldots,n}$ is r ($< n$). Choose a maximal set of x_i and number the D_i such that

$$\begin{vmatrix} (x_1)D_1 & (x_1)D_2 & \ldots & (x_1)D_r \\ (x_2)D_1 & (x_2)D_2 & \ldots & (x_2)D_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_r)D_1 & (x_r)D_2 & \ldots & (x_r)D_r \end{vmatrix} \neq 0.$$

Let $y \in F$ be an *arbitrary* element and consider the matrix

$$\begin{pmatrix} (x_1)D_1 & \ldots & (x_1)D_r & \ldots & (x_1)D_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_r)D_1 & \ldots & (x_r)D_r & \ldots & (x_r)D_n \\ (y)D_1 & \ldots & (y)D_r & \ldots & (y)D_n \end{pmatrix}$$

Since the rank of this matrix is at most r (the r was assumed to be maximal) the vector of the last row is linearly dependent on the other row vectors, so that (1.1) is satisfied for all $a \in F$ and non-zero c_i. This proves the theorem.

An element of $\mathfrak{D}$, say $\prod_{i \in I} D_i^{\tau_i}$, will be abbreviated by $\mathfrak{D}^\tau$, where τ is an ordered n-tuple of non-negative integers whose i-th component is τ_i. Thus, $\mathfrak{D}^o$, where o denotes the vector all of whose components are zero, denotes the identity mapping.

Let τ denote an ordered n-tuple of positive non-zero integers

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

and let $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ denote an n-tuple of independent indeterminates, commuting in pairs over F. We then use the following abbreviation:

$$\sum_\tau Y^\tau a_\tau = \sum_{\tau_1, \ldots, \tau_n} \left(\prod_{j=1}^{n} Y_j^{\tau_j} \right) a_{\tau_1, \ldots, \tau_n}; \quad a_\tau \in F,$$

where at most finitely many of the coefficients a_τ should not vanish. If one of the components of τ, say τ_k, is zero, we use the abbreviation $Y^\tau a_\tau = \prod_{j \neq k} (Y_j^{\tau_j}) a_\tau$. Similar abbreviations will be used when more than one of the components are zero. In particular $Y^o a_o = a_o$.

Consider two such finite formal sums

$$A = \sum_\tau Y^\tau a_\tau, \quad B = \sum_\tau Y^\tau b_\tau,$$

$a, b \in F$. When addition of A and B is defined by

$$A + B = \sum_\tau Y^\tau (a_\tau + b_\tau)$$

and multiplication is defined by means of the associative and distributive laws and

$$aY_i^t = \sum_{\nu=0}^{t} Y_i^\nu \binom{t}{\nu} ((a) D_i^{t-\nu}), \quad a \in F, \tag{1.2}$$

these sums form a ring $\Omega(F, \mathfrak{D})$, the *ring of multidifferential polynomials in F with respect to* $\mathfrak{D}$ [2]. The elements of $\Omega(F, \mathfrak{D})$ will be called *multidifferential polynomials in F with respect to* $\mathfrak{D}$. Since F is fixed for the remainder of the paper, we abbreviate $\Omega(F, \mathfrak{D})$ by $\Omega(\mathfrak{D})$.

From (1.2) it follows at once that $\Omega(F, \mathfrak{D})$ is isomorphic with the polynomial ring $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ if all components of $\mathfrak{D}$ are trivial.

Let $A = \sum_\tau Y^\tau a_\tau$ be a multidifferential polynomial in $\Omega(\mathfrak{D})$. If $a \in F$, $(a)A$ will stand for

$$(a)A = \sum_\tau (a)\, \mathfrak{D}^\tau a_\tau.$$

The mapping: $a \to (a)A$ is then an endomorphism of the additive group of F. Referring to the addition and multiplication rules again, we see that the correspondence between A and the endomorphism $a \to (a)A$ is a representation of the ring $\Omega(\mathfrak{D})$ in the endomorphism ring of the additive group of F. If

$(a)A = 0$, we shall say that $a \in F$ *is a zero of* A and a *solution of the multidifferential equation* $(z)A = 0$.

When $\mathfrak{D} = [D]$, the corresponding ring $\Omega([D])$ of multidifferential polynomials in F with respect to $[D]$ will be called the *ring of ordinary differential polynomials in F with respect to* $[D]$.

If k is any element of I, every multidifferential polynomial $A \in \Omega(\mathfrak{D})$ can be written uniquely in the form

$$A = \sum_{\nu=1}^{t} Y_k^\nu \alpha_\nu; \quad \alpha_\nu \in \Omega(\mathfrak{D}^k)$$

where $\mathfrak{D}^k$ is the multicomponent of $\mathfrak{D}$ generated by (D_i), $i \neq k$. If $\alpha_t \neq 0$, we shall say that *the order of* A *with respect to* Y_k is t and denote this fact by $o_k(A) = t \geqq 0$. The multidifferential polynomial α_t, which may be thought of as the "leading coefficient" of A with respect to Y_k, will be denoted by $L_k(A)$. $L_k(A) = 0$ if and only if $A = 0$. If Σ is a subset of $\Omega(\mathfrak{D})$, $L_k(\Sigma)$ will denote the set of all $L_k(B)$, $B \in \Sigma$.

If Σ is a subset of $\Omega(\mathfrak{D})$, and $A \in \Omega(\mathfrak{D})$, $A\ \Sigma$ denotes the set of all elements of the form $A S$, $S \in \Sigma$. As is customary, a *right ideal* in $\Omega(\mathfrak{D})$ is a subring Σ of $\Omega(\mathfrak{D})$ such that $A\ \Omega(\mathfrak{D}) \subseteq \Sigma$ for any $A \in \Sigma$; similarly, a *left ideal* is defined. In what follows, "ideal" will stand for "right ideal" where no confusion results.

If $\{\Sigma_i\}$ is a family of subsets of $\Omega(\mathfrak{D})$, we shall denote by

$$(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots)$$

the ideal generated by their set union, and by

$$[\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots]$$

the ideal generated by their set intersection. It is readily shown that $((\Sigma_1, \Sigma_2), \Sigma_3) = (\Sigma_1, (\Sigma_2, \Sigma_3))$ and $[[\Sigma_1, \Sigma_2], \Sigma_3] = [\Sigma_1, [\Sigma_2, \Sigma_3]]$ for any three ideals Σ_i of $\Omega(\mathfrak{D})$.

The principal ideal generated by the element $A \in \Omega(\mathfrak{D})$ will be denoted by $\langle A \rangle$. In particular, in keeping with the above definitions, $\langle 1 \rangle$ will denote the "unit ideal", i. e., $\Omega(\mathfrak{D})$ itself, and $\langle 0 \rangle$ will denote the zero ideal. Two ideals Σ_i are *relatively prime* if $(\Sigma_1, \Sigma_2) = \langle 1 \rangle$. This is the case if and only if there exist polynomials $A_i \in \Sigma_i$ such that $A_1 + A_2 = 1$.

We note that if neither of Σ_1, Σ_2 is the zero ideal, $[\Sigma_1, \Sigma_2] \neq \langle 0 \rangle$. This is true for ideals of $\Omega([D])$ [6]. We proceed by induction.

First, it is clear that $\Omega(\mathfrak{D}_t)$, $t \leqq n$, is a subring of $\Omega(\mathfrak{D})$. Suppose that the assertion has been demonstrated for ideals of $\Omega(\mathfrak{D}_{t-1})$. Let $A, B \in \Omega(\mathfrak{D}_t)$, and suppose that $o_t(A) = o_t(B) + s$, $s \geqq 0$. Then $L_t(A), L_t(B) \in \Omega(\mathfrak{D}_{t-1})$, so that, by hypothesis, there exist non-zero polynomials $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega(\mathfrak{D}_{t-1})$ such that $L_t(A)\,\alpha_1 = L_t(B)\,\alpha_2$. Hence

$$A\,\alpha_1 = B\,Y_t^s\,\alpha_2 + K_1,$$

where $o_t(K_1) < o_t(A)$. Either $K_1 = 0$, or $o_t(K_1) = o_t(B) + s_1$, $s_1 > 0$, and we can find $\alpha_3, \alpha_4 \in \Omega(\mathfrak{D}_{t-1})$, such that

$$K_1 \alpha_3 = B\,Y_t^{s_1}\,\alpha_4 + K_2,$$

where $o_t(K_3) < o_t(K_1)$, or $K_3 = 0$. Continuing in this way, we may eventually find polynomials such that

$$K_{k-1}\,\beta_1 = B\,Y_t^{s_m}\,\beta_t + K_k$$

where $o_t(K_k) < o_t(B)$, or $K_k = 0$, and $K_k \in \Omega(\mathfrak{D}_t)$. Reversing the process we then find polynomials C_i such that

$$A\,C_1 = B\,C_2 + C_3,$$

where $o_t(C_3) < o_t(B)$, or $C_3 = 0$. This is the first step in the algorithm process. The remaining steps are now the same as for the more usual case of commutative polynomial theory, so that finally we obtain a non-zero common multiple of the two polynomials A, B. This completes the induction and the demonstration.

The following rules follow from the preceding definitions and may easily be deduced: Let Σ_1, Σ_2 denote ideals in $\Omega(\mathfrak{D})$; A, a polynomial in $\Omega(\mathfrak{D})$;

Rule 1: $A(\Sigma_1, \Sigma_2) = (A\Sigma_1, A\Sigma_2)$.

Rule 2: $A[\Sigma_1, \Sigma_2] = [A\Sigma_1, A\Sigma_2]$.

Rule 3: $A\Sigma_1 = A\Sigma_2$, $A \neq 0$, *implies that* $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Rule 4: $A\Sigma = [\langle A\rangle, \Sigma]$, $A \neq 0$, *implies that* Σ *is an ideal.*

2. Basis Theorems and Canonical Bases of Ideals

For purposes of illustration of the construction of canonical bases, consider first a multidifferentiation $\mathfrak{D}_2$ of dimension two.

Let $\Sigma \subset \Omega(\mathfrak{D}_2)$ be an ideal. Let T be the subset of Σ which contains, besides 0, all those non-zero elements $A \in \Sigma$ such that $o_1(A) \leq o_1(B)$, for all non-zero $B \in \Sigma$. $L_1(T)$ is an ideal in $\Omega([D_2])$, since Σ is an ideal. It can be shown [1] that $\Omega([D_2])$ is a non-commutative principal ideal ring, so that $L_1(T)$ is a principal ideal in $\Omega([D_2])$. Let $L_1(T) = \beta_1\Omega([D_2])$, where $\beta_1 \in \Omega([D_2])$ and β_1 is monic, i. e., $L_2(\beta_1) = 1$. Choose $P_1 \in T$ such that $L_1(P_1) = \beta_1$. Then, if $N(\neq 0) \in T$, $L_1(N) = L_1(P_1)\,\gamma$, where $\gamma \in \Omega([D_2])$. Thus, if

$$N = P_1\,\gamma + K,$$

it follows that either $K = 0$ or $o_1(K) < o_1(P_1)$. By hypothesis, then, $K = 0$, so that every element of T is a multiple of P_1. Hence, P_1 is a uniquely defined element of T; i. e., $P_1 \in T$, $o_2(P_1) \leq o_2(N)$ for all non-zero $N \in T$, and $L_2(L_1(P_1)) = 1$. For, if $P_1' \in T$ also satisfies these conditions, $P_1' = P_1\,\gamma$ so that $\gamma \varepsilon F$ by the condition on the order of P_1, P_1', and it follows by the last condition that $\gamma = 1$. P_1 will be an element of the canonical basis of Σ. We note that T is not an ideal in $\Omega(\mathfrak{D}_2)$, since $P_1\,Y_1 \notin T$.

Since $L_1(\Sigma)$ is also an ideal in $\Omega([D_2])$, it is also a principal ideal in $\Omega([D_2])$. Let $L_1(\Sigma) = \sigma\,\Omega([D_2])$, where $\sigma \in \Omega([D_2])$ is monic and let the minimum order with respect to Y_1 of any polynomial $A \in \Sigma$ such that $L_1(A) = \sigma$ be m (finite). Suppose that $\beta_1 \neq \sigma$ and let T_1 be the subset of Σ composed of the elements in T plus all those polynomials $B \in \Sigma$ such that $o_1(B) = o_1(P_1) + 1$. The set $L_1(T_1)$ is again seen to be an ideal in $\Omega([D_2])$; let $L_1(T_1) = \beta_2\Omega([D_2])$, where $\beta_2 \in \Omega([D_2])$ is monic. Obviously, $\langle\beta_1\rangle \subseteq \langle\beta_2\rangle \subseteq \langle\sigma\rangle$. If $\beta_1 \neq \beta_2$, we

choose $P_2 \in T_1$ such that $L_1(P_2) = \beta_2$, with the further restriction that if $o_1(P_2) = t$, then

$$o_2(L_1(P_2 - Y_1^t \beta_2)) < o_2(L_1(P_1)).$$

It follows that if there were a $P_2' \in T_1$ with the same conditions, $P_2' - P_2$ would be an element of T so that $(P_2' - P_2) = 0$. This last restriction on P_2 is always possible because of the Euclidean algorithm. If $\beta_1 = \beta_2$, set $P_2 = P_1$. This determines P_2 uniquely.

If $\beta_2 \neq \sigma$, let T_2 be the subset of Σ containing T_1 and all those polynomials $B \in \Sigma$ such that $o_1(B) = o_1(P_1) + 2$. $L_1(T_2)$ is again a principal ideal in $\Omega([D_2])$; $L_1(T_2) = \beta_3 \Omega([D_2])$, $\beta_3 \in \Omega([D_2])$ monic. Again, $\langle\beta_1\rangle \subsetneq \langle\beta_2\rangle \subsetneq \langle\beta_3\rangle \subsetneq \langle\sigma\rangle$. If $\beta_3 \neq \beta_2$ choose $P_3 \in T_2$ such that $L_1(P_3) = \beta_3$, with the further restrictions that, if $L_1(P_3 - Y_1^{t+1} \beta_3) = \beta'$, $L_1(P_3 - Y_1^{t+1} \beta_3 - Y_1^t \beta') = \beta''$, then

$$o_2(\beta') < o_2(\beta_2), \quad o_2(\beta'') < o_2(\beta_1).$$

Once again, this determines P_3 uniquely if when $\beta_2 = \beta_3$ we set $P_2 = P_3$.

We continue this process to find eventually a finite family $\{T_i\}$ of subsets of Σ and an associated family $\{P_i\}$ of polynomials, $P_i \in T_{i-1}$, $T = T_0$, such that $L_1(P_j)$ is a left divisor of $L_1(P_k)$ for all $k \leq j$. The process evidently ends with P_w, where $L_1(P_w) = \sigma$. Also, $L_1(T_{m-1}) = L_1(\Sigma)$. The set of distinct P_i, $i = 1, \ldots, w$, is the *canonical basis of Σ with respect to* $[D_1]$, and is denoted by Φ (2,1).

Theorem 2.1. *The set Φ (2,1) is a basis of Σ.*

Proof: Let $B \in \Sigma$. If $o_1(B) \leq o_1(P_w)$, then B is in one of the sets $T, T_1, \ldots$. In this case, B is, by construction of the set Φ (2,1), representable as a linear combination of the P_i. Suppose, then, that $o_1(B) > o(P_w)$. Then, since $L_1(P_w)\, \Omega([D_1]) = L_1(\Sigma)$, B has the representation

$$B = P_w C + K,$$

where $K \in \Sigma$ is such that $o_1(P_w) \geq o_1(K)$ or $K = 0$. Thus, K is a linear combination of the P_i, so that B is also.

It is, of course, possible to consider the elements of Σ as sums of monomials of descending orders of Y_2. In this case we get another canonical basis of Σ, Φ (1,2) $= (Q_i)$, $i = 1, \ldots, r$, where $Q_1 (\neq 0)$ is chosen in the following way: Let U be the subset of Σ which contains, besides 0, all those non-zero elements $A \in \Sigma$ such that $o_2(A) \leq o_2(B)$ for all non-zero $B \in \Sigma$. Then, $Q_1 \in U$ is chosen so that $L_2(Q_1)$ is monic in $\Omega([D_1])$, i. e., $L_1(L_2(Q_1)) = 1$, and $o_1(Q_1) \leq o_1(Q)$ for all non-zero $Q \in U$. Also, $L_2(\Sigma) = L_2(Q_r)\, \Omega([D_1])$.

Let $mb(\Sigma)$ denote the minimum number of elements necessary for a basis of Σ. If the number of elements of Φ (2,1) and Φ (1,2) are denoted by φ_1 and φ_2, resp. $mb(\Sigma) \leq \min(\varphi_1, \varphi_2)$.

If $p_i = o_2(L_1(P_i))$, $q_i = o_1(L_2(Q_i))$, we have

Theorem 2.2. $mo(\Sigma) \leq \min(p_1 - p_w, q_1 - q_r) + 1$.

Proof: The number of distinct elements of Φ (2,1) is $\leq$ the number of elements in Φ (2,1), which is $p_1 - p_w + 1$.

We now make use of a result from the theory of ordinary differential polynomials [6]: If an ordinary differential polynomial is represented as a product of irreducible factors none of which are units in two different ways, the number of irreducible factors involved in each representation is the same.

The following is stated for Φ (2,1); a similar statement is valid for Φ (1,2): Let g_i denote the number of (non-trivial) irreducible factors involved in a representation of β_i as a product of such factors. If $\beta_k \in F$, $g_k = 0$.

Theorem 2.3. $mb(\Sigma) \leqq g_1 - g_w + 1$.

Proof: By construction of Φ (2,1), we have $\langle\beta_1\rangle \subsetneqq \langle\beta_2\rangle \subsetneqq \langle\beta_3\rangle \subsetneqq \cdots \subsetneqq \langle\beta_w\rangle = \langle\sigma\rangle$ in the subring $\Omega([D_2])$. Thus, P_i differs from P_{i+1} if and only if $g_i > g_{i+1}$. Noting that $\beta_1 = \beta_w\beta^*$, $\beta^* \in \Omega([D_2])$, where the number of irreducible factors (as defined above) of β^* is $g_1 - g_w$, we obtain the desired result.

An immediate consequence is the

Corollary: *Σ is principal if and only if $L_1(P_1) = L_1(P_w)$.*

Also, we have the

Corollary: *Every ideal in the ring of multidifferential polynomials $\Omega(\mathfrak{D}_2)$ has a finite basis.*

It is now possible to extend these results to the case of polynomials with respect to multidifferentiations of an arbitrary dimension n. Let Σ now be an ideal in the ring $\Omega(\mathfrak{D})$ where the dimension of $\mathfrak{D}$ is n.

Suppose that it is possible to construct finite canonical bases of ideals in rings of polynomials with respect to proper multicomponents of $\mathfrak{D}$.

Let $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_{n-1}$, of dimension $n-1$. As before, let T be the subset of Σ which contains, besides 0, all those $A (\neq 0) \in \Sigma$ such that $o_n(A) \leqq o_n(B)$ for all non-zero $B \in \Sigma$. Then $L_n(\Sigma)$ is an ideal in $\Omega(\mathfrak{D}')$, which, by hypothesis, has a finite canonical basis. Let one such canonical basis be composed of the polynomials $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \varepsilon\, \Omega(\mathfrak{D}')$, and let the polynomials $S_i \in \Sigma$ be chosen such that $L_n(S_i) = \sigma_i$ for every i. We may suppose that $o_n(S_j) = o_n(S_k)$ for every j and k, since $L_n(S_i) = L_n(S_i Y_n^y)$ for any positive integer y. Suppose, then, that $o_n(S_i) = t$, for all S_i.

Let T_0 be the subset of Σ which contains, besides 0, all those non-zero elements $A \in \Sigma$ such that $o_n(A) \leqq o_n(B)$ for all non-zero $B \in \Sigma$. As before, $L_n(T_0)$ is an ideal in $\Omega(\mathfrak{D}')$ which, by hypothesis, has a canonical basis, $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \ldots, \beta_{1s_1} \in \Omega(\mathfrak{D}')$. Let $P_{1j} \varepsilon T_0$, $i = 1, \ldots, s_1$, be chosen so that $L_n(P_{1j}) = \beta_{1j}$ for all $j \leqq s_1$. As in the case of the multidifferentiation of dimension two, this condition determines the P_{1j} uniquely. If the set (β_{1j}) do not form a basis of $L_n(\Sigma)$, choose the subset T_1 of Σ such that T_1 contains besides T all those elements B of Σ such that $o_n(B) = o_n(P_{1j}) + 1$. It again follows that $L_n(T_1)$ is an ideal in $\Omega(\mathfrak{D}')$ which has a canonical basis by induction hypothesis. To this basis there corresponds a set of elements of T_1, $\{P_{2j}\}$, $j = 1, \ldots, s_2$, such that $L_n(P_{2j})$ are the s_2 elements of the canonical basis chosen for $L_n(T_1)$. It also follows that $L_n(T_0) \subsetneqq L_n(T_1)$. If the canonical basis of $L_n(T_1)$ is not a basis for $L_n(\Sigma)$ we continue in a manner indicated above to obtain $T_2 \subset \Sigma$.

Finally, we will have a family $(T_0, T_1, \ldots, T_p)$ of subsets of Σ such that $L_n(T_k) \subseteq L_n(T_{k+1}) \subseteq L_n(T_p) = L_n(\Sigma)$, for every k. The index p is evidently less than or equal to t. It follows from the above construction that the elements of the T_i form a basis of Σ. Thus, if the lengths of the minimal bases of the ideals $L_n(T_i)$ have the upper bounds, λ_i, respectively, then the length of the minimal basis of Σ will have the upper bound $\sum_{\nu=1}^{t} \lambda_\nu$. The lengths for the bases of these ideals can be determined by a finite number of repetitions of the above argument, and, finally, it is seen that the upper bounds for these lengths of minimal bases can be determined from the two dimensional case. This completes the construction of canonical bases for ideals of multidifferential polynomials.

Theorem 2.4: *A necessary and sufficient condition that the ring $\Omega(\mathfrak{D})$ be simple, i. e., contain no proper non-zero two-sided ideal, is that the multidifferentiation $\mathfrak{D}$ be regular.*

Proof: The first part of the demonstration consists in showing that regularity of $\mathfrak{D}$ implies simplicity of $\Omega(\mathfrak{D})$. To do this, the following lemma is required:

Lemma: *Let $\mathfrak{D}$ be regular and let $\alpha \in \Omega(\mathfrak{D}_m)$, where $\mathfrak{D}_m$ is as defined in sect. 1, and where $m < n$. Then, the relationship*

$$a\,\alpha - \alpha\, a = \sum_{\nu=m+1}^{n} g_\nu a^{(\nu)}\text{[2]} \tag{2.1}$$

for a fixed set of $g_i \in F$ holding for all $a \in F$ implies that $g_i = 0$ for all i, and that $\alpha \in F$.

Proof: The proof is by induction. First, let $m = 1$, and assume that (2.1) is true. Let $\alpha = \sum_{\mu=0}^{t} Y_1^\mu b_\mu$, $b_i \in F$, $b_t \neq 0$. Then

$$a\,\alpha - \alpha\, a = Y_1^{t-1}(t\,a^{(1)} b_t) + \sum_{\mu=0}^{t-2} Y_1^\mu d_\mu, \quad d_i \in F.$$

If $t > 1$, $ta^{(1)}b_t = 0$, which is a contradiction to the regularity of $\mathfrak{D}$. If $t = 1$, $ta^{(1)}b_t = \sum_{\nu=2}^{n} g_\nu a^{(\nu)}$ which again contradicts the hypothesis of regularity of $\mathfrak{D}$. Therefore, $t = 0$, so that $\alpha \in F$, whence it follows from the regularity of $\mathfrak{D}$ that all $g_i = 0$.

Next, suppose that the lemma has been proved for elements of $\Omega(\mathfrak{D}_k)$, $k < n - 1$. Suppose that for some $\beta \in \Omega(\mathfrak{D}_{k+1})$,

$$a\,\beta - \beta\, a = \sum_{\nu=k+2}^{n} g_\nu a^{(\nu)}, \quad g_i \in F, \tag{2.2}$$

for all $a \in F$.

---

[2]) $a^{(i)}$ is an abbreviation for $(a)D_i$.

Let β have the representation $\beta = \sum_{\mu=0}^{w} Y_{k+1}^{\mu}\alpha_\mu$, where $\alpha_i \in \Omega(\mathfrak{D}_k)$, $\alpha_w \neq 0$. Then

$$a\beta - \beta a = Y_{k+1}^{w}(a\alpha_w - \alpha_w a) + Y_{k+1}^{w-1}(wa^{(k+1)}\alpha_w + a\alpha_{w-1} - \alpha_{w-1}a) + \\ + \sum_{\mu=0}^{w-2} Y_{k+1}^{\mu}\gamma_\mu,$$

where $\gamma_i \in \Omega(\mathfrak{D}_k)$. If $w \geqq 1$, then by (2.2) $a\alpha_w - \alpha_w a = 0$ for all $a \in F$ so that by induction, $\alpha_w \varepsilon F$. If $w > 1$, again by (2.2)

$$\beta' \equiv wa^{(k+1)}\alpha_w + a\alpha_{w-1} - \alpha_{w-1}a = 0,$$

and since $\alpha_w \in F$, we have $\alpha_{w-1} \varepsilon F$ by induction, whence $a^{(k+1)} = 0$ contradicting regularity of $\mathfrak{D}$. If $w = 1$, from (2.2), $\beta' = \sum_{\nu=k+2}^{n} g_\nu a^{(\nu)}$ which again gives a contradiction. In the remaining case, $w = 0$, so that $\beta \in \Omega(\mathfrak{D}_k)$, and $\beta \in F$ by induction. This proves the lemma.

We now return to the theorem. Suppose $\mathfrak{D}$ is regular; let Σ be a non-zero two-sided ideal in $\Omega(\mathfrak{D}_1)$. Then Σ is a principal ideal generated by the monic polynomial $A \in \Omega(\mathfrak{D}_1)$. Since for any $a \in F$, $o_1(aA - Aa) < o_1(A)$ or $aA - Aa = 0$, it follows that $aA - Aa = 0$ for all $a \in F$, so that by the preceding lemma, $A = 1$, $\Omega(\mathfrak{D}_1)$ is simple.

Proceeding with the induction, suppose the sufficiency has been proved for rings of multidifferential polynomials of dimension k, where $k < n$. Let Σ be a non-zero two-sided ideal in $\Omega(\mathfrak{D}_{k+1})$.

Let $T \subset \Sigma$ be composed of 0 and all those elements $A \in \Sigma$ such that $o_{k+1}(A) \leqq o_{k+1}(B)$ for all non-zero $B \in \Sigma$. As we have seen, $L_{k+1}(T)$ is an ideal in $\Omega(\mathfrak{D}_k)$. Since $o_{k+1}(\alpha A) = o_{k+1}(A\alpha) = o_{k+1}(A)$ for any $A \in \Sigma$, $\alpha \in \Omega(\mathfrak{D}_k)$, and also $L_{k+1}(\alpha A) = \alpha L_{k+1}(A)$ under the same conditions, the two-sidedness of Σ implies the two-sidedness of $L_{k+1}(T)$ in $\Omega(\mathfrak{D}_k)$. Thus, $L_{k+1}(T) = \Omega(\mathfrak{D}_k)$, by induction. Hence, there exists a $P \in T$ such that $L_{k+1}(P) = 1$. In fact, P is a canonical basis of Σ, i. e., $\Sigma = \langle P \rangle$.

Let P have the representation $P = \sum_{\mu=0}^{s} Y_{k+1}^{\mu}\alpha_\mu$, where $\alpha_i \in \Omega(\mathfrak{D}_k)$, $\alpha_s = 1$. Then, for any $a \in F$, since $o_{k+1}(aP - Pa) < o_{k+1}(P)$ or else $aP - Pa = 0$, we have $(aP - Pa) = 0$, and

$$0 = aP - Pa = Y_{k+1}(sa^{(k+1)} + a\alpha_{s-1} - \alpha_{s-1}a) + \sum_{\mu=0}^{s-2} Y_{k+1}^{\mu}\beta_\mu,$$

where $\beta_i \in \Omega(\mathfrak{D}_k)$. If $s > 0$, the coefficient of Y_{k+1}^{s-1} is zero, whence we arrive at a contradiction to the regularity of $\mathfrak{D}$ by the preceding lemma. Hence, $s = 0$, so that $P = 1$, $\Sigma = \Omega(\mathfrak{D}_{k+1})$ as desired.

For the necessity the following lemma is useful:

Lemma: *If $\mathfrak{D}_t$ is not regular but any proper multicomponent of $\mathfrak{D}_t$ is regular, and if, in particular*

$$(z)\sum_{\nu=1}^{n} D_\nu c_\nu = 0$$

for all $z \in F$, the c_i may be assumed to be chosen from the absolute constant field.

Proof: We may obviously suppose that $c_1 = 1$. Then, since

$$(z)\, D_i\left(\sum_{\nu=1}^{n} D_\nu c_\nu\right) = (z)\left(\sum_{\nu=1}^{n} D_\nu c_\nu\right) D_i = 0$$

for any $i \leqq t$ and $z \in F$,

$$(z)\left[D_i\left(\sum_{\nu=1}^{n} D_\nu c_\nu\right) - \left(\sum_{\nu=1}^{n} D_\nu c_\nu\right) D_i\right] = (z) \sum_{\nu=2}^{n} D_\nu c_\nu^{(i)} = 0,$$

since $c_1 = 1$, so that, by hypothesis, since the preceding is true for all $i \leqq t$, the c_i must all belong to the absolute constant field.

We now return to the theorem. Let $\mathfrak{D}$ be a multidifferentiation of dimension n. Suppose $\mathfrak{D}$ is not regular and that the D_i have been ordered so that $\mathfrak{D}_t$, $t \leqq n$, is not regular and any proper multicomponent of $\mathfrak{D}_t$ is regular. By the lemma, we may suppose that an equation of the form

$$(z)\left(D_1 + \sum_{\nu=2}^{t} D_\nu c_\nu\right) = 0$$

for all $z \in F$, holds with the c_i all in the absolute constant field. Then, the principal ideal

$$\langle Y_1 + Y_2 c_2 + \cdots + Y_t c_t \rangle$$

is a two-sided non-trivial ideal of $\Omega(\mathfrak{D})$. For the demonstration of this fact, we may limit the argument to the following case:

$$Y_i\, a\left(\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu c_\nu\right) = Y_i\left(\sum_{\nu=1}^{t} Y_\nu\, a\, c_\nu + \sum_{\nu=1}^{t} a^{(\nu)} c_\nu\right) = Y_i \sum_{\nu=1}^{t} Y_\nu\, a\, c_\nu$$
$$= \sum_{\nu=1}^{t} Y_\nu c_\nu Y_i\, a = \left(\sum_{\nu=1}^{t} Y_\nu c_\nu\right) Y_i\, a\,,$$

where $c_1 = 1$, $i \leqq n$, $a \in F$. This completes the proof of the theorem.

3. Maximal Ideals

An ideal Σ different from the unit ideal is *maximal* if its union with any other ideal Σ', (Σ, Σ'), is the unit ideal.

In the ring of ordinary differential polynomials the maximal ideals are the principal ideals generated by irreducible elements of $\Omega([D])$. We shall now illustrate examples of maximal ideals in $\Omega(\mathfrak{D})$.

Theorem 3.1. *Any set of n polynomials $\{Y_i + a_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, where $\{a_i\}$ is an arbitrary family of elements of the field of absolute constants of F, generates a maximal ideal in $\Omega(\mathfrak{D})$.*

Proof: The polynomials $\{Y_i + a_i\}$ are easily seen to be commutative in pairs. We now proceed by induction. First, it is clear that the principal ideal $\langle Y_1 + a_1 \rangle$ does not generate the unit ideal. Next, suppose that r ($\leqq n$) is a positive integer such that $\{Y_i + a_i\}$, $i = 1, \ldots, r - 1$ does not generate the unit ideal but $\{Y_i + a_i\}$, $i = 1, \ldots, r$, does generate the unit ideal.

By hypothesis, there exist r polynomials A_i such that

$$\sum_{\nu=1}^{r} (Y_\nu + a_\nu) A_\nu = 1 \tag{3.1}$$

where it may be assumed that $A_r \neq 0$. Since, for any polynomial $B \in \Omega(\mathfrak{D})$ we have

$$(Y_i + a_i)(Y_r + a_r) B - (Y_r + a_r)(Y_i + a_i) B = 0, \tag{3.2}$$

it is possible to find, for any A_k, $k \neq r$, a polynomial K such that

$$A_k - (Y_r + a_r) K = K_1, \tag{3.3}$$

where $o_r(K_1) = 0$ or $K_1 = 0$. The construction of K_1 is as follows: let $o_r(A_k) = m$. Then, if

$$T_1 = A_k - (Y_r + a_r) Y_r^{m-1} L_r(A_k)$$

$o_r(T_1) < m$ or $T_1 = 0$. If $T_1 \neq 0$, $o_r(T_1) = m' > 0$, we continue by forming the polynomial T_2, where

$$T_2 = T_1 - (Y_r + a_r) Y_r^{m'-1} L_r(T_1)$$

and $o_r(T_2) < m'$ or $T_2 = 0$. This process may be continued to find in a finite number of steps the desired K_1 in (3.3) and by proper substitution in the sequence of equations formed, (3.3) itself is finally obtained. From (3.2) and (3.3) it follows that (3.1) may be rewritten in the form

$$\sum_{\nu=1}^{r} (Y_\nu + a_\nu) \bar{A}_\nu = 1, \tag{3.4}$$

where the $\bar{A}_i$ are polynomials such that $o_r(\bar{A}_r) \geqq 0$ and $o_r(\bar{A}_i) = 0$, $i \neq r$. Since the only term in (3.4) which involves the indeterminate Y_r is $(Y_r + a_r) \bar{A}_r$, (3.4) implies that $\bar{A}_r = 0$, which contradicts the induction hypothesis. Hence, $\{Y_i + a_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, is not the unit ideal.

The remainder of the theorem follows almost immediately. Suppose that the polynomial A is not an element of the ideal generated by the $\{Y_1 + a_i\}$, $i \leqq n$. By a repeated application of the algorithm used to obtain (3.3) we have that the resulting ideal formed by adjoining $\langle A \rangle$ is the unit ideal. This proves the theorem.

The ideal generated by the n basis elements, $\{Y_i + a^{(i)}\}$, $i = 1, \ldots, n$, $a \in F$, where $a^{(i)}$ denotes the image of $a \in F$ under the mapping D_i, can also be shown to be maximal by a repetition of the above proof noting that the polynomials commute in pairs.

If $\mathfrak{D}$ is regular, the ideal generated by the n polynomials $\{Y_i + a\}$, where $a \in F$ is not in any constant field is not a maximal ideal (distinct from the unit ideal). In this case,

$$(Y_i + a)(Y_j + a) - (Y_j + a)(Y_i + a) = a^{(i)} - a^{(j)}$$

so that, if $D_i \neq D_j$, there will exist an $a \in F$ such that this ideal will be the unit ideal.

The following example of a maximal ideal will have application to the determination of zeros of differential equations associated with multidifferential polynomials.

Let Σ_a be the ideal generated by the n polynomials

$$\{Y_i - a^{-1}a^{(i)}\}, \quad a \in F, \quad a \neq 0.$$

It is rather evident that Σ_a is not the unit ideal. For, suppose that it were, i. e., there could exist non-zero polynomials such that

$$\sum_{\nu=1}^{n} (Y_\nu - a^{-1}a^{(\nu)})\, A_\nu = 1.$$

If $a \neq 0$, the left side of this equation has $a \in F$ as a solution of its associated differential equation, which the right side does not. Thus, Σ_a is not the unit ideal. It can also be shown to be maximal by a repetition of the above argument.

The following theorem expresses a property of the basis of Σ_a:

Theorem 3.2. *There do not exist polynomials A_i such that*

$$Y_1 - a^{-1}a^{(1)} = \sum_{\nu=2}^{n} (Y_\nu - a^{-1}a^{(\nu)})\, A_\nu, \quad A_i \in \Omega(\mathfrak{D}). \tag{3.5}$$

Proof: Suppose that there exist $n-1$ polynomials A_i such that (3.5) is true. Then, multiplying both sides from the left by $a \in F$, we get

$$a(Y_1 - a^{-1}a^{(1)}) = \sum_{\nu=2}^{n} a\,(Y_\nu - a^{-1}a^{(\nu)})\, A_\nu,$$

which, since $a\,(Y_i - a^{-1}a^{(i)}) = Y_i a + a^{(i)} - a^{(i)} = Y_i a$, reduces to

$$Y_1 a = \sum_{\nu=2}^{n} Y_\nu a\, A_\nu,$$

and, if we set $\bar{A}_i = aA_i$, we obtain

$$Y_1 a = \sum_{\nu=2}^{n} Y_\nu \bar{A}_\nu, \quad \bar{A}_i \in \Omega(\mathfrak{D}), \tag{3.6}$$

which is a contradiction, and the theorem is proved. The same properties are also true for $i \neq 1$.

Corollary: *The canonical basis of Σ_a is the set of n polynomials*

$$\{Y_i - a^{-1}a^{(1)}\}.$$

4. Adjoint Transformations

Let $A \in \Omega(\mathfrak{D})$ have the following form

$$A = \sum_{\tau} Y^\tau a_\tau, \quad a_\tau \in F.$$

The *adjoint* A^* of A is defined by

$$A^* = \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|} a_\tau Y^\tau,$$

where $|\tau|$ is the sum of the components of τ.

Lemma 4.1. *For two polynomials A, B $(A+B)^* = A^* + B^*$.*

This follows immediately from the definition.

Lemma 4.2. $(AB)^* = B^* A^*$.

Proof: For any τ and any Y_i, $a \in F$,

$$(4.1)\quad \begin{aligned}(Y^\tau a\, Y_i)^* &= (Y^\tau a^{(i)} + Y^\tau Y_i\, a)^* = (-1)^{|\tau|} a^{(i)} Y^\tau + (-1)^{|\tau|+1} a\, Y_i\, Y^\tau \\ &= (-1)^{|\tau|} a^{(i)} Y^\tau + (-1)^{|\tau|+1} a^{(i)} Y^\tau + (-1)^{|\tau|+1} Y_i\, a\, Y^\tau = (Y_i)^* (Y^\tau a)^*.\end{aligned}$$

From (4.1) it follows that for any polynomial $A \in \Omega(\mathfrak{D})$, $(A\,Y_i)^* = Y_i^* A^*$ from the previous lemma. In other words, $(A\,Y^\tau)^* = (Y^\tau)^* A^*$ for $|\tau| = 1$. The next step involves an induction on the numerical value of $|\tau|$ in showing that $(Y^{\tau'} a\, Y^\tau)^* = (Y^\tau)^* (Y^{\tau'} a)^*$ for any τ' and τ. We suppose that it has been shown that for all $|\tau^*| < t \geq 1$

$$(4.2)\qquad (Y^{\tau'} a\, Y^\tau)^* = (Y^\tau)^* \,(Y^{\tau'} a)^*.$$

Choose $|\tau''| = t$, and let $Y^{\tau''} = Y^\tau Y_i$, for at least one $i > 0$. Then,

$$(4.3)\quad \begin{aligned}(Y^{\tau'} a\, Y^{\tau''})^* &= (Y^{\tau'} a\, Y^\tau Y_i)^* = Y_i^* (Y^{\tau'} a\, Y^\tau)^* = Y_i^* Y^{\tau *} (Y^{\tau'} a)^* \\ &= (Y^{\tau''})^* \,(Y^{\tau'} a)^*\end{aligned}$$

since $Y^{\tau'} a\, Y^\tau$ is a polynomial itself. Thus, for any $A \in \Omega(\mathfrak{D})$, we have

$$(4.4)\qquad (A\,Y^\tau)^* = (Y^\tau)^* A^*$$

for any τ.

For the last step we note that $(Aa)^* = a^* A^*$ for $a \in F$. This follows immediately from the definition of the adjoint. Then, for any $A \in \Omega(\mathfrak{D})$ and any $a \in F$,

$$(A\,Y^\tau a)^* = a^* (A\,Y^\tau)^* = a^* (Y^\tau)^* A^* = (Y^\tau a)^* (A)^*$$

which follows from (4.4). Applying Lemma 4.1, it follows that $(AB)^* = B^* A^*$ for A, B arbitrary polynomials. This proves that the adjoint transformation is an anti-endomorphism of $\Omega(\mathfrak{D})$.

Lemma: $(A^*)^* = A$ *for any* $A \in \Omega(\mathfrak{D})$.

Proof: It suffices to show that $((Y^\tau a)^*)^* = Y^\tau a$. By definition, $(Y^\tau a)^* = (-1)^{|\tau|} a\, Y^\tau$, and by Lemma 4.2 it follows that

$$(4.5)\qquad ((-1)^{|\tau|} a\, Y^\tau)^* = (Y^\tau)^* \,((-1)^{|\tau|} a)^* = Y^\tau a.$$

The lemma now follows for an arbitrary polynomial by repeated application of Lemma 4.1.

Theorem 4.1. *The adjoint transformation is an anti-automorphism of* $\Omega(\mathfrak{D})$.

Proof: Theorem 4.1 shows that the adjoint transformation is an anti-endomorphism of $\Omega(\mathfrak{D})$ and the corollary shows that the mapping is one-to-one, thus proving the theorem.

Theorem 4.2 provides the justification for limiting the discussion to right ideals. In particular, the adjoint transformation for polynomials induces a mapping of maximal right ideals into maximal left ideals and a mapping of canonical bases of right ideals into canonical bases of left ideals.

5. Solution Ideals

Ore [6] proves that a non-zero element $b \in F$ is a solution of the ordinary differential equation $0 = (z)A$ if and only if $A \in \langle Y - b^{-1}b' \rangle$, where b' denotes the element $(b)D$. The corresponding condition for multidifferential polynomials is contained in the following theorem:

Theorem 5.1. *The non-zero element $b \in F$ is a zero of the multidifferential polynomial $A \in \Omega(\mathfrak{D})$ if and only if $A \in \Sigma_b$.*

Proof: The maximality of Σ_b indicates that if A is not an element of Σ_b there exists $B \in \Sigma_b$ such that $B + AC = 1$, for some $C \in \Omega(\mathfrak{D})$. Passing to the corresponding differential equation, we have

$$(b)B + (b)AC = (b)\,1, \text{ and since}$$
$$(b)\,(D_i - b^{-1}b^{(i)}) = 0,$$

$(b)AC = b$, so that if $(z)A = 0$ has the zero $b (\neq 0) \in F$, then $A \in \Sigma_b$. The necessity also follows from the above discussion.

Corollary: *The multidifferential equation $0 = (z)A$ has the r zeros $b_i (\neq 0) \in F$, $i = 1, \ldots, r$, if and only if the corresponding differential polynomial A is an element of $\bigcap_{i=1,\ldots,r} \Sigma_{b_i}$.*

Theorem 5.2. *A necessary and sufficient condition that the differential equation $(z)A = a$ has the solution $b \neq 0$ is that*

$$A \equiv a/b \,(\operatorname{mod} \Sigma_b)$$

holds.

Proof: The sufficiency is immediate, since, if $A = a/b + B$, $B \in \Sigma_b$, then $(b)A = (b)\,a/b + (b)B = a$. Next, the polynomials $(Y_i - b^{-1}b^{(i)})$ in the basis of Σ_b have the property that, for any $A \in \Omega(\mathfrak{D})$

$$A = \sum_{\nu=1}^{n} (Y_\nu - b^{-1}b^{(\nu)})\,A_i + K, \quad K \in F, \quad A_i \in \Omega(\mathfrak{D})$$

Thus, passing to the corresponding differential equation, it follows that if $(b)A = a$, then $K = a/b$.

Corollary: *If $b \neq 0$, the additive group of $\Omega - \Sigma_b$ is isomorphic with the additive group of F.*

Proof: Every element of F is in one and only one of the residue classes of $\Omega(\mathfrak{D})$ with respect to Σ_b. The additive property is seen to hold for representatives of these classes.

As an immediate consequence to the corollary of Theorem 6.1 it follows that if the ideal Σ has the zeros, b_i, i.e., if every element of the ideal Σ has the zeros indicated, $i = 1, \ldots, r$, and if the ideal Σ' has the zeros a_i, $i = 1, \ldots, s$, the ideal

$$[\Sigma, \Sigma'] \subseteq \left[\bigcap_{i=1,\ldots,r} \Sigma_{b_i}, \bigcap_{i=1,\ldots,s} \Sigma_{a_i}\right]$$

so that $[\Sigma, \Sigma']$ has the zeros a_i, b_j, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, r$. Also, (Σ, Σ') has the zeros common to both Σ and Σ', so that

$$(\Sigma, \Sigma') \subseteq \cap \Sigma_{c_i},$$

where the c_i are those a_i which are also b_j. If there are no common zeros, the ideal (Σ, Σ') has the trivial zero only.

The results of the preceding paragraphs can be stated for left ideals by noting that, if $\Sigma \subseteq \Sigma_b$, the corresponding left ideals Σ^*, Σ_b^*, obtained by the adjoint transformation have the property that $\Sigma^* \subseteq \Sigma_b^*$. The basis elements of Σ_b^* are

$$(Y_i - b^{-1}b^{(i)})^* = -(Y_i + c^{-1}c^{(i)}),$$

where $c = b^{-1}$.

6. Restricted Similarity Transformations

The restricted similarity transformation for ordinary differential polynomials A, B, C is defined by Ore [6] in the following way: A is similar to B if there exists a polynomial such that $(\langle B\rangle, \langle C\rangle) = \langle 1\rangle$, and $\langle CA\rangle = [\langle B\rangle, \langle C\rangle]$. Using this transformation it is possible to prove unique factorization up to similarity and to give other decomposition theorems for ordinary differential polynomials. The restricted similarity transformation to be defined in the present section will provide a corresponding tool for multidifferential polynomials. The transformation with the added assumption of symmetry is equivalent to that given by Noether-Schmeidler [5], but here it is shown that symmetry is a consequence of the definition. In addition, the notation used here facilitates computation and gives results not anticipated in the Noether-Schmeidler work.

The ideal Σ corresponds to the ideal Σ' under the *restricted similarity transformation*, or, *Σ is r-similar to Σ'*, if there exists a polynomial $C \in \Omega(\mathfrak{D})$ such that $(\langle C\rangle, \Sigma') = \langle 1\rangle$ and $C\,\Sigma = [\langle C\rangle, \Sigma']$. This will be denoted by $\Sigma \cong \Sigma'^{C}$.

Lemma 6.1. *R-similarity is reflexive, i. e.,* $\Sigma \cong \Sigma^{C}$.

Proof: $\Sigma \cong \Sigma^{C}$ with $C = 1$.

Lemma 6.2. *R-similarity is transitive.*

Proof: Let $\Sigma \cong \Sigma'^{A}$ and $\Sigma' \cong \Sigma''^{B}$. In other words, $A\Sigma = [\langle A\rangle, \Sigma']$, $B\Sigma' = [\langle B\rangle, \Sigma'']$, where $(\langle A\rangle, \Sigma') = \langle 1\rangle$ and $(\langle B\rangle, \Sigma'') = \langle 1\rangle$. Thus,

$$\begin{aligned} BA\Sigma &= B\,[\langle A\rangle, \Sigma'] = [B\,\langle A\rangle, B\Sigma'] = [\langle BA\rangle, [\langle B\rangle, \Sigma']] \\ &= [[\langle BA\rangle, \langle B\rangle], \Sigma''] = [\langle BA\rangle, \Sigma'']. \end{aligned} \tag{6.1}$$

These relations are verified by application of the rules given in Section 1. In addition, if we can show that $(\langle BA\rangle, \Sigma'') = \langle 1\rangle$, we will have the desired result.

By hypothesis, $B(\langle A\rangle, \Sigma') = (\langle BA\rangle, B\Sigma') = B\,\langle 1\rangle = \langle B\rangle$, so that

$$(\langle BA\rangle, B\Sigma', \Sigma'') = (\langle B\rangle, \Sigma'') = \langle 1\rangle, \tag{6.2}$$

also by hypothesis. By definition, (6.2) may be written in the form

$$(\langle BA\rangle, \Sigma'', [\Sigma'', \langle B\rangle]) = \langle 1\rangle, \tag{6.3}$$

and since

$$(\Sigma'', [\Sigma'', \langle B\rangle]) = \Sigma'', \tag{6.4}$$

it follows that $(\langle BA\rangle, \Sigma'') = \langle 1\rangle$. Hence,

$$\Sigma \cong (\Sigma''^{B})^{A} \cong \Sigma''^{BA}, \tag{6.5}$$

which completes the proof of the lemma.

Lemma 6.3. *R-similarity is symmetric.*

Proof: Let $\Sigma \cong \Sigma'^{A}$. Since $(\langle A\rangle, \Sigma') = \langle 1\rangle$, there exists a polynomial $C \in \Omega(\mathfrak{D})$ such that $AC = 1 + B$, for some $B \in \Sigma'$. Then,

$$(AC)\, \Sigma'^{AC} = [\langle AC\rangle, \Sigma'], \tag{6.6}$$

since $(\langle AC\rangle, \Sigma') = \langle 1\rangle$, or,

$$(1 + B)\, \Sigma'^{AC} = [\langle 1+B\rangle, \Sigma'],\quad B \in \Sigma'. \tag{6.7}$$

We shall now show that (6.7) implies $\Sigma' = \Sigma'^{AC}$.

Let a canonical basis of Σ' consist of the s polynomials P_i, $i = 1, \ldots, s$. Then the basis of the ideal $[\langle 1+B\rangle, \Sigma']$ consists of the polynomials $(1+B)P_i$ since:

1) $(1+B)P_i \in \langle 1+B\rangle$, and $(1+B)P_i = P_i + BP_i \in \Sigma'$, since $B \in \Sigma'$, and $P_i \in \Sigma'$, so that, since the $(1+B)P_i$ form a basis for $(1+B)\,\Sigma'$,

$$(1+B)\, \Sigma' \subseteq [\langle 1+B\rangle, \Sigma']; \tag{6.8}$$

2) any element of $[\langle 1+B\rangle, \Sigma']$ is an element of $\langle 1+B\rangle$ and thus is of the form $(1+B)T$, $T \in \Omega(\mathfrak{D})$. Since $BT \in \Sigma'$ and since $(1+B)T \in \Sigma'$, it follows that $T \in \Sigma'$, so that

$$[\langle 1+B\rangle, \Sigma'] \subseteq (1+B)\, \Sigma'. \tag{6.9}$$

(6.8) and (6.9) combine to prove the assertion made at the end of the last paragraph. Then, by Lemma 6.2,

$$(\Sigma^{A})^{C} \cong \Sigma^{C} \cong \Sigma'^{AC} \tag{6.10}$$

so that, by the above discussion, $\Sigma^{C} \cong \Sigma'$. The lemma will follow if it is shown that $(\langle C\rangle, \Sigma) = \langle 1\rangle$.

By hypothesis,

$$A(\langle C\rangle, \Sigma) = (\langle AC\rangle, A\,\Sigma) = (\langle AC\rangle, [\langle A\rangle, \Sigma']) = \langle A\rangle. \tag{6.11}$$

Since $AC = 1 + B$, $B \in \Sigma'$, $(1 - AC) \in \Sigma'$, so that

$$(1 - AC)\,A = A\,(1 - CA) \in [\langle A\rangle, \Sigma'].$$

Since $ACA \in \langle AC\rangle$,

$$ACA + (A - ACA) = A \in (\langle AC\rangle, [\langle A\rangle, \Sigma']), \tag{6.12}$$

and from (6.11) and (6.12) it follows that

$$\langle A\rangle = (\langle AC\rangle, [\langle A\rangle, \Sigma']), \tag{6.13}$$

whence $(\langle C\rangle, \Sigma) = \langle 1\rangle$. Thus, $\Sigma^{C} \cong \Sigma'$, which proves the lemma.

As a direct result of the preceding lemmas we have

Theorem 6.1. *R-similarity is an equivalence relationship among the ideals of $\Omega(\mathfrak{D})$.*

Theorem 6.2. *An ideal r-similar to a maximal ideal is itself maximal.*

Proof: Let Σ be a maximal ideal. Suppose Σ' is r-similar to Σ, i.e., there exists a polynomial $B \notin \Sigma$ such that $B\,\Sigma' = [\langle B\rangle, \Sigma]$. We wish to show that Σ' is maximal.

First, by rule 4, Sect. 1, Σ' is an ideal. Next, choose any polynomial $C \in \Omega(\mathfrak{D})$ such that $C \notin \Sigma'$. Then, $BC \notin B\,\Sigma'$, but since $BC \in \langle B\rangle$, it follows that $BC \notin \Sigma$, so that $(\langle BC\rangle, \Sigma) = \langle 1\rangle$.

By hypothesis,

$$(B\,\Sigma', \langle BC\rangle) = ([\langle B\rangle, \Sigma], \langle BC\rangle),$$

and since both $\langle B\rangle$ and $\langle BC\rangle$ are relatively prime to Σ, we may use the argument employed in deriving (6.13) from which it follows that

$$B(\Sigma', \langle C\rangle) = (B\,\Sigma', \langle BC\rangle) = ([\langle B\rangle, \Sigma], \langle BC\rangle) = \langle B\rangle, \tag{6.14}$$

so that $(\Sigma', \langle C\rangle) = \langle 1\rangle$. This proves the theorem.

Theorem 6.3. $[\Sigma, \Sigma']^C = [\Sigma^C, \Sigma'^C]$ *where Σ and Σ' are ideals.*

Proof: If $(\langle C\rangle, [\Sigma, \Sigma']) = \langle 1\rangle$, then $(\langle C\rangle, \Sigma) = (\langle C\rangle, \Sigma') = \langle 1\rangle$. Then by hypothesis,

$$\begin{aligned} C[\Sigma, \Sigma']^C &= [\langle C\rangle, \Sigma, \Sigma'] = [[\langle C\rangle, \Sigma], [\langle C\rangle, \Sigma']] \\ &= [C\,\Sigma^C, C\,\Sigma'^C] = C\,[\Sigma^C, \Sigma'^C], \end{aligned} \tag{6.15}$$

which completes the proof.

Theorem 6.4. *A necessary and sufficient condition that $\Sigma_b = \Sigma_a^B$ is that*

$$cB \equiv b/a \pmod{\Sigma_a}, \quad a, b \in F, \quad ab \neq 0,$$

where c is an element of the absolute constant field of F.

Proof: Let $B\Sigma = [\langle B\rangle, \Sigma_a]$ where $(\langle B\rangle, \Sigma_a) = \langle 1\rangle$ and $cB \equiv b/a \pmod{\Sigma_a}$, where c is in the absolute constant field of F. Then, by Theorem 5.2 we have $(a)Bc = b$, and since $B \notin \Sigma$, $b \notin 0$. Denote the basis elements of Σ_b by $P_i = (Y_i - b^{-1}b^{(i)})$, $i = 1, \ldots, n$.

Let $T \in [\langle B\rangle, \Sigma_a]$. Then, $T = BR$, $R \in \Omega(\mathfrak{D})$. Since also, $T \in \Sigma_a$, $(a)T = 0$, so that, since $(a)Bc = b$, it follows that $(b)Rc = 0$, whence, $(b)R = 0$, and $R \in \Sigma_b$. Hence,

$$[\langle B\rangle, \Sigma_a] \subseteq B\Sigma_b. \tag{6.16}$$

Also, $BP_i \in \langle B\rangle$, and since $(a)BP_ic = 0$, $BP_i \in \Sigma_a$ for all i, so that

$$B\Sigma_b \subseteq [\langle B\rangle, \Sigma_a]. \tag{6.17}$$

Thus, $B\Sigma_b = B\Sigma_a^B = [\langle B\rangle, \Sigma_a]$, whence it follows that $\Sigma_b = \Sigma_a^B$.

Next, suppose $B\Sigma_b = [\langle B\rangle, \Sigma_a]$, $(\langle B\rangle, \Sigma_a) = \langle 1\rangle$. Since $(a)T = 0$ for every $T \in [\langle B\rangle, \Sigma_a]$, it follows that $(a)BP_i = 0$ for every i. Let $(a)\,B = f \in F$. Then, $(f)\,P_i = (f)\,(D_i - b^{-1}b^{(i)}) = f^{(i)} - fb^{-1}b^{(i)}$. If $f = gb$, $g \in F$, then $(f)\,P_i = gb^{(i)} + g^{(i)}b - gb^{(i)} = g^{(i)}b = 0$, so that $g^{(i)} = 0$ for every i, and g is in the absolute constant field of F. Hence, if we set $c = g^{-1}$, we have $(a)\,Bc = b$, so that by theorem 5.2 it follows that $cB \equiv b/a \pmod{\Sigma_a}$ as desired.

Corollary: *If $\Sigma \subseteq \Sigma_a$, and if $\Sigma' \subseteq \Sigma^A$, where $A \equiv b \pmod{\Sigma_a}$, then $\Sigma' \subseteq \Sigma_{ab}$, $b \in F$.*

Proof: By hypothesis, $(\langle A\rangle, \Sigma) = \langle 1\rangle$. Hence, $(\langle A\rangle, \Sigma_a) = \langle 1\rangle$ also. Thus, $b \neq 0$. Then,

$$A\,\Sigma' \subseteq [\langle A\rangle, \Sigma] \subseteq [\langle A\rangle, \Sigma_a] = A\,\Sigma_a^A$$

and $\Sigma_a^A = \Sigma_{ab}$ by theorem 6.4. Hence, by the rules given in section 1, $\Sigma' \subseteq \Sigma_{ab}$, whence the corollary follows.

In other words, if all the elements of an ideal have a common zero, we can determine a common zero for the elements of any ideal r-similar to this ideal by the above rule.

For the next theorem we consider the ring $\Omega(\mathfrak{D})$ as a right Ω-module over F, and the quotient modules $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma$, $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma'$, where the ideals Σ, Σ' are considered submodules:

Theorem 6.5. *A necessary and sufficient condition that $\Sigma = \Sigma'^A$, $A \in \Omega(\mathfrak{D})$, is that $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma$ be mapped isomorphically onto $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma'$ by the mapping η: $(\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma)\,\eta = A\,(\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma) = \Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma'$.*

Proof: Suppose $A\,\Sigma = [\langle A\rangle, \Sigma']$, $(\langle A\rangle, \Sigma') = \langle 1\rangle$. Then η maps an element $\lambda \in \Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma$ into the element of $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma'$ containing $A\,\lambda$. This is a homomorphism since, if λ_1 and λ_2 are elements of $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma$, then

$$A\,(\lambda_1 + \lambda_2) = A\,\lambda_1 + A\,\lambda_2.$$

Also, for any $P \in \Omega(\mathfrak{D})$, $A\,\lambda\,P = (A\lambda)\,P$. The isomorphism follows from Lemma 6.3.

2) Suppose $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma$ is mapped isomorphically onto $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma'$ by the mapping η. Let λ_1 be the coset of $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma$ containing 1. This is mapped into the coset of $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma'$ containing A. Since $0 \leftrightarrow 0$ is an isomorphism, Σ must be mapped onto $A\,\Sigma$ so that $A\,\Sigma = \Sigma'$. Also, every element of the cosets of $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma'$, including 1, are images of elements of cosets of $\Omega(\mathfrak{D}) - \Sigma$. Hence, there is a $C \in \Omega(\mathfrak{D})$ such that $AC = 1 + S$, $S \in \Sigma'$. Thus, $A\,\Sigma = [\langle A\rangle, \Sigma']$ and $\Sigma = \Sigma'^C$.

7. Completely Reducible Ideals

The results of the previous section may now be applied to a discussion of a class of ideals known as *completely reducible ideals*, which we define with NOETHER-SCHMEIDLER. The main results of their paper is presented in theorem 7.1, but the proof is essentially different, using, the notation introduced in the last section.

An ideal is *completely reducible* if it can be written as the intersection of a finite number of maximal ideals.

Theorem 7.1. *If a completely reducible ideal is decomposible into two different ways as an intersection of maximal ideals, then each ideal in the first representation is r-similar to at least one ideal in the second representation.*

Proof: Let Σ be an ideal which has the decompositions

$$\Sigma = [\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s] = [\Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_t], \tag{7.1}$$

where Σ_i and Σ'_i are maximal ideals. We may suppose that no ideal appears twice in the same representation. Furthermore, we may suppose that

$\Sigma_i \not\supseteq \bigcap_{i \neq j} \Sigma_j$, $i, j \leq s$, with a similar condition on the Σ'_i. Then, there exists an element $C \in \bigcap \Sigma_i$, $i = 1, \ldots, s-1$, such that $C \notin \Sigma_s$. Then,

$$[\Sigma, \langle C\rangle] = [\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s, \langle C\rangle] \tag{7.2}$$

and since $C \in \bigcap_{i \neq s} \Sigma_i$,

$$[\Sigma, \langle C\rangle] = [\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s, \langle C\rangle] = [\langle C\rangle, \Sigma_s] = C\,\Sigma_s^C. \tag{7.3}$$

Also, by hypothesis,

$$[\Sigma, \langle C\rangle] = [\Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_t, \langle C\rangle]. \tag{7.4}$$

Since Σ_s does not contain C, not all of the Σ'_i can contain C. Suppose that the Σ'_i have been ordered so that first $k-1$ of them contain C while the remaining do not contain C. Then,

$$\begin{aligned}[\Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_t, \langle C\rangle] &= [\Sigma'_k, \ldots, \Sigma'_t, \langle C\rangle] = [C\,\Sigma'^C_k, \ldots, C\Sigma'^C_t] \\ &= C[\Sigma'^C_k, \ldots, \Sigma'^C_t] = C\,\Sigma_s^C.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Thus, $\Sigma_s^C \subseteq \Sigma'^C_i$, $k \leq i \leq t$ and since Σ_s^C is maximal by Theorem 6.2, $\Sigma_s^C = \Sigma'^C_i$, $k \leq i \leq t$, since it may be assumed that $\Sigma'_i \neq \langle 1\rangle$. As indicated in Lemma 6.3, there exists a $B \in \Omega(\mathfrak{D})$ such that $CB = 1 + S$, $S \in \Sigma_s$ and $(\Sigma_s^C)^B = \Sigma_s = \Sigma'^{CB}_i$, $k \leq i \leq t$. The same process may be carried through for the other Σ_i as well as for each of the Σ'_i.

Theorem 7.2. *The r-similar transform of a completely reducible ideal is again completely reducible.*

Proof: The proof is a direct consequence of Theorem 6.2 and Theorem 6.3.

8. General Similarity Transformations

The *general similarity transformation* of ideals is, as indicated, a generalization of the restricted similarity transformation. The general similarity transformation will be applicable to questions of factorizations of multidifferential polynomials.

The ideal Σ is said to correspond to the ideal Σ' under a *general similarity transformation*, or, *Σ is g-similar to Σ'*, if there exists a polynomial $C \in \Omega(\mathfrak{D})$ such that $C \notin \Sigma'$ and $C\Sigma = [\langle C\rangle, \Sigma']$. This is denoted by $\Sigma \sim \Sigma'^C(g)$.

Lemma 8.1. *G-similarity is reflexive.*

Proof: $\Sigma \sim \Sigma^C(g)$, $C = 1$.

Lemma 8.2. *G-similarity is transitive.*

Proof: Suppose that $\Sigma \sim \Sigma'^A(g)$ and $\Sigma' \sim \Sigma''^B(g)$. Then

$$A\Sigma = [\langle A\rangle, \Sigma'], \quad B\Sigma' = [\langle B\rangle, \Sigma''], \tag{8.1}$$

where $A \notin \Sigma'$ and $B \notin \Sigma''$. Then,

$$BA\Sigma = [\langle BA\rangle, B\Sigma'] = [\langle BA\rangle, \langle B\rangle, \Sigma''] = [\langle BA\rangle, \Sigma'']. \tag{8.2}$$

The transitivity will now follow if $BA \in \Sigma''$.

It may be assumed that $\Sigma \neq \langle 1 \rangle$, since $A \notin \Sigma$. Thus, if $BA \in \Sigma''$, $[\langle BA \rangle, \Sigma''] = \langle BA \rangle$. However, this would mean that

$$BA\Sigma = [\langle BA \rangle, \Sigma''] = BA\langle 1 \rangle, \tag{8.3}$$

which is a contradiction. This proves transitivity of g-similarity and, in fact, shows that $\Sigma \sim (\Sigma''^B)^A\,(g) = \Sigma''^{BA}(g)$.

It is easily seen that r-similarity implies g-similarity, since if $(\langle B \rangle, \Sigma) = \langle 1 \rangle$, $\Sigma \neq \langle 1 \rangle$, then $B \notin \Sigma$. However, g-similarity does not necessarily imply r-similarity since g-similarity need not be symmetric. The following example illustrates such a situation:

Let us consider the ring $\Omega(\mathfrak{D}_2)$. The polynomial Y_1 is not an element of $\langle Y_1 Y_2 \rangle$, so that, since $Y_1 \langle Y_2 \rangle = [\langle Y_1 \rangle, \langle Y_1 Y_2 \rangle]$, it follows that $\langle Y_2 \rangle$ is g-similar to $\langle Y_1 Y_2 \rangle$. Then suppose that $\langle Y_1 Y_2 \rangle$ were g-similar to $\langle Y_2 \rangle$, so that there would a $C \in \Omega(\mathfrak{D}_2)$ such that $C\langle Y_1 Y_2 \rangle = [\langle C \rangle, \langle Y_2 \rangle]$. By application of the method used in Section 1 to show the existence of a non-zero intersection of two non-zero ideals, it can be verified that at least one of the elements of $[\langle C \rangle, \langle Y_2 \rangle]$, say P, satisfies the equality $o_1(P) = o_1(C)$. However, if we assume, as we may, that $C \neq 0$, all elements of $C\langle Y_1 Y_2 \rangle$ have orders with respect to $Y_1 \geqq o_1(C) + 1$. This is a contradiction and completes the illustration.

Theorem 8.1. *Suppose $B \notin \Sigma$, Σ an ideal in $\Omega(\mathfrak{D})$. Then $B = C + S$, $S \in \Sigma$, implies that $\Sigma^B \sim \Sigma^C (g)$*

Proof: Let $B = C + S$, $S \in \Sigma$. Then, since

$$B\Sigma^B = [\langle B \rangle, \Sigma], \quad \text{and} \quad C\Sigma^C = [\langle C \rangle, \Sigma], (g),$$

$$(B - S)\,\Sigma^C = [\langle B - S \rangle, \Sigma]. \tag{8.4}$$

Let Σ^C have a canonical basis $P_1, \ldots, P_t$. Then, from (8.4), $(B - S)\,P_i \in \Sigma$ and $\Sigma^C \subseteq \Sigma^B(g)$.

Next, suppose that Σ^C has the canonical basis $Q_1, \ldots, Q_v$. By hypothesis, $(B - S)\,Q_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, v$. Thus, since $SQ_i \in \Sigma$, it follows that $BQ_i \in \Sigma$ so that $BQ_i \in [\langle B \rangle, \Sigma]$. Thus, $\Sigma^B = \Sigma(g)$.

Theorem 8.2. *If $B\Sigma \subseteq \Sigma'$, then if $B \notin \Sigma'$, $\Sigma \subseteq \Sigma'^B(g)$.*

Proof: Trivially, $B\Sigma \subseteq \langle B \rangle$, so that by hypothesis,

$$B\Sigma \subseteq [\Sigma', \langle B \rangle] = B\Sigma'^B(g), \tag{8.5}$$

whence, $\Sigma \subseteq \Sigma'^B$.

Corollary: *If $BA \in \Sigma'$, and $B \notin \Sigma'$, then $A \in \Sigma'^B(g)$.*

For, $BA \in \Sigma'$ implies $B\langle A \rangle \subseteq \Sigma'$, and we apply theorem 8.2.

Theorem 8.3. *If Σ is g-similar to Σ', the right Ω-quotient module $\Omega - \Sigma$ is homomorphic to the right Ω-quotient module $\Omega - \Sigma'$ under the mapping described in theorem 6.5.*

Proof: Let $B\Sigma = [\langle B \rangle, \Sigma']$, $B \notin \Sigma'$. We may apply the same argument used in theorem 6.5 to show the homomorphism of the right Ω-quotient modules.

Bibliography

[1] JAEGER, A.: Partielle Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik. Mh. Math. 56, 265—287 (1952). — [2] JAEGER, A.: A Representation of Multidifferential Polynomials in Fields of Prime Characteristic. Math. Ann. 130, 1—6 (1955). — [3] LOEWY, A.: Über reduzible homogene Differentialgleichungen. Math. Ann. 56, 549—584 (1903). — [4] LOEWY, A.: Über die Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in größte vollständig reduzible Faktoren. Sitzgsber. Heidelberger Akad. 1917. [5] NOETHER, E., u. W. SCHMEIDLER: Moduln in nichtcommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken. Math. Z. 8, 1—35 (1920).— [6] ORE, O.: Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen (I). J. reine angew. Math. 167, 221—234 (1932); (II) J. reine angew. Math. 167, 233—252 (1932). — [7] ORE, O.: Theory of non-commutative polynomials. Ann. of Math. 34, 480—508 (1933).

(Eingegangen am 19. März 1956)

HELFENSTEIN, H. and WYMAN, M.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 310—327 (1956)

Geodesic Mapping of Minimal Surfaces

By

HEINZ HELFENSTEIN and MAX WYMAN in Edmonton (Alberta, Canada)*)

Introduction

The purpose of this paper is a classification of all minimal surfaces with respect to their behavior towards geodesic mappings. In view of the close connection between minimal surfaces and complex variables it is natural to consider complex surfaces as well as real ones.

We find that in general the only mappings preserving the geodesic lines (the "projective structure", as we might say) of a minimal surface onto some other, not necessarily minimal, surface, are isometries and similarities ("trivial mappings").

In dealing with the exceptional cases where this is not true, our main tools are the theorems of DINI and LIE: Two surfaces can be mapped geodesically onto each other in a non-trivial way if and only if their line-elements can be cast either into the forms

$$ds^2 = [x + W(y)]\,dx\,dy \quad \text{and} \tag{1}$$

$$ds^2 = \frac{x + W(y)}{2\,y^3}\,dx\,dy - \frac{[x + W(y)]^2}{4\,y^4}\,dy^2, \tag{2}$$

(Lie surfaces)

or into the forms

$$ds^2 = [\alpha(x) + \beta(y)]\,(dx^2 + dy^2) \quad \text{and} \tag{3}$$

$$ds^2 = -\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right]\left(\frac{1}{\alpha}\,dx^2 - \frac{1}{\beta}\,dy^2\right). \tag{4}$$

(Liouville surfaces)

In order to avoid complications later on we get rid in section 1 of the degenerate "Poisson surfaces", i. e. the cylindrical minimal surfaces.

In section 2 we prove the non-existence of non-cylindrical minimal surfaces covered by a Lie net (1) or (2).

Section 3 shows that the search for the remaining non-degenerate Liouville surfaces is equivalent to the following analytical problem: To determine the 4 most general analytical functions $P(z)$, $L(z)$, $Q(w)$, and $M(w)$ such that the expression $R(z, w) = P\,Q(1 + L\,M)^2$ becomes a solution of the partial differential equation $\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial w^2} = 0$.

Section 4 demonstrates the existence of three essentially different families of solutions to this problem.

---

*) This paper was written while one of the authors was a fellow of the Summer Research Institute of the Canadian Math. Congress in Kingston, Ontario.

Their geometrical interpretation in section 5 splits up into 6 cases leading to minimal surfaces which admit non-trivial geodesic mappings. Every such surface shares of course this property with all its associates (in BONNET's sense) as well as with their similar images. We therefore divide them into equivalence classes by calling two surfaces equivalent if they can be transformed into each other by similarities and isometries.

Choosing a simple representative in each class we obtain a complete system of normal types; each class is made up of all the associates of its normal type and their similar images.

One of the above mentioned 6 cases yields a complex one-parameter family of different normal types; in addition there are 5 other discrete types. Four of the 6 cases lead to real minimal surfaces (section 6), among them again a one-parameter family of non-equivalent normal types plus 3 discrete ones.

Other remarkable properties of these surfaces will be discussed elsewhere.

1. Poisson Surfaces

Since every minimal surface is a translation surface generated by two isotropic curves we can consider the case that one of these curves is an isotropic straight line; we then speak of a Poisson surface (cf. [2], t. I, p. 341). The plane obviously belongs in this class; in general these surfaces are represented parametrically by the following equations:

$$\tag{5} \begin{cases} x_1(u,t) = \frac{1}{2}(1-a^2)\,t + i\left[f(u) - u\,f'(u) - \frac{1-u^2}{2}f''(u)\right] \\ x_2(u,t) = \frac{i}{2}(1+a^2)\,t + \left[f(u) - u\,f'(u) + \frac{1+u^2}{2}f''(u)\right] \\ x_3(u,t) = at \qquad\qquad - i\,[f'(u) - u\,f''(u)], \end{cases}$$

where $f(u)$ is an arbitrary analytic function whose third derivative does not identically vanish, and a is an arbitrary constant.

These surfaces are complex cylinders and developable into a plane. According to Beltrami's theorem they can then be mapped geodesically in a nontrivial way onto the surfaces of constant curvature.

As developable surfaces their metric can be cast both into Liouville's and into Lie's form:

$$ds^2 = i\,f'''(u)\,(u+a)^2\,du\,dt = dx^2 + dy^2 = v\,dv\,dt,$$

where the new parameters are defined by means of the following relations:

$$v^2 = 2i \int f'''(u)\,(u+a)^2\,du,$$

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{v^2}{2}\right),\quad y = \frac{1}{2i}\left(t - \frac{v^2}{2}\right).$$

Summing up we have

Theorem 1: ***Every cylindrical minimal surface ("Poisson surface") is both a Lie and a Liouville surface and admits therefore non-trivial geodesical mappings.***

2. Non-cylindrical Lie Surfaces

As seen above all Poisson surfaces are Lie surfaces. The question arises whether there are other non cylindrical minimal surfaces also belonging to this class.

In order to show that the answer is *negative* we first remark that we can restrict ourselves to a study of the first line-element (1). The second form (2) is indeed transformed into the first one by means of the following change of parameters:

$$u = \frac{-1}{2\sqrt{y}} \int \frac{W\left(\frac{-1}{2y}\right)}{\sqrt{y}}\, dy + \frac{ix}{\sqrt{2y}}, \quad v = \frac{-1}{2y}.$$

A (real or complex) minimal surface which is not of Poisson's type is then represented parametrically in Weierstrass' form:

$$(6) \quad \begin{cases} x_1(u,v) = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\, U(u)\, du + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\, V(v)\, dv \\ x_2(u,v) = \frac{i}{2}\int (1+u^2)\, U(u)\, du - \frac{i}{2}\int (1+v^2)\, V(v)\, dv \\ x_3(u,v) = \int u\, U(u)\, du + \int v\, V(v)\, dv, \end{cases}$$

where $U(u)$ and $V(v)$ are two not identically vanishing analytic functions. In terms of these parameters the line-element takes the following form:

$$(7) \quad ds^2 = U(u)\, V(v)\, (1+uv)^2\, du\, dv.$$

We introduce new parameters x, y by means of two differentiable functions

$$u = f(x,y) \text{ and } v = g(x,y),$$

whereupon (7) becomes

$$(8) \quad ds^2 = U(f)\, V(g)\, (1+fg)^2\, [f_x g_x dx^2 + (f_x g_y + f_y g_x)\, dx\, dy + f_y g_y dy^2].$$

If x, y should be Lie parameters we must require

$$f_x g_x = f_y g_y = 0.$$

Because of $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ we have to deal only with the following possibilities:

(a) $\quad f_y = g_x = 0, \; f_x \neq 0, \; g_y \neq 0$

(b) $\quad f_x = g_y = 0, \; f_y \neq 0, \; g_x \neq 0.$

In case (a) f is a function of x only and g a function of y (both not constants), and (8) becomes:

$$(9) \quad \begin{aligned} ds^2 &= U[f(x)]\, f'(x)\, V[g(y)]\, g'(y)\, [1+f(x)\, g(y)]^2\, dx\, dy \\ &= P(x)\, Q(y)\, [1+f(x)\, g(y)]^2\, dx\, dy. \end{aligned}$$

The same form is obtained in case (b).

Finally for Lie coordinates (1) the factor $R(x,y)$ of $dx\, dy$ must be such that identically in x, y $\partial R/\partial x = 1$ or

$$(10) \quad Q\, P' + 2\, Q\, g\, (P f)' + Q\, g^2\, (P f^2)' = 1.$$

Choosing three different values y_k in (10) we obtain a linear system for the unknowns P', $(Pf)'$, $(Pf^2)'$. Its determinant can either vanish for every triple y_k or else there is a certain choice y_1, y_2, y_3 for which it is different from zero.

According to (10) Q can never vanish; we therefore conclude in the former case that

$$(g_3 - g_2)\,[g_2 g_3 - g_1(g_2 + g_3) + g_1^2] = 0\,,$$

where the indices indicate substitution of the y_k's. Keeping y_2 and y_3 fixed and letting $y_1 = y$ vary, the condition of $g(y)$ not being constant leads to $g_3 = g_2$. But keeping y_3 fixed now and letting y_2 vary we arrive again at the contradiction that g is a constant. Thus the first case is excluded.

In the second case we can solve our system obtaining constant values for the unknown derivatives. Integration yields

$$P = ax + \alpha, \quad P\,f = bx + \beta, \quad P\,f^2 = cx + \gamma\,.$$

The condition $(P\,f)^2 = P.\ (Pf^2)$ leads to a set of three relations between the coefficients which we consider as a system for c, γ. The compatibility condition is that the rank of its augmented matrix be two, or

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b^2 \\ \alpha & a & 2b\beta \\ 0 & \alpha & \beta^2 \end{vmatrix} = (a\,\beta - b\alpha)^2 = 0\,.$$

This equation entails, however, the constancy of $f = \dfrac{bx + \beta}{ax + \alpha}$, which is impossible.

Thus we proved

Theorem 2: ***The only minimal surfaces which can be covered by a Lie net are the Poisson surfaces.***

3. Isothermic Parameters on a Minimal Surface

Having settled the two special cases of Poisson and Lie surfaces it remains to decide whether there are minimal surfaces of the Weierstrass type on which there exists a Liouville net. Since a Liouville net is a special type of an isothermic net we first determine the most general isothermic parameters on a general minimal surface not of Poisson's type.

Starting from (6) and the corresponding metric (7) we define

$$\varphi(u) = \int \sqrt{2\,U(u)}\,du, \quad \psi(v) = \int \sqrt{2\,V(v)}\,dv\,, \tag{11}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\,[\varphi(u) + \psi(v)], \quad \eta = \frac{1}{2\,i}\,[\varphi(u) - \psi(v)]\,. \tag{12}$$

The new parameters ξ, η are isothermic, since

$$U(u) = \tfrac{1}{2}\,\varphi'^2(u), \quad V(v) = \tfrac{1}{2}\,\psi'^2(v)\,, \tag{13}$$

and

$$ds^2 = \tfrac{1}{4}\,\varphi'(u)\,\psi'(v)\,(1 + uv)^2\,(d\,\xi^2 + d\,\eta^2)\,, \tag{14}$$

where u, v must be replaced by their expressions in terms of ξ, η.

Having found one special system of isothermic coordinates we obtain all the others by transformations

$$\xi = A(x, y), \quad \eta = B(x, y), \tag{15}$$

where either A and B or A and $-B$ are conjugate harmonic functions. In the former case we can put

$$\xi = p(x + iy) + q(x - iy), \quad \eta = -ip(x + iy) + iq(x - iy), \tag{16}$$

where p and q are two arbitrary non-constant analytic functions. Substituting in (14) we obtain

$$ds^2 = \varphi'(u)\,\psi'(v)\,(1 + uv)^2\, p'(x + iy)\, q'(x - iy)\,(dx^2 + dy^2). \tag{17}$$

From (12) and (16) we conclude

$$\varphi(u) = 2\,p(x + iy), \quad \psi(v) = 2\,q(x - iy). \tag{18}$$

Writing

$$x + iy = z, \quad x - iy = w, \tag{19}$$

equations (18) lead to

$$u = \varphi^{-1}[2\,p(z)] = L(z) \quad v = \psi^{-1}[2\,q(w)] = M(w). \tag{20}$$

(These inverse functions exist since U and V and therefore φ' and ψ' do not vanish). Here $L(z)$ and $M(w)$ are two analytic functions of the independent variables z and w. Finally we define

$$P(z) = \varphi'[L(z)]\,p'(z) \text{ and } Q(w) = \psi'[M(w)]\,q'(w). \tag{21}$$

whereupon (17) becomes

$$ds^2 = [1 + L(z)\,M(w)]^2\,P(z)\,Q(w)\,(dx^2 + dy^2). \tag{22}$$

Conversely an arbitrary choice of the four functions L, M, P, Q. leads always to a minimal surface. Indeed, equation (20) means

$$2\,p(z) = \varphi[L(z)].$$

which after differentiating and using (21) yields

$$2\,p'(z) = \varphi'[L(z)]\,L'(z) = \frac{P(z)\,L'(z)}{p'(z)}. \tag{23}$$

Solving this for $p'(z)$ and integrating we get

$$p(z) = \int \sqrt{\tfrac{1}{2}\,P(z)\,L'(z)}\,dz. \tag{24}$$

Solving $u = L(z)$ with respect to z and substituting in $\varphi(u) = 2\,p(z)$ gives $\varphi(u)$. Differentiating these last equations we obtain

$$du = L'(z)\,dz \text{ and } \varphi'(u)\,du = 2\,p'(z)\,dz. \tag{25}$$

Dividing (25) and taking into account (24) we get

$$\varphi'(u) = \frac{2\,p'(z)}{L'(z)} = \frac{2}{L'}\sqrt{\frac{P\,L'}{2}}.$$

Hence

$$U(u) = \tfrac{1}{2}\,\varphi'^2(u) = P(z)/L'(z). \tag{26}$$

Similarly we obtain

(27) $$dv = M'(w)\,dw \text{ and } V(v) = Q(w)/M'(w)\,.$$

Finally we introduce z and w as new parameters in (6) instead of u, v. Taking into account (26) and (27) we obtain the following representation of our surface:

(28) $$\begin{cases} x_1(z,w) = \frac{1}{2}\int [1-L^2(z)]\,P(z)\,dz + \frac{1}{2}\int [1-M^2(w)]\,Q(w)\,dw \\ x_2(z,w) = \frac{i}{2}\int [1+L^2(z)]\,P(z)\,dz - \frac{i}{2}\int [1+M^2(w)]\,Q(w)\,dw \\ x_3(z,w) = \int L(z)\,P(z)\,dz \quad + \int M(w)\,Q(w)\,dw\,. \end{cases}$$

This transformation is permissible since $\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,w)} = L'M' \neq 0$. Computing the mean curvature it is easily seen that these equations represent a minimal surface for an arbitrary set of analytic functions L, M, P, Q, where P and Q do not vanish identically.

If we choose in (15) A and $-B$ as conjugate harmonic then the form (22) of the line-element is preserved; conversely a quadratic form (22) leads back to two different minimal surfaces which are, however, symmetrical to each other with respect to the x_1, x_3-plane.

The principal result of this section is

Theorem 3: *The most general isothermic metric on a non-cylindrical minimal surface is given by* (22), *where* $L(z)$, $M(w)$, $P(z)$, *and* $Q(w)$ *are arbitrary analytic functions and* P *and* Q *do not vanish identically. The corresponding surface is represented by* (28).

Our problem is now reduced to the following question: For which choice of the functions $L(z)$, $M(w)$, $P(z)$, $Q(w)$ does the metric (22) assume the Liouville form? As in the case of Lie surfaces it is sufficient to investigate only one of the metrics (3) and (4); the change of parameters

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}}\,, \quad v = \int \frac{dy}{\sqrt{-\beta(y)}}$$

reduces (4) to (3).

4. A Functional Equation

If x and y are two independent complex variables and z and w are defined by

$$z = x + iy\,, \quad w = x - iy\,,$$

our problem consists in determining the four most general analytic functions $P(z)$, $Q(w)$, $L(z)$, and $M(w)$, such that the expression

(29) $$R(z,w) = P(z)\,Q(w)\,[1 + L(z)\,M(w)]^2$$

does not vanish identically and can be written as the sum $\alpha(x) + \beta(y)$ of a function of x and a function of y. This is equivalent to the following identity in z and w:

(30) $$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial w^2} = 0\,.$$

We have to consider first a special case.

Case I: Let R be the product of a function of z and a function of w. We shall show that this is only possible if either L or M is a constant. Indeed, dividing R by PQ and extracting the square root leads to an equation of the form

$$1 = \varrho(z)\,\sigma(w) - L(z)\,M(w)\,, \tag{31}$$

which after differentiation with respect to w yields

$$0 = \varrho\,\sigma' - L\,M'\,. \tag{32}$$

Equations (31) and (32) form a linear system for ϱ and L, whose determinant is $D(w) = \sigma'\,M - \sigma\,M'$. If there is a value w_0 such that $D(w_0) \neq 0$ then $L = L_0$ becomes a constant; if on the other hand $D(w)$ vanishes identically, then $M' \neq 0$ is impossible since it would lead to

$$\frac{M'}{M} = \frac{\sigma'}{\sigma} \quad \text{and} \quad M = k\,\sigma\,,$$

and according to (31): $\frac{1}{\sigma} = \varrho - kL$. Here the variables are separated; hence $\sigma = \frac{1}{K}$ and $M = k/K$, contradictory to $M' \neq 0$. Consequently $M = \text{const.} = M_0$.

Assuming that $L = L_0$ equation (30) reads as follows:

$$\frac{P''}{P} = \frac{[Q(1 + L_0 M)^2]''}{Q(1 + L_0 M)^2}\,, \tag{33}$$

where the variables z, w are separated. Hence both sides in (33) are equal to a constant a^2. If $a = 0$ we arrive at

Case $\mathrm{I_a}$: $P(z) = P_1 z + P_2$, $Q(w) = \dfrac{Q_1 w + Q_2}{[1 + L_0 M(w)]^2}$, where P_1, P_2 as well as Q_1, Q_2 are arbitrary constants not both zero, and $M(w)$ is an arbitrary analytic function such that the denominator of $Q(w)$ does not vanish. For $a \neq 0$ we obtain

Case $\mathrm{I_b}$: $P(z) = P_1 e^{az} + P_2 e^{-az}$, $Q(w) = \dfrac{Q_1 e^{aw} + Q_2 e^{-aw}}{[1 + L_0 M(w)]^2}$, with the same restrictions as before. For $M = M_0$ the situation is similar.

From now on we can assume that R is not a product of a function of z and a function of w. We shall refer to this condition as "assumption A". Multiplying (29) out and differentiating according to (30) we obtain an identity in which we leave z variable but substitute three different constant values for w. This leads to a system of three linear equations for the unknowns $P''(z)$, $2(PL)''$, and $(PL^2)''$:

$$\begin{gathered} P''\,Q_k + 2(PL)''\,Q_k M_k + (PL^2)''\,Q_k M_k^2 \\ = P\,Q_k'' + 2\,PL(Q_k M_k)'' + PL^2(Q_k M_k^2)'', \end{gathered} \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{34}$$

where the prime denotes differentiation with respect to the proper variable present in each case, and the index k means substitution of w_k after differentiation. The determinant of this system is a function $D(w_1, w_2, w_3)$. Two cases might occur:

(a) There exist three values w_k such that $D \neq 0$;

(b) for every triple w_1, w_2, w_3 we have $D = 0$.

The latter case is easily seen to be impossible, however. Indeed, let us keep w_2 and w_3 constant in D while we leave $w_1 = w$ variable. Expanding the determinant and dividing by Q we arrive at an identity in w of the form

$$A + BM + CM^2 = 0\,, \tag{35}$$

where A, B, C are constants. They must all vanish; for otherwise equation (35) would yield a constant value for M which is contradictory to assumption A. Substituting the minor determinant for C we thus find

$$Q(M_3 - M) = 0\,,$$

which means: wherever $Q \neq 0$ we must have $M = M_3$. Since Q is analytic and not identically vanishing there is a domain D of the w-plane where $Q \neq 0$. Thus $M =$ const. in D, and since M is also analytic we have $M =$ const. everywhere, contradictory to assumption A again.

Hence we have to deal only with a non-vanishing determinant of system (34) in which case we can solve for the unknowns and obtain a system of the following type:

$$\left\{\begin{aligned} P'' &= a_{11}P + a_{12}PL + a_{13}PL^2\\ 2(PL)'' &= a_{21}P + a_{22}PL + a_{23}PL^2\\ (PL^2)'' &= a_{31}P + a_{32}PL + a_{33}PL^2. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Here the a_{ik} form a constant matrix. Substituting these values in (30) leads to an identity in z and w of the form $A(w) + B(w)\,L + C(w)\,L^2 = 0$. Keeping w constant we have an equation for L. Since L cannot be constant because of assumption A the three coefficients A, B, C must vanish. This leads to the system

$$\left\{\begin{aligned} Q'' &= a_{11}Q + a_{21}QM + a_{31}QM^2\\ 2(QM)'' &= a_{12}Q + a_{22}QM + a_{32}QM^2\\ (QM^2)'' &= a_{13}Q + a_{23}QM + a_{33}QM^2, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

which shows that the triples P, PL, PL^2, and Q, QM, QM^2 satisfy linear homogenous differential equations of the second order with transposed constant matrices. All these functions are therefore elementary. The matrix a_{ik} is not arbitrary, however, since we have 6 equations for only 4 unknown functions. Our problem consists therefore in determining the a_{ik} and in integrating the systems (36) and (37).

We shall derive first a single differential equation for the function $L(z)$ which obviously plays a special part. For any two functions $P(z)$ and $L(z)$ the laws of differentiation entail the following identity:

$$(PL^2)\,P'' - (PL)\,2\,(PL)'' + P(PL^2)'' = 2\,P^2L'^2.$$

Substituting here our unknown functions P and L and their derivatives from (36) we can divide by P^2 and obtain the following differential equation of

the first order for $L(z)$:

(38) $2\,L'^2 = a_{13}L^4 + (a_{12} - a_{23})\,L^3 + (a_{11} - a_{22} + a_{33})\,L^2 + (a_{32} - a_{21})\,L + a_{31}$.

Replacing a_{ik} by a_{ki} we have also the corresponding equation for $M(w)$:

(39) $2\,M'^2 = a_{31}M^4 + (a_{21} - a_{32})\,M^3 + (a_{11} - a_{22} + a_{33})\,M^2 + (a_{23} - a_{12})\,M + a_{13}$.

Since $M = 0$ is excluded the latter equation can be written as follows:

(40)
$$2\left(\frac{-1}{M}\right)'^2 = a_{13}\left(\frac{-1}{M}\right)^4 + (a_{12} - a_{23})\left(\frac{-1}{M}\right)^3 + \\ + (a_{11} - a_{22} + a_{33})\left(\frac{-1}{M}\right)^2 + (a_{32} - a_{21})\left(\frac{-1}{M}\right) + a_{31}.$$

Comparing (38) and (40) we see that $L(z)$ and $-1/M(w)$ are solutions of the same differential equation of the first order. Since we know that these functions must be elementary we conclude (in order to avoid elliptic functions) that the quartic on the right hand side must have a double root. Hence there are 4 constants k, A, B, C, such that

(41) $$L'^2 = (L - k)^2\,[A\,(L - k)^2 + B(L - k) + C],$$

and similarly

(42) $$\left(\frac{-1}{M}\right)'^2 = \left(\frac{-1}{M} - k\right)^2\left[A\left(\frac{-1}{M} - k\right)^2 + B\left(\frac{-1}{M} - k\right) + C\right].$$

We define now two functions $\lambda(\xi)$ and $\mu(\omega)$ by means of the following reversible relations:

(43) $$z = \xi/h,\; w = \omega/h,$$

(44) $$L = \frac{a\,\lambda(\xi) + b}{c\,\lambda(\xi) + d},\quad \frac{-1}{M} = \frac{a\,\mu(\omega) + b}{c\,\mu(\omega) + d}.$$

Our aim is to determine the five constants a, b, c, d, h, in such a way that the differential equations for $\lambda(\xi)$ and $\mu(\omega)$ become as simple as possible. We must require, of course, that

(45) $$h \neq 0 \text{ and } ad - bc \neq 0.$$

Choosing first $a = c\,k$ and combining (38) and (44) we obtain the following equation for $\lambda(\xi)$: $c^2h^2\lambda'^2 =$

(46) $C\,c^2\lambda^2 + c\,[2d\,C + B(b - kd)]\,\lambda + A\,(b - kd)^2 + B\,d\,(b - kd) + C\,d^2$.

The constants A, B, C cannot all vanish because of assumption A. We have therefore the following possibilities:

$$A = 0 \begin{cases} B = 0 & C \neq 0 & \text{(i)} \\ B \neq 0 & C = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

$$A \neq 0 \begin{cases} B = 0 & C = 0 & \text{(iii)} \\ B = 0 & C \neq 0 & \text{(iv)} \\ B \neq 0 & C = 0 & \text{(v)} \\ B \neq 0 & C \neq 0 & \text{(vi)} \end{cases}$$

Considering the constants A, B, C, k as given and treating each of these cases separately we can determine the constants a, b, c, d, h in such a way that equation (46) assumes one of the following four forms:

$$\lambda'^2 = \lambda^2 \tag{47}$$

$$\lambda'^2 = \lambda \tag{48}$$

$$\lambda'^2 = 1 \tag{49}$$

$$\lambda'^2 = \lambda^2 + 1\,. \tag{50}$$

We illustrate this procedure for case (vi); here we can have either

$$4\,A\,C - B^2 = 0 \text{ or } \neq 0\,.$$

In the former case we may choose for instance:

$$a = \frac{k}{2\,C}\,,\; b = k\,B - 2\,C,\; c = \frac{1}{2\,C}\,,\; d = B,\; h = \sqrt{C}$$

in order to transform (46) into $\lambda'^2 = \lambda^2$, while at the same time preserving the side conditions $a = k\,c$, $ad - bc \neq 0$, $h \neq 0$. In the latter case we may choose as follows:

$$a = \frac{k\,\Delta}{\sqrt{2\,C}}\,,\; b = \frac{k\,B - 2\,C}{\Delta\sqrt{2\,C}}\,,\; c = \frac{\Delta}{\sqrt{2\,C}}\,;\; d = \frac{B}{\sqrt{2\,C}}\,,\; h = \sqrt{C}\,,$$

where Δ stands for $\sqrt[4]{4\,A\,C - B^2}$ in order to obtain $\lambda'^2 = \lambda^2 + 1$ with the same side conditions.

Since the equation for $-1/M$ was the same as that for L the differential equations for μ become the same as those for λ *by the same choice* of the constants a, b, c, d, h, i. e. in each of the above four cases.

So far the equations (47—50) are only necessary conditions. Whether an arbitrary solution of one of these equations actually leads to a solution $L(z)$ by means of (44) is not yet decided. We also do not know if the constants in (44) can be chosen arbitrarily or if they must satisfy other conditions than (45). Although we have defined them in a certain specific way (depending on A, B, C, k) we shall see that conversely an arbitrary choice does lead to a solution of our problem.

In order to answer these questions we define two other functions by the following relations:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{P(\xi/h)}{[c\,\lambda(\xi) + d]^2}\,, \\ \Psi(\omega) &= \frac{Q(\omega/h)}{[a\,\mu(\omega) + b]^2}\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Performing this transformation in (29) we obtain

$$R = (ad - bc)^2 \Phi\,\Psi(\lambda - \mu)^2. \tag{52}$$

Since the condition (30) is equivalent to $\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2}$, and since the constants a, b, c, d, h obviously drop out in this last relation we see that they are actually arbitrary except for the conditions (45).

Solving (51) for P and multiplying out the expressions PL and PL^2 by means of (44) we arrive at linear homogenous expressions in Φ, $\Phi\,\lambda$, and $\Phi\,\lambda^2$. Substituting them in equations (36) we get a linear system for the unknowns Φ'', $2(\Phi\,\lambda)''$, and $(\Phi\,\lambda^2)''$, whose determinant is found to be

$$h^6(ad-bc)^3 \neq 0\,.$$

We are therefore able to solve and obtain a similar system:

$$\text{(53)}\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi'' &= b_{11}\Phi + b_{12}\Phi\,\lambda + b_{13}\Phi\,\lambda^2 \\ 2(\Phi\,\lambda)'' &= b_{21}\Phi + b_{22}\Phi\,\lambda + b_{23}\Phi\,\lambda^2 \\ (\Phi\,\lambda^2)'' &= b_{31}\Phi + b_{32}\Phi\,\lambda + b_{33}\Phi\,\lambda^2 \end{aligned}\right.$$

with a certain constant matrix b_{ik}.

As before this leads to the following equation for $\lambda(\xi)$:

$$\text{(54)}\quad 2\,\lambda'^2 = b_{13}\lambda^4 + (b_{12}-b_{23})\,\lambda^3 + (b_{11}-b_{22}+b_{33})\,\lambda^2 + (b_{32}-b_{21})\,\lambda + b_{31}.$$

Substitution of λ'^2 on the left hand side in each of the four cases (47—50) yields an identity in λ (because λ is not constant). In all cases the left hand member contains at most second degree terms; hence we have always:

$$b_{13} = 0 \quad\text{and}\quad b_{12} = b_{23}\,.$$

Thus we have to study the equations

$$\text{(55)}\qquad \Phi'' = (b_{11} + b_{12}\lambda)\,\Phi$$

$$\text{(56)}\qquad 2\,(\Phi\,\lambda)'' = (b_{21} + b_{22}\lambda + b_{12}\lambda^2)\,\Phi\,,$$

while the third equation (53) can be replaced by one of (47—50).

The treatment of the different cases (47—50) will go along the same pattern; we illustrate it for (47).

First integrating (47) we obtain

$$\text{(57)}\qquad \lambda = \lambda_0 e^{\varepsilon\xi},$$

where $\varepsilon = \pm 1$ and $\lambda_0 \neq 0$.

We differentiate now (56) out and substitute for Φ'' the expression (55), while replacing λ'' by λ according to (57). Finally we solve the resulting relation for $4\,\Phi'\,\lambda'$:

$$\text{(58)}\qquad 4\,\Phi'\,\lambda' = [b_{21} + (b_{22} - 2\,b_{11} - 2)\,\lambda - b_{12}\,\lambda^2]\,\Phi.$$

This equation is once more differentiated whereby we make the same substitutions as before for Φ'' and λ''. We then multiply by λ' and replace λ'^2 by λ^2 according to (57) and $4\,\Phi'\,\lambda'$ by (58). We then get rid of Φ by dividing this equation by Φ and obtain a polynomial identity in λ the coefficients of which we can compare on both sides. This comparison yields the following conditions for the b's:

$$b_{12} = b_{21} = 0 \quad\text{and}\quad 16\,b_{11} = (b_{22} - 2\,b_{11} - 2)^2.$$

Substituting this in (58) we can integrate and determine Φ:

$$\text{(59)}\qquad \Phi = \Phi_0 e^{k\xi}.$$

Since (57) and (59) have been obtained solely from a consideration of the *form* of equations (53) and (47) (constancy of the b_{ik}'s without actual knowledge of their values) and since equations of the same type hold for $\mu(\omega)$ and $\Psi(\omega)$[1]) we have also

$$\mu = \mu_0 e^{E\omega}, \quad \Psi = \Psi_0 e^{j\omega}, \quad E = \pm 1, \tag{60}$$

where the constants E, j, μ_0, Ψ_0 are possibly different from $\varepsilon, k, \lambda_0, \Phi_0$. Substituting (57), (59), and (60) into (52) and checking the condition

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} \tag{61}$$

we find that the constants must satisfy the relation $\varepsilon k + E j = -2$. This is also seen to be sufficient. Taking into account (44) and (51) we thus arrive at the following solution.

Case II: Let $a, b, c, d, h, k, j, \lambda_0, \mu_0, \varepsilon, E, \Phi_0, \Psi_0$ be constants satisfying the following conditions

$$\begin{gathered} ad - bc \neq 0, \ h \neq 0 \\ \lambda_0 \neq 0, \mu_0 \neq 0, \Phi_0 \neq 0, \Psi_0 \neq 0, \varepsilon = \pm 1, E = \pm 1, \varepsilon k + E j = -2. \end{gathered} \tag{62}$$

Then a solution of our problem is given by the following set of functions:

$$\begin{gathered} L(z) = \frac{a \lambda_0 e^{\varepsilon h z} + b}{c \lambda_0 e^{\varepsilon h z} + d}, \ M(w) = -\frac{c \mu_0 e^{E h w} + d}{a \mu_0 e^{E h w} + b}, \\ P(z) = \Phi_0 (c \lambda_0 e^{\varepsilon h z} + d)^2 e^{k h z}, \ Q(w) = \Psi_0 (a \mu_0 e^{E h w} + b)^2 e^{j h w}. \end{gathered} \tag{63}$$

($\mathrm{II_a}$) If $E = -\varepsilon$ we have $j - k = 2\varepsilon$ and

$$R = (ad - bc)^2 \Phi_0 \Psi_0 (\lambda_0 e^{j h z} - \mu_0 e^{k h z})^2. \tag{64}$$

($\mathrm{II_b}$) For $E = \varepsilon$ we get $k + j = -2\varepsilon$ and

$$R = (ad - bc)^2 \Phi_0 \Psi_0 (\lambda_0 e^{-i h j v} - \mu_0 e^{i h k v})^2. \tag{65}$$

In case (48) the integration yields 4 functions λ, Φ, μ, Ψ in the same way. Substituting them into (61), it is found, however, that this condition cannot be fulfilled. The same is true for case (50).

Equation (49), however, does lead to another solution which we summarize as follows:

Case III: Let $A, B, C, D, \varrho, \sigma, \Phi_0, \Psi_0, \varepsilon, E, k, j$ be constants satisfying

$$\begin{gathered} \varrho C - \sigma A = \varrho D - \sigma B \neq 0 \\ \varepsilon k + E j = 0 \\ \Phi_0 \neq 0, \ \Psi_0 \neq 0, \ \varepsilon = \pm 1, \ E = \pm 1. \end{gathered} \tag{66}$$

Then the last family of solutions of our functional equation is given by:

$$\begin{gathered} L(z) = \frac{\varrho \varepsilon z + B}{\sigma \varepsilon z + D}, \ M(w) = -\frac{\sigma E w + C}{\varrho E w + A}, \\ P(z) = \Phi_0 (\sigma \varepsilon z + D)^2 e^{kz}, \ Q(w) = \Psi_0 (\varrho E w + A)^2 e^{jw}. \end{gathered} \tag{67}$$

---

[1]) We do not have to show that we have again transposed matrices in these systems.

($\mathrm{III_a}$) If $E = -\varepsilon$ we find $j = k$ and

$$R = (\sigma A - \varrho C)^2 \Phi_0 \Psi_0 \left(2 \varepsilon x + \frac{AD - BC}{\sigma A - \varrho C}\right)^2 e^{2kx}. \tag{68}$$

($\mathrm{III_b}$) For $E = \varepsilon$, however, $j = -k$ and

$$R = (\sigma A - \varrho C)^2 \Phi_0 \Psi_0 \left(2 i \varepsilon y + \frac{AD - BC}{\sigma A - \varrho C}\right)^2 e^{2iky}. \tag{69}$$

5. Liouville Surfaces

Substituting the four functions L, M, P, Q of each of the three cases of section 4 in (28) we obtain minimal surfaces which can be covered by a Liouville net. According to the remark at the end of section 3 we get all such surfaces by adding the symmetrical ones with respect to an arbitrary plane.

Since by similarities and isometries we stay within this class we shall determine the smallest number of "normal types" of minimal Liouville surfaces with respect to these transformations, i. e. such that any two normal types cannot be transformed into each other by similarities and isometries, but every minimal Liouville surface is "equivalent" to one of these normal types. (We include the symmetrical reflections with respect to a plane in the term "similarities".) There is, of course, a great arbitrariness in choosing a normal type in an equivalence class; we try to obtain the most simple ones.

Case I of section 4 leads to Poisson surfaces previously studied. Since they are all isometric to a plane we choose as

Normal type 1: The plane (70) $x_3 = 0$.

In *Case II* we can choose our normal types among the surfaces of $\mathrm{II_a}$, since every surface of $\mathrm{II_b}$ is isometric to a certain surface of $\mathrm{II_a}$, viz. the one with the same defining constants $a, b, c, \ldots$ etc., except for Φ_0, k, ε which change their sign. This is seen by performing in (65) the change of parameters $x = i\,Y$, $y = i\,X$.

Furthermore the change of coordinates

$$x = \frac{\varepsilon}{2h}\left[X + \log\left(-\frac{\mu_0}{\lambda_0}\right)\right], \quad y = \frac{\varepsilon}{2h}\,Y$$

in (64) yields

$$ds^2 = \text{const.}\,(e^X + 1)^2 e^{\varepsilon k X}(dX^2 + dY^2)\,. \tag{71}$$

Thus there is essentially only one parameter $\beta = \varepsilon k$ left. If $\beta \neq 0$ and $\beta \neq -2$ the surface obtained by the following special and permissible choice of the defining constants possesses a metric proportional to this expression:

$$\begin{aligned} &a = 0,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 0,\ h = 1/2,\ k = \varepsilon\beta,\ j = \varepsilon(\beta + 2),\ \lambda_0 = -1\,,\\ &\mu_0 = 1,\ \varepsilon = 1,\ E = -1,\quad \Phi_0 = \Psi_0 = -(1/2)\,\beta\,(\beta + 2)\,. \end{aligned} \tag{72}$$

Every surface of case II (with a certain constant $\beta \neq 0, \neq -2$) is therefore equivalent to the special surface defined above, and with the same constant β. Hence for every such value of β we get a normal type. Writing for reasons of symmetry $\varkappa = \beta + 1$, $x/2 = X$, $y/2 = Y$, we find from (28), (63) and (72) the

Family of normal types 2

$$(73)\quad \begin{cases} x_1(X,Y) = (\varkappa+1)\, e^{(\varkappa-1)X} \cos(\varkappa-1)\, Y - (\varkappa-1)\, e^{(\varkappa+1)X} \cos(\varkappa+1)\, Y \\ x_2(X,Y) = (\varkappa+1)\, e^{(\varkappa-1)X} \sin(\varkappa-1)\, Y + (\varkappa-1)\, e^{(\varkappa+1)X} \sin(\varkappa+1)\, Y \\ x_3(X,Y) = 2\,\dfrac{(\varkappa+1)\,(\varkappa-1)}{\varkappa}\, e^{\varkappa X} \cos \varkappa Y. \end{cases}$$

$$(\varkappa \neq 0,\ \varkappa \neq \pm 1).$$

For $\varkappa = 0$ the choice of the constants could be left the same; the integrations (28) however, become different. In order to get simple equations we change $\Phi_0 = \Psi_0 = -1/4$. This leads to

Normal type 3:

$$(74)\quad \begin{cases} x_1 = -\cosh X \cos Y \\ x_2 = \cosh X \sin Y \\ x_3 = X \end{cases} \qquad (\varkappa \to 0).$$

Eliminating the parameters X, Y we recognize the catenoid

$$x_1^2 + x_2^2 = \cosh^2 x_3 .$$

Among its associates are the well-known elementary surfaces, such as the right helicoid and Scherk's surfaces.

For $\varkappa = \pm 1$ the former choice of Φ_0 and Ψ_0 is contradictory to (62); we replace it by $\Phi_0 = \Psi_0 = -1$ and obtain

Normal type 4:

$$(75)\quad \begin{cases} x_1 = x - e^x \cos y \\ x_2 = y + e^x \sin y \\ x_3 = 4\, e^{x/2} \cos(y/2) \end{cases} \qquad (\varkappa \to 1).$$

In (73) the surfaces for two values of $\varkappa$ with opposite signs are identical as seen by the change of coordinates $X = -X_1$, $Y = Y_1$. We can therefore restrict ourselves to such values of $\varkappa$ for which $\Re\,\varkappa \geq 0$.

It remains to show that none of these surfaces are equivalent. In general, if two surfaces with the metrics

$$ds_1^2 = R_1(x)\,(dx^2 + dy^2) \quad \text{and} \quad ds_2^2 = R_2(u)\,(du^2 + dv^2)$$

are equivalent, the curves of constant Gaussian curvature K must correspond to each other, as well as their orthogonal trajectories. Since K depends here only on x (or u), the equivalence is established by relations of the type $u = f(x)$, $v = g(y)$. The condition that the ratio

$$\frac{ds_1^2}{ds_2^2} = \frac{R_1(x)\,(dx^2 + dy^2)}{R_2[f(x)]\,[f'^2 dx^2 + g'^2 dy^2]}$$

should not depend on the direction $dy : dx$ of the line-elements through the same point leads to $f'^2 = g'^2$ where the variables x, y are separated. Thus $f'^2 = g'^2 = c^2$, $f(x) = cx + d$, and $ds_1^2/ds_2^2 = R_1(x)/c^2\, R_2(cx+d)$. This last expression must finally be a non-vanishing constant, say $1/(c^2 T)$. A necessary and sufficient condition for equivalence is therefore the existence of three

constants c, d, T with $c \neq 0$, $T \neq 0$, such that

$$R_2(cx + d) = T R_1(x)\,, \tag{76}$$

identically in x. Letting

$$R_1(x) = \text{const.}\,(e^x + 1)^2 e^{(\varkappa_1 - 1)x} \text{ and } R_2(x) = \text{const.}\,(e^x + 1)^2 e^{(\varkappa_2 - 1)x}$$

it is easy to verify that condition (76) entails $\varkappa_2 = -\varkappa_1$, which has already been excluded. The surfaces (73) with $\Re\,\varkappa \geqq 0$, $\varkappa \neq 0$, $\varkappa \neq 1$, $\Im\,\varkappa > 0$ for $\Re\,\varkappa = 0$, form therefore a one-parameter family of different normal types. They are also non-equivalent to the surfaces (74) and (75) corresponding to $\varkappa = 0$ and $\varkappa = 1$.

In case III we can again restrict ourselves to III_a, since an arbitrary surface of III_b is isometric to the surface of III_a with the same set of defining constants except for Φ_0 and E which change their signs. (The equivalence is established by $X = iy$, $Y = ix$.)

If $k \neq 0$ we can change the coordinates in the following way:

$$X = k\,x + \frac{1}{2}\left[\varepsilon\,k\,\frac{AD - BC}{\sigma A - \varrho C} - 1\right],$$

$$Y = k\,y\,,$$

and obtain from (68)

$$ds^2 = \text{const.}\,(2X + 1)^2 e^{2X}\,(dX^2 + dY^2)\,. \tag{77}$$

A proportional metric can be found on a special surface of case III_a, for instance by choosing

$$\begin{aligned} &A = 0,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 1,\ \varrho = 1,\ \sigma = 0,\\ &\Phi_0 = 2,\ \Psi_0 = 2/e,\ \varepsilon = 1,\ E = -1,\ k = 1,\ j = 1\,. \end{aligned} \tag{78}$$

Substituting in (67) and (28) and writing $Z = z$, $W = w - 1$, we arrive at

Normal type 5:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -Z^2 e^Z + W^2 e^W\\ x_2 &= i(Z^2 + 2)\,e^Z - i(W^2 + 2)\,e^W\\ x_3 &= 2\,Z\,e^Z + 2\,W\,e^W. \end{aligned}\right. \tag{79}$$

This surface contains the x_3-axis ($Z = W$), and is therefore symmetrical with respect to it. It is the locus of the midpoints of all chords having their endpoints on two isotropic curves symmetrical to each other with respect to the x_3-axis.

If $k = 0$ the above parametric transformation is not permissible; we replace it by

$$x = \varepsilon\,X - \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{AD - BC}{\sigma A - \varrho C}\,,$$

$$y = \varepsilon\,Y.$$

Then the metric becomes

$$ds^2 = \text{const.}\,(2X)^2\,(dX^2 + dY^2)\,, \tag{80}$$

which is also found on a surface corresponding to the following choice of the constants:

$$(81)\qquad \begin{aligned} &A=0,\ B=0,\ C=1,\ D=1, \quad \varrho=1, \sigma=0,\\ &\Phi_0=6,\ \Psi_0=6,\ \varepsilon=1,\ E=-1,\ k=0,\ j=0. \end{aligned}$$

This yields, writing $Z=z$ and $W=-w$,

Normal type 6:

$$(82)\qquad \begin{cases} x_1= Z(3-Z^2)+W(3-W^2)\\ x_2= i\,Z(3+Z^2)+i\,W(3+W^2)\\ x_3= 3\,Z^2 \qquad\qquad +3\,W^2. \end{cases}$$

This surface is obviously the locus of the midpoints of all the chords of an isotropic curve of the third order (known as Lie's imaginary surface of the third order). It is an algebraic surface of the third order, as seen by eliminating the parameters Z and W. Its equation is

$$216\,(x_1+i\,x_2)+36\,x_3(x_1-i\,x_2)-(x_1-i\,x_2)^3=0\,.$$

It can again be shown that all these types are not equivalent. These six equivalence classes exhaust therefore all the possibilities for minimal Liouville surfaces.

We note that for all six classes the coefficients of the metric tensor depend on one variable only. This means (cf. [3]):

Theorem 4: *If a minimal surface admits non-trivial geodesic mappings there exists a group of isometric transformations of the surface onto itself, and it can be isometrically mapped on a surface of revolution. Conversely these properties are also characteristic for our surfaces.*

From (26), (27), (63) and (72) we can determine the functions $U(u)$ and $V(v)$ in the representation (6) of our surfaces. We find

$$(83)\qquad U=\frac{1-\varkappa^2}{(-1)^\varkappa}\,u^{-\varkappa-2},\quad V=\frac{1-\varkappa^2}{(-1)^\varkappa}\,v^{-\varkappa-2}\quad \text{for (73)};$$

$$(84)\qquad U=\frac{1}{2}\,u^{-2},\qquad V=\frac{1}{2}\,v^{-2}\qquad \text{for (74)};$$

$$(85)\qquad U=+2\,u^{-3},\qquad V=+2\,v^{-3}\qquad \text{for (75)};$$

$$(86)\qquad U=2\,e^{u-1},\qquad V=-2\,v^{-4}e^{1/v-1}\quad \text{for (79)};$$

$$(87)\qquad U=6\qquad V=-6\,v^{-4}\qquad \text{for (82)}.$$

Bour [1] and Schwarz [4] found that the minimal surfaces for which $U=c_1u^k$, $V=c_2v^k$ can be bent into the shape of a surface of revolution. Since every surface of revolution can be covered by a Liouville net our more general result completes this list by adding the functions (86) and (87).

It is well known (cf. [2], p. 395) that the associates of the surfaces (6) with $U=c_1u^k$ and $V=c_2v^k$ with a certain fixed $k\neq-2$, are congruent to each other. This does not hold for the Scherk surfaces (74), and it is false also for (82) since the associates of this algebraic surface have a higher degree than 3. It is true, however, for (79); the family of its associates is represented

by

$$(88)\quad \begin{cases} y_1(Z,W,q) = -\,e^{-q}Z^2e^Z \qquad + e^q\,W^2e^W \\ y_2 \qquad\qquad\;\; = i\,e^{-q}\,(Z^2+2)\,e^Z - i\,e^q\,(W^2+2)\,e^W \\ y_3 \qquad\qquad\;\; = 2\,e^{-q}\,Z\,e^Z \qquad + 2\,e^q\,W\,e^W, \end{cases}$$

where q denotes the (complex) parameter of the family. The complex rotation

$$(89)\quad \begin{cases} y_1 = (1 - {}^1/_2\,q^2)\,x_1 + {}^1/_2\,q^2 x_2 \qquad - q\,x_3 \\ y_2 = {}^1/_2\,i\,q^2 x_1 \qquad + (1 + {}^1/_2\,q^2)\,x_2 + i\,q\,x_3 \\ y_3 = q\,x_1 \qquad\qquad - i\,q\,x_2 \qquad + x_3 \end{cases}$$

carries every point (Z, W) of the given surface (79) into the corresponding point $(Z+q,\ W-q)$ of the associate surface (88).

It is also noteworthy that the only "double surface" (in Lie's sense) among our surfaces is (82). Since it is algebraic and hence not periodic we gather that it is *one-sided* (cf. [2]).

Collecting these properties we sum up the main results of this section in

Theorem 5: *A minimal surface admits non-trivial geodesic mappings (onto some other, not necessarily minimal surface) if and only if it is either*

(i) *a plane or a Poisson surface* (5);

or

(ii) *similar to one of the surfaces* (75), (79), or (73) (*with* $\Re\,\varkappa \geqq 0,\ \varkappa \neq 0,\ \varkappa \neq 1,\ \Im\,\varkappa > 0$ *for* $\Re\,\varkappa = 0$);

or

(iii) *similar to an associate of* (74) *or* (82).

Since a surface (6) is algebraic if and only if $U(u)$ and $V(v)$ are third derivatives of algebraic functions we obtain

Theorem 6: *The only algebraic minimal surfaces admitting non-trivial geodesic mappings are*:

(i) *the plane and Poisson surfaces* (5) *with an algebraic function* $f(u)$;

(ii) *all surfaces similar to* (73) *where* $\varkappa$ *is restricted to real positive and rational values different from* 1;

(iii) *all surfaces similar to the associates of* (82).

6. Real Surfaces

Since Poisson surfaces are complex cylinders the only real surfaces in class 1 are the planes. The classes 3 and 4 contain all the real minimal surfaces similar to the real associates of (74) and (75).

If $\varkappa$ is real in (73) the corresponding surface is obviously real. This sufficient condition is also necessary, as seen in the following way. Multiplying the first of the functions (83) by an arbitrary constant $\tau \neq 0$, the second by $1/\tau$, we obtain the two functions $U_1(u)$ and $V_1(v)$ corresponding to the associate surfaces of (73)[2]). Multiplying both U_1 and V_1 by a constant $\chi \neq 0$

[2]) We could also choose $U_1(u) = \tau\,V(u)$, $V_1(v) = \dfrac{1}{\tau}\,U(v)$, but this amounts to the same here because of the symmetry of U and V.

then leads to the most general functions

(90) $$U_2(u) = \tau\chi \frac{1-\varkappa^2}{(-1)^\varkappa} u^{-\varkappa-2}, \quad V_2(v) = \frac{\chi}{\tau}\frac{1-\varkappa^2}{(-1)^\varkappa} v^{-\varkappa-2},$$

corresponding to an equivalent surface to (73). It is well known that a surface represented by (6) is real if and only if the functions U and V satisfy

(91) $$U(u) = \overline{V(\bar{u})}$$

identically in u (The bar denotes the conjugate complex quantity). Substituting U_2 and V_2 in (91) we arrive at the relation $u^{\bar{\varkappa}-\varkappa} = \text{const.}$ which is only possible for a real $\varkappa$.

In the same way it is shown that the classes 5 and 6 do not contain real surfaces. Thus we proved

Theorem 7: *A real minimal surface admits non-trivial geodesic mappings if and only if it is either*

(i) *a plane*;

or

(ii) *similar to a real associate of* (74);

or

(iii) *similar to a surface* (75) *or* (73), *where* $\varkappa$ *represents a real positive constant different from* 1.

References

[1] Bour, J. E. E.: Théorie de la déformation des surfaces (Journal de l'Ecole Polytechnique 1862). — [2] Darboux, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces, tome 1, 1914. — [3] Scheffers, G.: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Bd. II, 1922. — [4] Schwarz, H. A.: Miszellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. — [5] Struik, D. J.: Lectures on Classical Differential Geometry, 1950.

(Eingegangen am 25. Mai 1956)

DE GROOT, J.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 328—332 (1956)

An Isomorphism Criterion for Completely Decomposable Abelian Groups

By

J. DE GROOT in Amsterdam

Throughout this note all groups are *abelian*, written additively. We refer to KUROSH [5] for notation, terminology and theorems used without reference.

We recall the notion of a *completely decomposable group*. This is a direct sum of groups of rank 1, where *a group* is said to be *of rank* 1 if an arbitrary finite subset of elements generates a cyclic subgroup. Completely decomposable torsion-free groups were introduced by BAER [1]. There are unsolved main problems concerning their structure (and the proof of our theorem below is hampered by this fact), e. g. is every direct summand of a completely decomposable group completely decomposable itself? The best results, apart from those of BAER are obtained by KULIKOV [4], who e. g. proved that the question just stated has an affirmative answer in the case of countable completely decomposable groups.

Definition (cf. [2], also for further references). The groups G and H are called *equivalent*, if each is isomorphic to a subgroup of the other, i. e.

$$H \to \varphi\, H = H' \subset G$$
$$G \to \psi\, G = G' \subset H,$$

where φ and ψ are isomorphic maps. If H' and G' are serving subgroups or direct summands of G and H respectively, G and H are called *equivalent by serving subgroups* or *equivalent by direct summands*.

Now we can state

Theorem. *Completely decomposable groups G and H, equivalent by serving subgroups, are isomorphic.*

In particular, if the completely decomposable G and H are equivalent by direct summands, they are isomorphic.

If G and H are equivalent, they are not necessarily isomorphic as can already be shown by simple examples (DE BRUIJN orally, KAPLANSKY [3]).

If G and H are both decomposable into groups of rank ≤ 2, and if they are equivalent by serving subgroups, they are nevertheless not necessarily isomorphic as has been shown in [2], where G and H are certain countable torsion-free groups. These counterexamples give the theorem to be proved its proper place.

It is an unsolved problem whether abelian groups, equivalent by direct summands, are always isomorphic. The author does not even see an answer to the following question.

Problem. If A and B are abelian groups, and if A is isomorphic to a direct summand A' of B and conversely B is isomorphic to a direct summand B' of A, then, we ask whether A and B are necessarily isomorphic, if, moreover

$$B/A' \cong A/B'.$$

We use some lemmas.

Lemma 1. If P is the periodic part of a group G and S an arbitrary serving subgroup of G, then the group

$$A = \{P, S\}$$

generated by P and S is serving in G.

Proof. Assuming

$$n\,x = p + s, \quad p \in P, \quad s \in S \tag{1}$$

has a solution $x = g \in G$, we shall prove that $g \in A$. Since p is of finite order m, we have

$$m\,n\,g = m\,s = s'.$$

Hence, since S is serving, there is an $\bar{s} \in S$ with

$$m\,n\,\bar{s} = m\,s,$$

$$m(s - n\,\bar{s}) = 0.$$

Hence

$$s - n\,\bar{s} = p' \in P.$$

Thus, by substitution in (1)

$$n\,g = p + p' + n\,\bar{s}$$

or

$$n(g - \bar{s}) = p + p'.$$

Hence

$$g - \bar{s} = \bar{p} \in P,$$

so

$$g = \bar{s} + \bar{p} \in A.$$

Lemma 2. If H is a serving subgroup of G, then in the natural one-to-one correspondence between the subgroups of G/H and the subgroups of G that contain H, serving subgroups correspond to serving subgroups (cf. KUROSH [5], p. 176).

Lemma 3. Complete, equivalent groups are isomorphic (cf. [2]).

Lemma 4. Groups equivalent by serving subgroups, of which at least one has a base (i. e. is expressible as a direct sum of cyclic groups), are isomorphic (cf. [2]).

Proof of the theorem. A completely decomposable group has a decomposition into a direct sum of indecomposable subgroups of rank 1. Such

a subgroup is, if it is periodic, either a cyclic primary group, or a quasi-cyclic primary group (group of type p^∞); if, on the other hand, such a group is torsion-free, it is isomorphic to a subgroup of the additive group of rational numbers and therefore a certain type can uniquely be assigned to it.

We consider such decompositions of G and H

(2) $$G = V_G + F_G + T_G, \quad H = V_H + F_H + T_H,$$

where V denotes the direct sum of all quasi-cyclic primary summands, F the direct sum of all cyclic primary summands, and where T is torsion-free. V_G and V_H do not depend on the choice of decomposition, but are uniquely and invariantly determined by G and H as maximal complete periodic subgroups. Therefore,

$$\varphi V_H \subset V_G, \quad \psi V_G \subset V_H.$$

Hence, using lemma 3, V_G and V_H are isomorphic.

Next we prove that the groups F_G and F_H are isomorphic. Since

(3) $$P_G = V_G + F_G$$

is the uniquely determined periodic part of G, we have

$$\varphi F_H \subset P_G$$

and φF_H is clearly serving in P_G. Moreover,

$$\varphi F_H \cap V_G = 0.$$

Indeed, if this intersection should contain a non-null-element, a suitable multiple of it would be contained in the lowest layer of a complete primary subgroup of V_G. The height of this element in φF_H is finite, in V_G infinite in contradiction with the fact that φF_H is serving in P_G. Let

$$M \supset \varphi F_H$$

be a maximal subgroup of P_G intersecting V_G in the null-element. Using a well known procedure (Kurosh [1], p. 163, 164), we see that M is a direct summand of P_G and

(4) $$P_G = V_G + M.$$

Using (3) and (4) we find

$$\varphi F_H \subset M \cong P_G / V_G \cong F_G.$$

From this follows that an isomorphic image of F_H is contained as a serving subgroup in F_G. Since the converse equally holds, we see that F_H and F_G are isomorphic, using lemma 4.

So the theorem is proved if we can show that T_G and T_H are isomorphic. We have

$$\varphi T_H \subset P_G + T_G = G,$$

and since φT_H is torsion-free

$$\varphi T_H \cap P_G = 0.$$

φT_H is serving in G, so we can apply lemma 1 with $P = P_G$, $S = \varphi T_H$. Hence the direct sum

$$\varphi T_H + P_G$$

is serving in G. Apparently

$$\varphi T_H \cong (\varphi T_H + P_G)/P_G \subset G/P_G \cong T_G.$$

Using lemma 2, we may conclude that T_H is isomorphically contained as a serving subgroup in T_G. Since the converse is also true, we have yet to solve our problem in the case of completely decomposable *torsion-free* abelian groups.

Therefore, let us assume for simplicity of notation that G and H are such groups, equivalent by serving subgroups.

Thus

$$G = \sum_{\varrho} A_\varrho, \quad H = \sum_{\varrho} B_\varrho, \tag{5}$$

where A_ϱ and B_ϱ are torsion-free groups of rank 1. By G_α we denote the (serving) subgroup of G that consists of the null-element and of all elements of G whose types are greater than or equal to α (see Kurosh [5], § 30, 31). G'_α denotes the subgroup of G that is *generated* by all elements whose types are strictly greater than α. Similarly we define H_α and H'_α.

Denoting

$$G^*_\alpha = G_\alpha/G'_\alpha, \quad H^*_\alpha = H_\alpha/H'_\alpha,$$

it is proved in [5], p. 212, following Baer [1], that the sum A^*, resp. B^* of those direct summands in (5) whose types are equal to α, is isomorphic to G^*_α, resp. H^*_α.

$$A^* \cong G^*_\alpha, \quad B^* \cong H^*_\alpha. \tag{6}$$

Now let φH be contained as a serving subgroup in G. Observe that the type of an element of φH is the same in φH as in G, since φH is serving in G. Therefore

$$\varphi H_\alpha = \varphi H \cap G_\alpha,$$
$$\varphi H'_\alpha = \varphi H \cap G'_\alpha,$$
$$\varphi H'_\alpha = \varphi H_\alpha \cap G'_\alpha.$$

Using the first isomorphism theorem we find

$$\varphi B^* \cong \varphi H_\alpha/\varphi H'_\alpha \cong \{\varphi H_\alpha, G'_\alpha\}/G'_\alpha \subset G_\alpha/G'_\alpha \cong A^*.$$

Hence, we see that B^* is isomorphically contained as a subgroup in A^*. The converse is equally true. Now the situation is considerably simplified. A^* and B^* are equivalent groups, each being a direct sum of torsion-free groups of rank 1 of one and the same type α. The number of these summands clearly equals the rank of the group. Since the rank is an invariant of the group and since the rank of a subgroup is not greater than the rank of the group itself, the ranks must be the same in the equivalent A^* and B^*, that is A^*

and B^* are isomorphic. Since a similar procedure can be carried out for the direct summands in (5) of any type, G and H are isomorphic; so our theorem is proved.

Remarks. Actually we proved that any two decompositions into indecomposable groups of rank 1 of two completely decomposable groups, equivalent by serving subgroups, are isomorphic.

We have not paid any attention to separable groups. Also the counterexample in [2] is not separable. The corresponding problem is therefore open for this class of groups.

References

[1] Baer R.: Abelian groups without elements of finite order. Duke Math. J. 3, 68—122 (1937). — [2] Groot J. de: Equivalent abelian groups, to be published in the Canad. J. Math. 1957. — [3] Kaplansky J.: Infinite abelian groups. Ann Arbor 1954. — [4] Kulikov L. Ya.: On direct decompositions of groups. Ukrain. Mat. Ž. 4, 230—275; 347—372 (1952); Amer. Math. Soc. Transl. 2, 23—87 (1956). — [5] Kurosh, A. G.: The theory of groups. New York 1955, Vol. I.

(Eingegangen am 11. Juni 1956)

Meinardus, G.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 333—346 (1956)

Zur additiven Zahlentheorie in mehreren Dimensionen

Teil I

Von

Günter Meinardus in Wilhelmshaven

Viele Probleme der rationalen additiven Zahlentheorie wurden in der letzten Zeit in ihrer Verallgemeinerung auf algebraische Zahlkörper untersucht. Ein bestimmter Typus von Fragestellungen bezieht sich jedoch ausschließlich auf die additive Gruppe dieser Körper. Hierzu gehören die sog. *Partitionenprobleme*, und allgemeiner alle *linearen* Zerlegungsprobleme. Daß man sich in diesen Fällen trotzdem auf einen Zahlkörper, und nicht, wie es angemessen wäre, nur auf einen linearen Vektorraum bezog, lag lediglich an den Methoden der Untersuchungen: Ein Zahlkörper mit seiner Idealtheorie und seiner Theorie der Einheiten liefert eine Fülle wichtiger Eigenschaften der in Frage stehenden analytischen Funktionen.

Unter dem obigen Titel sollen nun einige Arbeiten erscheinen, in denen der Versuch unternommen wird, unter Verzicht auf das Vorhandensein einer solchen multiplikativen Gruppe analytische Methoden zur Behandlung dieser Probleme zu geben. Der vorliegende erste Teil enthält als zahlentheoretisches Ergebnis eine asymptotische Gleichung für die Logarithmen einiger Zerlegungsanzahlen. Das analytische Hilfsmittel hierzu ist ein reeller Tauberscher Satz für Laplacesche Integrale in n Veränderlichen, der einem spezielleren Satz für Dirichletsche Reihen von Hardy und Ramanujan [2] nachgebildet ist. Die weiteren Arbeiten werden neben einer Verallgemeinerung eines Theorems von Ingham [4] insbesondere Untersuchungen über die analytischen Eigenschaften gewisser Dirichletscher Reihen, die einem Vektorgitter zugeordnet werden können, zum Ziele haben.

§ 1. Bezeichnungen

Kleine deutsche Buchstaben bedeuten n-dimensionale reelle Spaltenvektoren ($n = 1, 2, \ldots$). Ein Vektor $\mathfrak{m}$ heiße „total positiv", in Zeichen: $\mathfrak{m} \succ 0$, wenn alle seine Komponenten positiv sind. Wir schreiben ferner $\mathfrak{m} \succcurlyeq 0$, wenn die Komponenten größer oder gleich Null sind. Unter $N\mathfrak{m}$ verstehen wir das Produkt aller Komponenten von $\mathfrak{m}$. Mit $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{x}$ bezeichnen wir die Vektoren mit den reellen variablen Komponenten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ bzw. $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Bei dem häufig auftretenden Grenzübergang $z_\nu \to 0$ bzw. $x_\nu \to \infty$ ($\nu = 1, \ldots, n$) empfiehlt es sich, eine weitere Bezeichnung einzuführen: Wir nennen $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{x}$ „reduziert", wenn $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{x}$ total-positiv ist, und wenn es zwei positive, von $\mathfrak{z}$

bzw. $\mathfrak{x}$ unabhängige Zahlen c_0 und c_1 gibt, so daß stets

(1) $$c_0(N\,\mathfrak{z})^{\frac{1}{n}} < z_\nu < c_1(N\,\mathfrak{z})^{\frac{1}{n}}$$ bzw. $$c_0(N\,\mathfrak{x})^{\frac{1}{n}} < x_\nu < c_1(N\,\mathfrak{x})^{\frac{1}{n}}$$

gilt für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, wie klein auch z_ν, bzw. wie groß auch x_ν gewählt wird, d. h. die Komponenten des Vektors $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{x}$ sind von gleicher Größenordnung. Den Grenzübergang $z_\nu \to 0$ bzw. $x_\nu \to \infty$ für reduziertes $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{x}$ deuten wir durch das Zeichen

$$\mathfrak{z} \Rightarrow 0 \text{ bzw. } \mathfrak{x} \Rightarrow \infty$$

an. Bei der Sprechweise „$\mathfrak{z}$ hinreichend klein" bzw. „$\mathfrak{x}$ hinreichend groß" setzen wir $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{x}$ als reduziert voraus.

Wir verwenden ferner die Abkürzungen

$$\mathfrak{z}'\mathfrak{x} \text{ bzw. } \mathfrak{z}'\mathfrak{Z}\,\mathfrak{z} \text{ bzw. } \operatorname{grad} g(\mathfrak{z})$$

für das innere Produkt der Vektoren $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$, bzw. für die mit einer quadratischen n-reihigen Matrix $\mathfrak{Z}$ gebildete quadratische Form der Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, bzw. für den Vektor, dessen Komponenten die n ersten partiellen Ableitungen der Funktion $g(\mathfrak{z}) = g(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sind.

§ 2. Bedingungen für eine Funktion $\varphi(\mathfrak{z})$

Es sei $\varphi(\mathfrak{z}) = \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine Funktion der n Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Wir sagen die Funktion $\varphi(\mathfrak{z})$ genüge den Bedingungen (I), wenn sie die folgenden sechs Eigenschaften besitzt:

1. $\varphi(\mathfrak{z})$ ist positiv für hinreichend kleines $\mathfrak{z}$ und besitzt dort stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung nach allen Veränderlichen.

2. Für hinreichend großes $\mathfrak{x}$ hat das Gleichungssystem

(2) $$-\operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{x}$$

eine Lösung $\mathfrak{z} > 0$, für welche $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$ mit $\mathfrak{x} \Rightarrow \infty$ gleichbedeutend ist. Diese Lösung ist eindeutig bestimmt, und sie ist im folgenden stets gemeint, wenn wir sagen, $\mathfrak{z}$ sei durch (2) als Funktion von $\mathfrak{x}$ gegeben.

3. Es seien $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ hinreichend klein und

$$\operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}_1) = t \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}), \; t > 0.$$

Dann ist

(3) $$\frac{\varphi(\mathfrak{z}_1)}{-\mathfrak{z}' \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z})} = o(t) \text{ für } t \to \infty,$$

gleichmäßig in $\mathfrak{z}$.

4. Sind $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ hinreichend klein, und ist

$$N(-\operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}_1)) < c_2 N(-\operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}))$$

mit einer von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ unabhängigen positiven Zahl c_2, so gilt

(4) $$\varphi(\mathfrak{z}_1) < c_3\, \varphi(\mathfrak{z})$$

mit einer positiven Konstanten c_3, wobei c_3 beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur c_2 hinreichend klein bestimmt wird.

5. Es gilt

$$(5)\qquad (-\mathfrak{z}' \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}))^{-1} = o(1)$$

und

$$(6)\qquad -\mathfrak{z}' \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}) = O(\varphi(\mathfrak{z}))$$

für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$. Aus (5) und (6) folgt, daß $\varphi(\mathfrak{z}) \to \infty$ strebt mit $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$.

6. Es sei $\mathfrak{Z}$ die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von $\varphi(\mathfrak{z})$, d. h.

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{z}) = \left(\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\nu\, \partial z_\mu}\right)\right) \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Determinante $|\mathfrak{Z}|$ von $\mathfrak{Z}$ ist positiv für hinreichend kleines $\mathfrak{z}$ und es gilt

$$(7)\qquad |\mathfrak{Z}|^{\frac{1}{n}} = O\left(\frac{(\operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}))^2}{\varphi(\mathfrak{z})}\right)$$

für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$. Sind $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{Z}$, so sind bei hinreichend kleinem $\mathfrak{z}$ mit zwei geeigneten positiven, von $\mathfrak{z}$ unabhängigen Zahlen c_4 und c_5 die Ungleichungen

$$(8)\qquad c_4 \cdot |\mathfrak{Z}|^{\frac{1}{n}} < \varkappa_\nu < c_5 \cdot |\mathfrak{Z}|^{\frac{1}{n}}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ erfüllt.

Um später Zwischenrechnungen zu vermeiden, zeigen wir, daß die Funktion

$$(9)\qquad \varphi_1 = \varphi_1(\mathfrak{z}) = \frac{A}{(z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots z_n)^\alpha}$$

für $A > 0$ und $\alpha > 0$ den Bedingungen (I) genügt. Für $\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n$ ist

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_\nu} = -\frac{\alpha}{z_\nu}\varphi_1$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_\nu\, \partial z_\mu} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{z_\nu^2}\varphi_1 & \text{für } \nu = \mu, \\[2ex] \dfrac{\alpha^2}{z_\nu z_\mu}\varphi_1 & \text{für } \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Die Gleichungen

$$-\operatorname{grad} \varphi_1(\mathfrak{z}) = \mathfrak{x}$$

werden aufgelöst durch

$$(10)\qquad z_\nu = \frac{1}{x_\nu}\{A\,\alpha(x_1 \cdot x_2 \ldots x_n)^\alpha\}^{\frac{1}{n\alpha+1}}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so daß

$$(11)\qquad \varphi_1(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}'\mathfrak{x} = \frac{(n\alpha+1)}{\alpha}\{A\,\alpha(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n)^\alpha\}^{\frac{1}{n\alpha+1}}$$

wird. Man prüft nun leicht, daß $\varphi_1(\mathfrak{z})$ die Eigenschaften 1. bis 5. besitzt.

Weiter ist

$$\mathfrak{Z} = \alpha \cdot \varphi_1 \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{z_1^2} & \frac{\alpha}{z_1 z_2} & \cdots & \frac{\alpha}{z_1 z_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\alpha}{z_n z_1} & \frac{\alpha}{z_n z_2} & \cdots & \frac{\alpha+1}{z_n^2} \end{pmatrix},$$

und somit

$$(12) \qquad |\mathfrak{Z}| = \frac{\alpha^n (n\alpha + 1)}{(z_1 z_2 \ldots z_n)^2} \varphi_1^n,$$

woraus die Abschätzung (7) folgt. An Stelle der Eigenwerte $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ betrachten wir die Größen

$$(13) \qquad \varrho_\nu = \frac{\varkappa_\nu}{\alpha \varphi_1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

für welche man nach kurzer Rechnung zeigt, daß sie die Nullstellen des Polynoms

$$g_1(\varrho) = (1 - z_1^2 \varrho) \ldots (1 - z_n^2 \varrho) \left\{1 + \frac{\alpha}{1 - z_1^2 \varrho} + \cdots + \frac{\alpha}{1 - z_n^2 \varrho}\right\}$$

sind. Da die Matrix $\mathfrak{Z}$ symmetrisch ist, sind die ϱ_ν reell. Da ferner $\mathfrak{z}$ reduziert ist, erkennt man auf Grund der Ungleichungen (1), daß

a) $$g_1(\varrho) > 0 \text{ ist für } \varrho < \frac{1}{2 c_1^2 (N \mathfrak{z})^{2/n}},$$

und daß

b) $$(-1)^n g_1(\varrho) > 0 \text{ ist für } \varrho > \frac{2(n\alpha + 1)}{c_0^2 (N \mathfrak{z})^{2/n}}.$$

Es gilt also für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ stets

$$\frac{1}{2 c_1^2 (N \mathfrak{z})^{2/n}} < \varrho_\nu < \frac{2(n\alpha + 1)}{c_0^2 (N \mathfrak{z})^{2/n}},$$

woraus sich mit (12) und (13) die Ungleichungen (8) ergeben.

§ 3. Ein Tauberscher Satz

Satz 1: a) *Es sei $A(\varphi) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine reelle Funktion der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Eigenschaften*

(14) $\quad A(\mathfrak{x}) \leq A(\mathfrak{x}_1)$ *für* $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x} \geqslant 0$ *und*

$A(\mathfrak{x}) = 0$, *wenn mindestens eine der Variablen kleiner oder gleich Null ist.*

b) *Das Integral*

$$N\mathfrak{z} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty A(\mathfrak{x})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}}\, dx_1 \ldots dx_n$$

sei für $\mathfrak{z} > 0$ konvergent.

c) *Für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$ habe die Funktion*

$$(15) \qquad f(\mathfrak{z}) = N\mathfrak{z} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty A(\mathfrak{x})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}}\, dx_1 \ldots dx_n$$

das asymptotische Verhalten

$$\log f(\mathfrak{z}) = \varphi(\mathfrak{z})\,(1 + o(1)), \tag{16}$$

wobei $\varphi(\mathfrak{z})$ *den Bedingungen* (I) *genügt.*

Dann gilt

$$\log A(\mathfrak{x}) = (\varphi(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}'\mathfrak{x})\,(1 + o(1)) \tag{17}$$

für $\mathfrak{x} \Rightarrow \infty$, *wenn* $\mathfrak{z}$ *der durch*

$$-\operatorname{grad}\varphi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{x}$$

bestimmte Vektor ist.

Beweis: Nach (16) gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$, sofern nur $\mathfrak{z}$ hinreichend klein ist,

$$(1 - \varepsilon)\,\varphi(\mathfrak{z}) < \log f(\mathfrak{z}) < (1 + \varepsilon)\,\varphi(\mathfrak{z}). \tag{18}$$

Zu beweisen ist: Für beliebiges $\delta > 0$ gilt

$$(1 - \delta)\,(\varphi(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}'\mathfrak{x}) < \log A(\mathfrak{x}) < (1 + \delta)\,(\varphi(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}'\mathfrak{x}), \tag{19}$$

falls $\mathfrak{x}$ hinreichend groß ist, wobei $\mathfrak{z}$ durch (2) bestimmt ist.

1. Die obere Abschätzung von $\log A(\mathfrak{x})$ ist leicht zu gewinnen. Da $A(\mathfrak{x}) \geqq 0$ ist, folgt für $\mathfrak{z} > 0$ aus (15) unmittelbar

$$N\mathfrak{z} \int\limits_{x_1}^{\infty} \cdots \int\limits_{x_n}^{\infty} A(\mathfrak{v})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{v}}\, dv_1 \ldots dv_n < f(\mathfrak{z}),$$

wobei $\mathfrak{v}$ der Vektor mit den Komponenten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist. Mit (14) erhält man

$$A(\mathfrak{x})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}} < f(\mathfrak{z}).$$

Von jetzt an sei $\mathfrak{z}$ während des ganzen Beweises durch die Beziehung (2) als Funktion von $\mathfrak{x}$ gegeben. Nach Voraussetzung gilt dann $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$ für $\mathfrak{x} \Rightarrow \infty$. Wählen wir nun $\mathfrak{x}$ hinreichend groß, so ergibt sich mit (18) sofort

$$A(\mathfrak{x}) < e^{(1+\varepsilon)\varphi(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}'\mathfrak{x}}. \tag{20}$$

2. Das Gebiet $v_\nu \geqq 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_0$ und führen drei von $\mathfrak{x}$ unabhängige Zahlen k_1, k_2, δ_1 ein, für welche $0 < k_1 < 1$, $k_2 > 1$ und $\delta_1 > 0$ gilt. Später werden diese Größen noch geeignet bestimmt. Nun definieren wir die Gebiete

$$\mathfrak{B}_1\colon\ 0 \leqq v_\nu \leqq k_2 x_\nu;\quad \mathfrak{B}_2\colon\ k_1 x_\nu \leqq v_\nu \leqq k_2 x_\nu$$

und

$$\mathfrak{B}_3\colon\ |v_\nu - x_\nu| \leqq \delta_1 x_\nu,$$

jeweils für $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

In leichtverständlicher Abkürzung wird dann

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{z}) &= N\mathfrak{z} \left\{ \int\limits_{\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_1} + \int\limits_{\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2} + \int\limits_{\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_3} + \int\limits_{\mathfrak{B}_3} \right\} A(\mathfrak{v})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{v}}\, dv_1 \ldots dv_n; \\ &= I_1(\mathfrak{z}) + I_2(\mathfrak{z}) + I_3(\mathfrak{z}) + I_4(\mathfrak{z}). \end{aligned} \tag{21}$$

In den folgenden Beweisabschnitten wird gezeigt werden, daß

$$I_\lambda(\mathfrak{z}) = o(f(\mathfrak{z})) \qquad (\lambda = 1, 2, 3) \tag{22}$$

ist für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$.

3. Im Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_s - \mathfrak{B}_1} A(\mathfrak{v})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{v}}\, dv_1 \ldots dv_n$$

substituieren wir $v_\nu = t_\nu x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und erhalten

$$I_1(\mathfrak{z}) = N\mathfrak{z}\, N\mathfrak{x} \int\limits_{\mathfrak{T}} A(t_1 x_1, \ldots, t_n x_n)\, e^{-t_1 x_1 z_1 - \cdots - t_n x_n z_n}\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Hier besteht das Gebiet $\mathfrak{T}$ aus allen Punkten mit $t_\nu \geq 0$, abzüglich des Gebietes $0 \leq t_\nu \leq k_2 (\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Bedeutet (bei festem ν) $\mathfrak{T}_\nu$ das Gebiet

$$\mathfrak{T}_\nu\colon\ t_\nu \geq k_2,\ 0 \leq t_\mu \leq t_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

so gilt wegen (14) für

$$R_\nu(\mathfrak{z}) = N\mathfrak{z}\, N\mathfrak{x} \int\limits_{\mathfrak{T}_\nu} A(t_1 x_1, \ldots, t_n x_n)\, e^{-t_1 x_1 z_1 - \cdots - t_n x_n z_n}\, dt_1 \ldots dt_n$$

die Abschätzung

$$R_\nu(\mathfrak{z}) < z_\nu x_\nu \int\limits_{k_2}^{\infty} A(t_\nu \mathfrak{x})\, e^{-t_\nu x_\nu z_\nu}\, dt_\nu.$$

Wir verwenden die Ungleichung (20) und erhalten

$$R_\nu(\mathfrak{z}) < z_\nu x_\nu \int\limits_{k_2}^{\infty} e^{(1+\delta_2)\varphi(\mathfrak{z}_1) + t_\nu \mathfrak{z}_1' \mathfrak{x} - t_\nu x_\nu z_\nu}\, dt_\nu \tag{23}$$

für beliebig kleines $\delta_2 > 0$, wenn nur $\mathfrak{x}$ hinreichend groß ist. Hier ist $\mathfrak{z}_1$ der durch

$$-\operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}_1) = t_\nu \mathfrak{x} = -t_\nu \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z})$$

bestimmte Vektor. Nach (3) ist nun

$$\frac{\varphi(\mathfrak{z}_1)}{-\mathfrak{z}' \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z})} = o(t_\nu)$$

für $t_\nu \to \infty$, gleichmäßig in $\mathfrak{z}$. Nach (6) ist weiter

$$t_\nu \mathfrak{z}_1' \mathfrak{x} = O(\varphi(\mathfrak{z}_1))$$

für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$. Es kann deshalb k_2 so groß gewählt werden, daß für $t_\nu \geq k_2$ die Ungleichung

$$(1 + \delta_2)\, \varphi(\mathfrak{z}_1) + t_\nu \mathfrak{z}_1' \mathfrak{x} < \tfrac{1}{2} t_\nu x_\nu z_\nu \tag{24}$$

erfüllt ist, denn nach Voraussetzung sind $\mathfrak{z}$ und $-\operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z})$ reduzierte Vektoren. Aus (23) und (24) folgt

$$R_\nu(\mathfrak{z}) < z_\nu x_\nu \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t_\nu x_\nu z_\nu}\, dt_\nu = 2.$$

Offenbar ist

$$I_1(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} R_\nu(\mathfrak{z}),$$

also

$$I_1(\mathfrak{z}) = O(1) = o(f(\mathfrak{z})) \tag{25}$$

für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$.

4. Wir verstehen unter $\mathfrak{W}$ das Gebiet

$$0 \leqq v_\nu \leqq k_1 x \text{ für } \nu = \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r;\ \nu_i \neq \nu_k \text{ für } i \neq k,$$

$$k_1 x_\mu \leqq v_\mu \leqq k_2 x \text{ für } \mu = 1, 2, \ldots, n \text{ und } \mu \neq \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r,$$

wobei die $\nu_i (i = 1, 2, \ldots, r)$ natürliche Zahlen aus der Reihe von 1 bis n bedeuten und $1 \leqq r \leqq n$ ist. Offenbar gibt es genau $2^n - 1$ verschiedene Gebiete dieser Art, und die Summe aller dieser Gebiete ist gleich $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2$. Zur Abschätzung von $I_2(\mathfrak{z})$ genügt es deshalb, den Ausdruck

$$H(\mathfrak{z}) = N\mathfrak{z} \int_{\mathfrak{W}} A(\mathfrak{v})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{v}}\, dv_1 \ldots dv_n \tag{26}$$

zu untersuchen. Zur Vereinfachung sei noch $\nu_1 = 1, \ldots, \nu_r = r$. Wegen (14) ist

$$H(\mathfrak{z}) < A(k_1 x_1, \ldots, k_1 x_r, k_2 x_{r+1}, \ldots, k_2 x_n),$$

und mit (20) folgt

$$H(\mathfrak{z}) < e^{\varphi(\mathfrak{z}_2) + \mathfrak{z}_2' \mathfrak{x}_0 + \delta_3 \varphi(\mathfrak{z}_2)}$$

für beliebiges $\delta_3 > 0$, falls $\mathfrak{x}$ hinreichend groß ist. Hier ist $\mathfrak{x}_0$ der Vektor mit den Komponenten $k_1 x_1, \ldots, k_1 x_r, k_2 x_{r+1}, \ldots, k_2 x_n$, und $\mathfrak{z}_2$ ist durch

$$- \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}_2) = \mathfrak{x}_0 \tag{27}$$

bestimmt. Aus (27) ergibt sich

$$N(- \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}_2)) = (k_1)^r (k_2)^{n-r} N(- \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z})).$$

Wegen $r \geqq 1$ und der nach (6) gültigen Abschätzung

$$\mathfrak{z}_2' \mathfrak{x}_0 = O(\varphi(\mathfrak{z}_2))$$

können wir nach (4) die Zahl k_1 so klein wählen, daß

$$\varphi(\mathfrak{z}_2) + \mathfrak{z}_2' \mathfrak{x}_0 + \delta_3 \varphi(\mathfrak{z}_2) < \tfrac{1}{2} \varphi(\mathfrak{z})$$

wird. Es folgt

$$H(\mathfrak{z}) < e^{\frac{1}{2} \varphi(\mathfrak{z})},$$

woraus sich sofort

$$I_2(\mathfrak{z}) = O\left(e^{\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{z})}\right) = o(f(\mathfrak{z})) \tag{28}$$

für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$ ergibt.

5. Im folgenden bedeuten $c_6, c_7, \ldots$ geeignet wählbare positive, von $\mathfrak{x}$ und demnach von $\mathfrak{z}$ unabhängige Zahlen. Nach (20) ist

$$I_3(\mathfrak{z}) < N\mathfrak{z} \int_{\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_3} e^{\varphi(\mathfrak{z}_3)(1+\varepsilon) + \mathfrak{z}_3' \mathfrak{v} - \mathfrak{z}'\mathfrak{v}}\, dv_1 \ldots dv_n$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, wenn $\mathfrak{x}$ hinreichend groß ist. Hier ist $\mathfrak{z}_3$ der durch

$$- \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{z}_3) = \mathfrak{v}$$

bestimmte Vektor. Wir wählen $\mathfrak{x}$ so groß, daß

$$f(\mathfrak{z}) > e^{(1-\varepsilon)\varphi(\mathfrak{z})}$$

gilt, und setzen

$$h(\mathfrak{v}) = \varphi(\mathfrak{z}_3) + (\mathfrak{z}_3 - \mathfrak{z})' \mathfrak{v}. \tag{29}$$

Die Funktion $h(\mathfrak{v})$ entwickeln wir an der Stelle $\mathfrak{v} = \mathfrak{x}$ nach der Taylorschen Formel mit einem Restglied von zweiter Ordnung. Die Komponenten von $\mathfrak{z}_s$ bezeichnen wir zur Vereinfachung mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Nach Gl. (29) ist

(30) $$\frac{\partial h}{\partial v_\nu} = y_\nu - z_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also

(31) $$\frac{\partial^2 h}{\partial v_\nu \partial v_\mu} = \frac{\partial y_\nu}{\partial v_\mu}, \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Es bedeute $\mathfrak{V}$ die Matrix

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(\mathfrak{v}) = \left(\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial v_\mu}\right)\right).$$

So erhält man unter Beachtung von $h(\mathfrak{x}) = \varphi(\mathfrak{z})$ die Beziehung

(32) $$h(\mathfrak{v}) = \varphi(\mathfrak{z}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{v} - \mathfrak{x})'\mathfrak{V}(\mathfrak{v}^*)(\mathfrak{v} - \mathfrak{x}),$$

wobei

$$\mathfrak{v}^* = \mathfrak{x} + \vartheta(\mathfrak{v} - \mathfrak{x})$$

ist mit $0 < \vartheta < 1$. Nun ist

$$-\frac{\partial^2\varphi(\mathfrak{z}_s)}{\partial y_\nu \partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial v_\mu} - \cdots - \frac{\partial^2\varphi(\mathfrak{z}_s)}{\partial y_\nu \partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial v_\mu} = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu = \mu, \\ 0 \text{ für } \nu \neq \mu, \end{cases}$$

oder, in Matrizenschreibweise

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{v}) = -\mathfrak{Z}^{-1}(\mathfrak{z}_s).$$

Somit ergibt sich aus (32) die Entwicklung

(33) $$h(\mathfrak{v}) = \varphi(\mathfrak{z}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{v} - \mathfrak{x})'\mathfrak{Z}^{-1}(\mathfrak{z}^*)(\mathfrak{v} - \mathfrak{x})$$

mit

(34) $$-\operatorname{grad}\varphi(\mathfrak{z}^*) = \mathfrak{v}^*.$$

Es sei $\varkappa = \varkappa(\mathfrak{z}^*)$ der größte Eigenwert von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{z}^*)$. Dann ist

(35) $$\frac{1}{2}(\mathfrak{v} - \mathfrak{x})'\mathfrak{Z}^{-1}(\mathfrak{z}^*)(\mathfrak{v} - \mathfrak{x}) \geqq \frac{1}{2\varkappa}(\mathfrak{v} - \mathfrak{x})^2.$$

Da $\mathfrak{v}$ in $\mathfrak{V}_2 - \mathfrak{V}_3$ liegt, gilt

(36) $$(\mathfrak{v} - \mathfrak{x})^2 > c_6\delta_1^2(\operatorname{grad}\varphi(\mathfrak{z}))^2.$$

Nach (7) und (8) ist ferner

(37) $$\varkappa < c_5|\mathfrak{Z}|^{\frac{1}{n}} < c_7\frac{(\operatorname{grad}\varphi(\mathfrak{z}^*))^2}{\varphi(\mathfrak{z}^*)}.$$

Offenbar ist

(38) $$c_8(\operatorname{grad}\varphi(\mathfrak{z}))^2 \leqq (\operatorname{grad}\varphi(\mathfrak{z}^*))^2 \leqq c_9(\operatorname{grad}\varphi(\mathfrak{z}))^2.$$

Aus (38) und (4) erhält man

$$c_{10}\varphi(\mathfrak{z}) < \varphi(\mathfrak{z}^*) < c_{11}\varphi(\mathfrak{z}),$$

woraus sich mit (35), (36), (37) und (38) die Ungleichung

(39) $$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{v} - \mathfrak{x})'\mathfrak{Z}^{-1}(\mathfrak{z}^*)(\mathfrak{v} - \mathfrak{x}) > c_{12}\delta_1^2\varphi(\mathfrak{z})$$

ergibt. Aus (33) und (39) folgt

$$h(\mathfrak{v}) < \varphi(\mathfrak{z}) - c_{12}\delta_1^2\, \varphi(\mathfrak{z})$$

und hieraus endlich

$$I_3(\mathfrak{z}) < c_{13} N\mathfrak{z}\, N\mathfrak{x}\, e^{\varphi(\mathfrak{z}) + (c_{11}\cdot\varepsilon - c_{12}\delta_1^2)\varphi(\mathfrak{z})},$$

wobei wir das Volumen des Gebietes $\mathfrak{V}_2 - \mathfrak{V}_3$ durch $c_{13} N\mathfrak{x}$ abgeschätzt haben. Nach (5) und (6) ist für hinreichend kleines $\mathfrak{z}$ noch

$$\log(c_{13} N\mathfrak{z}\, N\mathfrak{x}) < c_{14} \log\varphi(\mathfrak{z}) < c_{15}\cdot\varepsilon\cdot\varphi(\mathfrak{z}).$$

Wählen wir δ_1 derart, daß

$$(c_{11} + c_{15})\,\varepsilon - c_{12}\delta_1^2 < -2\,\varepsilon$$

wird, so ergibt sich die gewünschte Abschätzung

$$I_3(\mathfrak{z}) = o(f(\mathfrak{z})) \tag{40}$$

für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$.

6. Durch (25), (28) und (40) haben wir die Aussage (22) bewiesen. Aus (18) und (21) folgt daher für beliebiges $\varepsilon_1 > 0$ bei hinreichend kleinem $\mathfrak{z}$ die untere Abschätzung

$$I_4(\mathfrak{z}) = N\mathfrak{z} \int\limits_{\mathfrak{V}_4} A(\mathfrak{v})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{v}}\, dv_1 \ldots dv_n > e^{\varphi(\mathfrak{z})(1-\varepsilon_1)}. \tag{41}$$

Nach (14) ist

$$I_4(\mathfrak{z}) \leqq N\mathfrak{z}\, A((1+\delta_1)\,\mathfrak{x}) \int\limits_{(1-\delta_1)x_1}^{(1+\delta_1)x_1} \cdots \int\limits_{(1+\delta_1)x_n}^{(1+\delta_1)x_n} e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{v}}\, dv_1 \ldots dv_n$$
$$< A((1+\delta_1)\,\mathfrak{x})\, e^{-(1-\delta_1)\mathfrak{z}'\mathfrak{x}},$$

und mit (41) folgt hieraus

$$A((1+\delta_1)\,\mathfrak{x}) > e^{(\varphi(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}'\mathfrak{x})(1-\varepsilon_1-\delta_1)}. \tag{42}$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{z}_4$ den durch

$$-\operatorname{grad}\varphi(\mathfrak{z}_4) = (1+\delta_1)\,\mathfrak{x}$$

bestimmten Vektor, so erkennt man, ähnlich wie im letzten Abschnitt, daß

$$\varphi(\mathfrak{z}) - \varphi(\mathfrak{z}_4) + \mathfrak{z}'\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_4'\,\mathfrak{x}(1+\delta_1) = \tfrac{1}{2}\,\delta_1^2\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{Z}^{-1}(\mathfrak{z}^{**})\,\mathfrak{x} - \delta_1\mathfrak{z}_4'\,\mathfrak{x} \tag{43}$$

ist. Hier ist

$$-\operatorname{grad}\varphi(\mathfrak{z}^{**}) = \mathfrak{x}^* \quad\text{und}\quad \mathfrak{x}^* = (1+\vartheta\,\delta_1)\,\mathfrak{x}$$

mit $0 < \vartheta < 1$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{Z}$ und daher auch $\mathfrak{Z}^{-1}$ die Matrix einer positiv definiten quadratischen Form. Nach (4) und (6) ist ferner

$$\mathfrak{z}_4'\,\mathfrak{x} < c_{17}\,\varphi(\mathfrak{z}). \tag{44}$$

Aus (42), (43) und (44) ergibt sich

$$A((1+\delta_1)\,\mathfrak{x}) > e^{(\varphi(\mathfrak{z}_4) + \mathfrak{z}_4'\mathfrak{x}(1+\delta_1))(1-\varepsilon_1-c_{18}\delta_1)}.$$

Ersetzen wir $(1+\delta_1)\,\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x}$, also $\mathfrak{z}_4$ durch $\mathfrak{z}$, so folgt

$$A(\mathfrak{x}) > e^{(\varphi(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}'\mathfrak{x})(1-\varepsilon_1-c_{18}\delta_1)}. \tag{45}$$

Hier kann δ_1 beliebig klein vorgegeben werden, falls $\mathfrak{x}$ hinreichend groß ist.

Dasselbe gilt für ε und ε_1. Aus (20) und (45) erhalten wir für beliebiges $\delta > 0$ deshalb

$$e^{(\varphi(\mathfrak{z})+\mathfrak{z}'\mathfrak{x})(1-\delta)} < A(\mathfrak{x}) < e^{(\varphi(\mathfrak{z})+\mathfrak{z}'\mathfrak{x})(1+\delta)},$$

falls nur $\mathfrak{x}$ hinreichend groß ist. Dies ist die Behauptung (19).

§ 4. Anwendung

1. In einem n-dimensionalen euklidischen Raum seien n linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$ gegeben mit

$$\mathfrak{g}_\nu = \begin{pmatrix} g_{1\nu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{n\nu} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Gesamtheit der Linearkombinationen

$$\mathfrak{g} = m_1\mathfrak{g}_1 + m_2\mathfrak{g}_2 + \cdots + m_n\mathfrak{g}_n$$

mit ganzen rationalen $m_1, \ldots, m_n$ nennen wir das *Gitter* $\mathfrak{G}$, während $\mathfrak{g}$ selbst als *Gitterpunkt* oder *Gittervektor* bezeichnet wird. Die Vektoren $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$, die wir als total positiv voraussetzen wollen, heißen eine *Basis* von $\mathfrak{G}$. Dem Gitter $\mathfrak{G}$ ist die Matrix

$$\mathfrak{A} = ((g_{\mu\nu})) \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

zugeordnet. Ist $|\mathfrak{A}|$ die Determinante von $\mathfrak{A}$, so heiße

$$|\mathfrak{A}|^2 = d(\mathfrak{G}) = d$$

die *Diskriminante* von $\mathfrak{G}$.

Eine unendliche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{g}>0} a(\mathfrak{g})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}},$$

in welcher $\mathfrak{g}$ alle total-positiven Gittervektoren durchläuft, nennen wir, in leichter Verallgemeinerung eines von Hecke [3] eingeführten Begriffes, eine *Potenzreihe des Gitters* $\mathfrak{G}$. Eine solche Reihe läßt sich als Laplacesches Integral schreiben. Man ordnet zu diesem Zweck einem Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ das Parallelepiped $\mathfrak{P}_\mathfrak{g}$ zu, welches von den an $\mathfrak{g}$ angreifenden Vektoren $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots, \mathfrak{g}_n$ aufgespannt wird. Offenbar ist

$$\int\limits_{\mathfrak{P}_\mathfrak{g}} e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}}\, dx_1 \ldots dx_n = \sqrt{d}\, \frac{(1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1}) \ldots (1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n})}{(\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1) \ldots (\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n)}\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}}. \tag{46}$$

Wir definieren

$$A(\mathfrak{g}) = \sum_{\mathfrak{g}-\mathfrak{w}>0} a(\mathfrak{w}), \tag{47}$$

ferner $A(\mathfrak{x}) = A(\mathfrak{g})$, wenn $\mathfrak{x}$ innerhalb von $\mathfrak{P}_\mathfrak{g}$ oder in den von je $n-1$ der an $\mathfrak{g}$ angreifenden Vektoren $\mathfrak{g}_\nu$ erzeugten Parallelepipeden $(n-1)$-ter Dimension liegt, und $A(\mathfrak{x}) = 0$, wenn der zugehörige Gittervektor nicht total-positiv ist. Dann ist

$$\sum_{\mathfrak{g}>0} a(\mathfrak{g})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}} = (1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1}) \ldots (1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n}) \sum_{\mathfrak{g}>0} A(\mathfrak{g})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}}, \tag{48}$$

und aus (46) folgt

$$(49)\qquad \sum_{\mathfrak{g}>0} a(\mathfrak{g})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}} = \frac{1}{\sqrt{d}}\,(\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1)\ldots(\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n)\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty A(\mathfrak{x})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}}\, dx_1 \ldots dx_n .$$

Es ist zweckmäßig, die n-te Differenz $\Delta_n A(\mathfrak{x})$ in einem Gitter einzuführen:

$$(50)\qquad \begin{aligned} \Delta_n A(\mathfrak{x}) = A(\mathfrak{x}) - \sum_{\nu=1}^{n} A(\mathfrak{x}-\mathfrak{g}_\nu) + \sum_{\substack{\nu,\mu=1\\ \nu<\mu}}^{n} A(\mathfrak{x}-\mathfrak{g}_\nu-\mathfrak{g}_\mu) - + \\ + \cdots + (-1)^n A(\mathfrak{x}-\mathfrak{g}_1-\cdots-\mathfrak{g}_n). \end{aligned}$$

Es gilt

$$(51)\qquad \Delta_n A(\mathfrak{g}) = a(\mathfrak{g}).$$

Ist daher $\Delta_n A(\mathfrak{g}) \geqq 0$, so erfüllt $A(\mathfrak{x})$ die Forderung (14).

2. Es sei $P(\mathfrak{g})$ gleich der Anzahl der additiven Zerlegungen

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 + \cdots$$

des Gittervektors $\mathfrak{g}$ in total-positive Gittervektoren $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots$, wobei zwei Zerlegungen nur einmal gezählt werden, wenn sie durch eine Permutation der $\mathfrak{w}_i$ auseinander hervorgehen. Man beweist leicht (vgl. [5]), daß für $\mathfrak{z} \succ 0$ die folgende Identität gilt:

$$(52)\qquad F(\mathfrak{z}) = \prod_{\mathfrak{g}>0} (1 - e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}})^{-1} = 1 + \sum_{\mathfrak{g}>0} P(\mathfrak{g})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}}.$$

Wir setzen

$$(53)\qquad f_1(\mathfrak{z}) = \sqrt{d}\, N\mathfrak{z}\, \frac{(1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1})\ldots(1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n})}{(\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1)\cdots(\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n)}\, F(\mathfrak{z}).$$

Nach (48), (49) und (52) ist dann

$$(54)\qquad f_1(\mathfrak{z}) = N\mathfrak{z} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty P(\mathfrak{x})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}}\, dx_1 \ldots dx_n ,$$

wobei $P(\mathfrak{x})$ die in der gleichen Weise wie $A(\mathfrak{x})$ verallgemeinerte unstetige Funktion ist. Wir zeigen nun, daß für $f_1(\mathfrak{z})$ und $P(\mathfrak{x})$ die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Zunächst konvergiert das Integral (54) für $\mathfrak{z} \succ 0$. Es ist ferner $\Delta_n P(\mathfrak{g}) \geqq 0$, denn das Produkt

$$(1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1})\ldots(1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n})\, F(\mathfrak{z}) = \prod_{\substack{\mathfrak{g}>0\\ \mathfrak{g}\neq\mathfrak{g}_1,\ldots,\mathfrak{g}_n}} (1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}})^{-1}$$

kann in seiner Entwicklung nur nicht-negative Koeffizienten besitzen. Damit ist nach der obigen Bemerkung die Voraussetzung (14) erfüllt. Wir beweisen nun

$$(55)\qquad \log f_1(\mathfrak{z}) = \varphi_1(\mathfrak{z})\,(1 + o(1))$$

für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$, mit

$$(56)\qquad \varphi_1(\mathfrak{z}) = \frac{\zeta(n+1)}{\sqrt{d}\, N\mathfrak{z}}.$$

Hier ist $\zeta(s)$ die Riemannsche ζ-Funktion. Wie schon früher gezeigt, genügt die Funktion $\varphi_1(\mathfrak{z})$ den Bedingungen (I).

Wir betrachten zu diesem Zweck die für $\mathfrak{z} > 0$ konvergente *geometrische Reihe*

$$G(\mathfrak{z}) = \sum_{\mathfrak{g} > 0} e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}}. \tag{57}$$

Nach (48) und (49) ist für $\mathfrak{z} > 0$

$$G(\mathfrak{z}) = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{(\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1)\dots(\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n)}{(1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1})\dots(1-e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n})} \cdot \int_0^\infty \dots \int_0^\infty A_0(\mathfrak{x})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}}\, dx_1 \dots dx_n .$$

Hier ist $A_0(\mathfrak{x}) = 1$, wenn der dem Vektor $\mathfrak{x}$ zugeordnete Gittervektor $\mathfrak{g}$ total-positiv ist, und $A_0(\mathfrak{x}) = 0$, wenn dies nicht der Fall ist. Offenbar gibt es einen total-positiven Vektor $\mathfrak{h}$ mit festen Komponenten, so daß $A_0(\mathfrak{x}) = 1$ ist für $\mathfrak{x} - \mathfrak{h} \geqq 0$. Dann wird

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty A_0(\mathfrak{x})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}} dx_1 \dots dx_n < \frac{1}{N\mathfrak{z}} \tag{58}$$

und

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty A_0(\mathfrak{x})\, e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{x}} dx_1 \dots dx_n > \frac{e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{h}}}{N\mathfrak{z}}. \tag{59}$$

Verwenden wir noch die für $a > 0$ geltenden Ungleichungen

$$\frac{1}{a} < \frac{e^a}{e^a - 1} < \frac{1+a}{a},$$

so ergibt sich aus (58) und (59) sofort

$$\frac{e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{h}}}{\sqrt{d}\, N\mathfrak{z}} < G(\mathfrak{z}) < \frac{(1+\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_1)\dots(1+\mathfrak{z}'\mathfrak{g}_n)}{\sqrt{d}\, N\mathfrak{z}}. \tag{60}$$

Man kann ferner leicht zeigen, daß für reduziertes $\mathfrak{z}$ und $k > 1$ mit einer positiven Konstanten c_{19} stets die Abschätzung

$$G(k\,\mathfrak{z}) < e^{-(k-1)c_{19}(N\mathfrak{z})^{\frac{1}{n}}} G(\mathfrak{z}) \tag{61}$$

gilt.

Nach (52) ist

$$\begin{aligned} \log F(\mathfrak{z}) &= -\sum_{\mathfrak{g}>0} \log(1 - e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{g}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{\mathfrak{g}>0} e^{-k\mathfrak{z}'\mathfrak{g}}, \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} G(k\mathfrak{z}). \end{aligned} \tag{62}$$

Aus der unteren Abschätzung in (60) erhält man mit (62) unmittelbar

$$\log F(\mathfrak{z}) > \frac{\zeta(n+1)}{\sqrt{d}\, N\mathfrak{z}} (1-\varepsilon) \tag{63}$$

für hinreichend kleines $\mathfrak{z}$.

Zur Gewinnung der oberen Abschätzung schreiben wir

$$\log F(\mathfrak{z}) =$$

$$= \sum_{1 \le k \le (N\mathfrak{z})^{-\frac{3}{2n}}} \frac{1}{\sqrt{d}\, N\mathfrak{z}\, k^{n+1}} + \sum_{1 \le k \le (N\mathfrak{z})^{-\frac{3}{2n}}} \frac{1}{k}\left\{G(k\mathfrak{z}) - \frac{1}{\sqrt{d}\, N\mathfrak{z}\, k^n}\right\} + \sum_{k > (N\mathfrak{z})^{-\frac{3}{2n}}} \frac{1}{k} G(k\mathfrak{z}),$$

$$= S_1 \qquad + S_2 \qquad + S_3.$$

Für reduziertes $\mathfrak{z}$ ist nach (60)

$$G(k\mathfrak{z}) - \frac{1}{\sqrt{d}\, N\mathfrak{z}\, k^n} < \left\{\left(1 + k c_{20} (N\mathfrak{z})^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1\right\} \frac{1}{\sqrt{d}\, N\mathfrak{z}\, k^n}$$

$$< \frac{c_{21}}{k^{n-1} (N\mathfrak{z})^{1-\frac{1}{n}}} + \frac{c_{22}}{k^{n-2} (N\mathfrak{z})^{1-\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{c_{23}}{k (N\mathfrak{z})^{\frac{1}{n}}} + c_{24}.$$

Hieraus ergibt sich

$$S_2 = O\left((N\mathfrak{z})^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right) \text{ für } \mathfrak{z} \Rightarrow 0.$$

Weiter ist nach (61)

$$(G(\mathfrak{z}))^{-1} S_3 < \sum_{k > (N\mathfrak{z})^{-\frac{3}{2n}}} \frac{1}{k} e^{-(k-1) c_{19} (N\mathfrak{z})^{\frac{1}{n}}} < c_{26} \cdot \int_{(N\mathfrak{z})^{-\frac{3}{2n}-1}}^{\infty} \frac{e^{-u c_{19} (N\mathfrak{z})^{\frac{1}{n}}}}{u}\, du <$$

$$< \int_{c_{19} (N\mathfrak{z})^{-\frac{1}{2n}}}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v}\, dv = o(1)$$

für $\mathfrak{z} \Rightarrow 0$. Es ist also

$$S_3 = o((N\mathfrak{z})^{-1}) \text{ für } \mathfrak{z} \Rightarrow 0.$$

Somit folgt

$$\log F(\mathfrak{z}) < \frac{\zeta(n+1)}{\sqrt{d}\, N\mathfrak{z}} (1 + \varepsilon) \tag{64}$$

für hinreichend kleines $\mathfrak{z}$. Aus (53), (63) und (64) erhält man (55).

Der Satz 1 liefert nun unter Verwendung der Formel (11) den

Satz 2: *Für* $\mathfrak{g} \Rightarrow \infty$ *ist*

$$\log P(\mathfrak{g}) = (n+1) \left\{\frac{\zeta(n+1)}{\sqrt{d}} N\mathfrak{g}\right\}^{\frac{1}{n+1}} (1 + o(1)).$$

Dieser Satz wurde in einigen Spezialfällen bereits bewiesen. Für das rationale Partitionenproblem ($n = 1$, $\mathfrak{g}_1 = 1$) ist das entsprechende Resultat

$$\log p(m) = \pi \sqrt{\frac{2m}{3}} \cdot (1 + o(1)) \quad \text{für } m \to \infty$$

schon in der Arbeit von Hardy und Ramanujan [2] enthalten. In zwei

Dimensionen läßt sich der Satz 2 für das quadratische Gitter $\left(\text{etwa } \mathfrak{g}_1 = \binom{1}{1},\ \mathfrak{g}_2 = \binom{1}{2}\right)$ aus einem Satz von Auluck [1] gewinnen.

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich, wenn wir das Gitter der ganzen Zahlen eines total-reellen Zahlkörpers betrachten. Man kann zeigen (vgl. [6]), daß man zu jeder total-positiven Zahl μ eine „reduzierte“ Zahl μ_1 des gleichen Körpers finden kann, für welche $N\,\mu_1 = N\,\mu$ ist, und für welche die Partitionenanzahlen die gleichen sind. (Hier bedeutet $N\mu$ die Norm der Zahl μ im Sinne des Körpers.) Dieser Übergang zur reduzierten Zahl wird durch die Einheiten des Körpers vollzogen. Wir erhalten aus Satz 2 dann den

Satz 3: *Es sei $P(\mu)$ die Anzahl der Partitionen der ganzen Zahl μ eines total-reellen Zahlkörpers n-ten Grades in total-positive ganze Zahlen desselben Körpers. Für $N\mu \to \infty$ gilt dann*

$$\log P(\mu) = (n+1)\left\{\frac{\zeta(n+1)}{\sqrt{d}}\,N\mu\right\}^{\frac{1}{n+1}} \cdot (1 + o(1)).$$

Im Falle eines reell-quadratischen Zahlkörpers ergibt sich der Satz 3 aus dem Satz 2 der Arbeit [5].

Literatur

[1] Auluck, F. C.: "On partitions of bipartite numbers." Proc. Cambridge Phil. Soc. 49, 72—83 (1953). — [2] Hardy, G. H., u. S. Ramanujan: "Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types." Proc. London Math. Soc. 2. ser. 16, 112—132 (1918). — [3] Hecke, E.: „Analytische Funktionen und algebraische Zahlen I.“ Abh. Math. Sem. Hamburg 1, 102—126 (1922). — [4] Ingham, A. E.: "A Tauberian Theorem for Partitions." Ann. of Math. 42, 1075—1090 (1941). — [5] Meinardus, G.: „Über das Partitionenproblem eines reellquadratischen Zahlkörpers.“ Math. Ann. 126, 343—361 (1953). — [6] Siegel, C. L.: „Darstellung total-positiver Zahlen durch Quadrate.“ Math. Z. 11, 246—275 (1921).

(Eingegangen am 1. Juni 1956)

HARROP, R.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 347—361 (1956)

On Disjunctions and Existential Statements in Intuitionistic Systems of Logic

By

R. HARROP in Newcastle upon Tyne, England

1. Introduction

The result stated without proof by GÖDEL in 1932 [3], that a disjunction is provable in the intuitionistic propositional calculus if and only if at least one disjunctand is provable has since been demonstrated by many authors, see, for example, GENTZEN [2], WAJSBERG [12], MCKINSEY and TARSKI [7], RIEGER [10], KLEENE [6]. The result has been generalised to the predicate calculus, compare SCHÜTTE [11] and RASIOWA and SIKORSKI [9] and to a fragment of arithmetic, see RASIOWA [8]. In this fragment of arithmetic, the scheme of induction could not be applied to formulae which involved the symbols of disjunction or of existential quantification. The methods of proof have varied considerably. SCHÜTTE defines the intuitionistic predicate calculus in a manner basically modelled on the work of GENTZEN, though not using sequences, and he proves the stated result by the elimination of the cut (Schnitt) rule. RASIOWA and SIKORSKI obtain their results from an investigation into the algebraic structure of the calculi concerned. Their work is comparable with, though a considerable extension of, the work of MCKINSEY and TARSKI in [7].

In this paper, two systems of axioms and rules, $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{N}_1$ are described, which, if the rule of modus ponens were added to each of them, would be easily seen to have as provable formulae (theorems), respectively the theorems of the intuitionistic propositional calculus $\mathbf{P}$ and the theorems which have no free variables in the system of elementary number theory, denoted here by $\mathbf{N}$, defined in KLEENE [6], using the intuitionistic propositional axioms. This system of number theory, with no restriction on the induction scheme, is an extension of that studied by RASIOWA.

The theorems, first of $\mathbf{P}_1$ and then of $\mathbf{N}_1$ are arranged as a well-ordered series and each element of the series is considered in turn and either retained or deleted according to rules constructed so that in addition to certain desired properties being unaffected the elements retained form a set closed under modus ponens. It is shown that this set contains the axioms of $\mathbf{P}_1$ (or $\mathbf{N}_1$) and is closed under the rules of $\mathbf{P}_1$ (or $\mathbf{N}_1$). It is deduced that $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{N}_1$ are closed under modus ponens. By considering the forms of the rules of $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{N}_1$ it follows that a disjunction cannot be proved in either calculus by a proof which does not involve a proof of at least one disjunctand, and, in the latter calculus, an existential statement cannot be proved by a proof which does

not involve a proof of at least one 'instance' of the statement. Hence it is shown immediately that (i) a disjunction is a theorem of **P** if and only if at least one of its disjunctands is a theorem of **P**, (ii) a disjunction which does not involve free variables is a theorem of **N** if and only if at least one of its disjunctands is a theorem of **N** and (iii) an existential statement (this being defined so as not to contain free variables) is a theorem of **N** if and only if at least one 'instance' of it is a theorem of **N**. It is easy to prove, on the assumption of the freedom from contradiction of **N**, that result (ii) cannot be extended so as to apply to arbitrary disjunctions of **N**.

Using a method similar to that used in this paper, the details being simpler than those in the consideration of **N**, it can be shown that a disjunction is provable in the intuitionistic predicate calculus **Pr** if and only if at least one disjunctand is provable and an existential statement is provable if and only if some particular 'instance' of it is provable. The proof of these results would not lead, for example, to a primitive recursive method for obtaining a proof of a disjunctand of a provable disjunction in **Pr**. In this respect the results for the predicate calculus are weaker than SCHÜTTE's. In the associated calculus $\mathbf{Pr}_1$ a disjunction could not be proved other than through a disjunctand. The methods used in the paper can be applied in the consideration of certain other similar problems.

2. The Process $\mathfrak{P}$

Suppose that R is a set of symbols including $\rightarrow$, (,) and that certain of these symbols, including $\rightarrow$, are called propositional connectives. Let T be the set of finite linear arrays of members of R. Let T^* be a subset of T. Suppose that the elements of T^* are well-ordered as a series S in such a way that any member containing r occurrences of propositional connectives follows any member containing s such occurrences if $r > s$.

Let S be transformed into a series S', the members of which form a set T^{**}, by a process $\mathfrak{P}$, called a *deletion process*, which consists in considering the members of S in turn, in the order in which they occur in S, and retaining or deleting each member when it is considered. Let S_X denote the series obtained from S after the consideration of all the elements previous to a given arbitrary element X of S. Using $\in$ to denote the usual membership relation, $\mathfrak{P}$ must be such that if $X \in S$ and is of the form $(Y \rightarrow Z)$ then it is deleted when it is considered if and only if $Y \in S_X$ and $Z \notin S_X$. It is evident that if Y or Z occurs in S_X, such an occurrence must be before X and therefore among the elements of S which have previously been considered and retained. We can prove at once:

Lemma 2.1 (i) *If* $X \in T^{**}$, *then* $X \in T^*$.

(ii) *If* $(Y \rightarrow Z) \in T^*$ *then it is deleted if and only if* $Y \in T^{**}$ *and* $Z \notin T^{**}$.

(iii) *If* $Y \in T^{**}$ *and* $(Y \rightarrow Z) \in T^{**}$ *then* $Z \in T^{**}$.

Let $C_1, \ldots, C_n$, $n > 1$ denote particular elements of T. Consider the following statements $A_j(T')$, $1 \leq j \leq n$, relating to the C_i and an arbitrary subset T' of T.

If $C_k \in T'$ for all k, if any, such that $1 \leq k < j$, then

$$(C_j \to (C_{j+1} \to \ldots (C_{n-1} \to C_n) \ldots)) \in T'. \qquad \ldots A_j(T')$$

If $j = 1$, the premise of A_j is vacuously satisfied. If $j = n$ the formula in the conclusion is simply C_n.

Lemma 2.2. *If r, s are integers with $1 \leq r \leq s \leq n$ such that $A_j(T^*)$ is true for all j, if any, with $r \leq j < s$ then all or none of the statements $A_j(T^{**})$, $r \leq j \leq s$, are true.*

Proof. If the result is false there is a t with $r \leq t < s$ such that $A_t(T^*)$ is true and either $A_t(T^{**})$ is true and $A_{t+1}(T^{**})$ is false, or $A_t(T^{**})$ is false and $A_{t+1}(T^{**})$ is true. In the former case all the formulae in the premise of A_{t+1}, and therefore in the premise of A_t, must be in T^{**} while the formula in the conclusion of A_{t+1} is not in T^{**}. By Lemma 2.1 (iii), the formula in the conclusion of A_t cannot be in T^{**} and hence $A_t(T^{**})$ must be false. In the latter case, all the formulae in the premise of A_t must be in T^{**} and the formula in its conclusion, since it is in T^*, must be deleted[1]). Hence, by Lemma 2.1 (ii), all the formulae in the premise of A_{t+1} but not the formula in its conclusion are in T^{**}. Thus, $A_{t+1}(T^{**})$ is false. In each of the two cases a contradiction has thus been obtained. The proof of Lemma 2.2 can be completed immediately.

3. Intuitionistic Propositional Calculus

The Intuitionistic propositional calculus, **P**, has as its symbols a denumerably infinite set of variables, four propositional connectives $\to$, &, $\vee$ and $\sim$ and left and right brackets (,). The first three of the connectives are binary, the fourth, unary. The set of formulae of **P** is obtained from the symbols in the conventional way, see, for example [6]. We shall use dots in place of brackets, when desired, in accordance with the convention proposed by Curry [1], except that no order of seniority will be assumed for the propositional connectives. Capital Roman letters $U, V, \ldots, Z$ will be used to denote arbitrary formulae of **P**.

The following ten expressions, see [6], will be used as the axiom schemes of **P**:

1 $X \to (Y \to X)$	6 $X \to \cdot X \vee Y$
2 $(X \to Y) \to ((X \to (Y \to Z)) \to (X \to Z))$	7 $Y \to \cdot X \vee Y$
3 $X \to (Y \to (X \,\&\, Y))$	8 $(X \to Z) \to ((Y \to Z) \to (X \vee Y \cdot \to Z))$
4 $X \,\&\, Y \cdot \to X$	9 $(X \to Y) \to ((X \to \sim Y) \to \sim X)$
5 $X \,\&\, Y \cdot \to Y$	10 $\sim X \cdot \to (X \to Y)$.

P has the following rule. By means of it and the axiom schemes the provable formulae (theorems) of **P** can be defined in the usual way:

R 1 If X and $X \to Y$ are provable, then so is Y.

---

[1]) A formula will only be said to *be deleted* if it is in T^* but not in T^{**}. This should be contrasted with the weaker statement that a formula is *not in* T^{**}.

Theorem 3.1. *A formula is provable in* **P** *if and only if it is provable in the calculus* $\mathbf{P}_1$ *which has the same formulae and axiom schemes as* **P**, *but in place of* R 1 *has rules* I–XII *below*:

$$\mathrm{I}\ \frac{X}{Y \to X} \quad \mathrm{II}\ \frac{X \to Y}{(X \to (Y \to Z)) \to (X \to Z)} \quad \mathrm{III}\ \frac{X \to Y\ \ X \to (Y \to Z)}{X \to Z}$$

$$\mathrm{IV}\ \frac{X}{Y \to (X \,\&\, Y)} \quad \mathrm{V}\ \frac{X\ \ Y}{X \,\&\, Y} \quad \mathrm{VI}\ \frac{X}{X \vee Y} \quad \mathrm{VII}\ \frac{Y}{X \vee Y}$$

$$\mathrm{VIII}\ \frac{X \to Z}{(Y \to Z) \to (X \vee Y \cdot \to Z)} \quad \mathrm{IX}\ \frac{X \to Z\ \ Y \to Z}{X \vee Y \cdot \to Z} \quad \mathrm{X}\ \frac{X \to Y}{(X \to \sim Y) \to \sim X}$$

$$\mathrm{XI}\ \frac{X \to Y\ \ X \to \sim Y}{\sim X} \quad \mathrm{XII}\ \frac{\sim X}{X \to Y}.$$

Proof. The rules of $\mathbf{P}_1$ are easily seen to be derived rules of **P**. Since the axioms of $\mathbf{P}_1$ and of **P** are the same, every formula provable in $\mathbf{P}_1$ is provable in **P**. It will now be shown that the set T^* of theorems of $\mathbf{P}_1$ is closed with respect to R 1.

Well-order T^* as a series S as in § 2. Precise details of some definite ordering could be given, if desired. Let a deletion process $\mathfrak{P}$ be defined so that with the notation of § 2 an element X of S is deleted on consideration if and only if one of the following conditions is satisfied:

(i) X is of the form $Y \to Z$ where Y but not Z is in S_X.

(ii) X is of the form $Y \,\&\, Z$ where not both Y and Z are in S_X.

(iii) X is of the form $Y \vee Z$ where neither Y nor Z is in S_X.

By Lemma 2.1 (iii), T^{**} is closed under R 1. From the deletion conditions, the condition on the method of ordering of S and the form of the rules of $\mathbf{P}_1$ it follows that

(α) A formula of type $U \,\&\, V$ is in T^* if and only if U and V are both in T^* and is in T^{**} if and only if U and V are both in T^{**}.

(β) A formula of type $U \vee V$ is in T^* if and only if at least one of U, V is in T^* and is in T^{**} if and only if at least one of U, V is in T^{**}.

It is first shown that T^{**} is closed under each of the rules I, III, IX, XI and XII. Suppose that T^{**} is not closed with respect to at least one of these rules. Then there must be an application of such a rule in which all the premises but not the conclusion belong to T^{**}. Since T^* is closed under the rule, the conclusion is in T^* and is thus deleted. From the deletion conditions, the rule cannot be XI and from Lemma 2.1 and (β) it can easily be seen that it cannot be one of rules I, III, IX. Finally it cannot be rule XII since for no formula X can X and $\sim X$ both be in T^{**} (and therefore in T^*), for the theorems of **P** are theorems of the classical 2-valued propositional calculus. Hence T^{**} must be closed under each of the rules mentioned.

By Lemma 2.2, (α) and (β) and, in the consideration of axioms 4 and 5, Lemma 2.1 (ii), T^{**} contains all the axioms of $\mathbf{P}_1$ and is closed under the rules of $\mathbf{P}_1$. Thus, T^* is a subset of T^{**}. Since, from its definition, T^{**} is a subset of T^*, the sets T^* and T^{**} are identical. Hence T^{**} is closed under R 1 and the proof of Theorem 3.1 is completed.

The following corollary of Theorem 3.1 is immediate:

Corollary 3. 1. *A disjunction is provable in* **P** *if and only if at least one of its disjunctands is provable in* **P**.

In $\mathbf{P}_1$ a proof of a disjunction already includes a proof of at least one of its disjunctands. The proof of Theorem 3.1 amounts to showing that if the deletion process to ensure satisfaction of R1 is applied to T^* while retaining satisfactory conjunction and disjunction conditions (through parts (ii) and (iii) of the definition of $\mathfrak{P}$) then T^* is unchanged. Parts (ii) and (iii) of the definition of $\mathfrak{P}$ are used through (α) and (β) in conjunction with Lemma 2.1 in the consideration of rule IX and axioms 4 and 5.

It is fairly easy to see that R1 is not a direct derived rule of $\mathbf{P}_1$ but only a subsidiary deduction rule (see [6], p. 94). The following set of ranges and tables form a model for $\mathbf{P}_1$ (in the sense of Kemeny [5]) in which $X \vee \sim X$ but not $\sim X \cdot \vee X$ is valid. This could not arise if R1 was a direct derived rule, for $\sim X \cdot \vee X$ is provable in the calculus obtained from **P** by adding $X \vee \sim X$ as an extra axiom:

Variables range over the values 1, 2, 3 of which 1 alone is designated. Functions for $\rightarrow$, &, $\vee$ and $\sim$ are defined by:
$\rightarrow(1, 3) = \rightarrow(2, 3) = 3$; otherwise $\rightarrow(x, y) = 1$:
& $(x, y) = \max(x, y)$: $\vee\,(2, 3) = 1$; otherwise $\vee\,(x, y) = \min(x, y)$:
$\sim(1) = \sim(2) = 3$; $\sim(3) = 1$.

4. Intuitionistic Elementary Number Theory

An outline will now be given of the formal system **N** of number theory which is to be considered. From it a full description can be obtained by following the definitions given in [6]. Terms in **N** are obtained from variables (for natural numbers), the symbol 0 (zero), the binary functions $+$ and $\cdot$ (plus and times) and the unary function $'$ (successor of). Formulae are obtained from the terms by means of the number-theoretic connective $=$ (equals), the propositional connectives $\rightarrow$, &, $\vee$ and $\sim$ and universal and existential quantifiers. As in [6] a bound occurrence of a variable will be considered to be bound by the first quantifier of the variable (in the sense of construction of the formula) in the scope of which it lies. In contrast to [6], however, we will not allow quantification with respect to variables which do not occur free in the formula to be quantified. We shall use $a, b, c, \ldots$ to stand for arbitrary variables and expressions such as X, Y, $X(a)$, $X(a, b)$, ..., to denote arbitrary formulae containing free at least the variables displayed. Thus, $(a)\,(a = a\ \&\ (a)\,(a = a))$ will be considered as a formula but neither $(b)\,(a)\,(a = a)$ nor $(a)\,(a)\,(a = a)$ will be so considered. If $X(a)$ is used in a certain context and t is a term free for a in $X(a)$, that is, no free occurrence of a in $X(a)$ is in the scope of a quantifier (b) or (Eb) where b is a variable of t, then $X(t)$ will be used to denote the formula obtained from that denoted by $X(a)$ by replacing in the latter formula each free occurrence of a by t.

The axioms of **N** are as follows. In them t, s and u denote arbitrary terms. Substitutions of t in $X(a)$ to form $X(t)$ must be such that t is free for a in $X(a)$:

1–10	As for **P**	11	$X(0)\ \&\ (a)\,(X(a) \to X(a')) \cdot \to X(a)$		
12	$X(t) \to (Ea)\,X(a)$	13	$(a)\,X(a) \to X(t)$	14	$t' = s' \to t = s$
15	$t = s \to (t = u \to s = u)$	16	$t + 0 = t$	17	$t \cdot 0 = 0$
18	$\sim (t' = 0)$	19	$t = s \to t' = s'$	20	$t + (s') = (t + s)'$
21	$t \cdot (s') = (t \cdot s) + t$				

The rules of **N** are R 1 and the following two rules R 2 and R 3 in which a must not occur free in Z:

$$\text{R 2}\ \frac{Z \to X(a)}{Z \to (a)\,X(a)}, \quad \text{R 3}\ \frac{X(a) \to Z}{(Ea)\,X(a) \to Z}.$$

The theorems of **N** are defined in the usual way in terms of the axioms and rules of **N**. Among the theorems of **N** are such formulae as $a = b \to (c + a = c + b)$, $a = b \to ca = cb$. (See [6], p. 183.)

A formula of **N** will be said to be closed if and only if it contains no free variables. A formula Y will be called a closed form of a formula X if Y can be obtained from X by universal quantification with respect to each of the free variables of X. Two closed forms of a given formula differ at most in the order of prefixed universal quantifiers. A closed formula is itself its only closed form. We denote an arbitrary closed form of a formula X, which may itself *begin with a universal quantifier*[2]), by $Q(X)$. Thus, $(a)\,(b)\,(c)\,(a + b = c)$ is one of the formulae represented by each of the expressions $Q(a + b = c)$, $Q((c)\,(a + b = c))$, $Q((b)\,(c)\,(a + b = c))$ but not one of those represented by $Q((b)\,(a + b = c))$. It is the only formula represented by $Q((a)\,(b)\,(c)\,(a + b = c))$. $Q((c)\,(a + b = c))$ stands for $(a)\,(b)\,(c)\,(a + b = c)$ or $(b)\,(a)\,(c)\,(a + b = c)$.

A formal system $\mathbf{N}_1$ is now defined. It has the same formulae as **N** and its axioms are the closed forms of the axioms of **N**. The rules of $\mathbf{N}_1$ are I–XXIII to be given below. A rule expressed in the form $\dfrac{Q(\varphi)\ Q(\psi)}{Q(\chi)}$, where φ, ψ and χ are arbitrary formulae of certain (related) forms, states that from any formula representable in the form $Q(\varphi)$ and any formula representable in the form $Q(\psi)$, any formula representable in the form $Q(\chi)$ can be obtained. If a rule of $\mathbf{P}_1$ has the form $\dfrac{\varphi\ \psi}{\chi}$, then $\dfrac{Q(\varphi)\ Q(\psi)}{Q(\chi)}$ is called the corresponding closed rule. Similar definitions can be given for one premise rules. The expression written as $Q(X) \to Q(Y)$ in the conclusion of XV stands for any formula of the form $U \to V$ where U and V are representable in the forms $Q(X)$, $Q(Y)$ respectively. In XIV there must be at least one free variable present in Y for the rule to be applicable. In XXII there must be at least

[2]) This phrase will frequently be used to mean '*begin with a universal quantifier which quantifies the remainder of the formula*'. The last operation in constructing such a formula following the definition of 'formula' is the prefixing of this universal quantifier to the remainder of the formula.

one free variable present in t for the rule to be applicable. Conditions similar to those imposed on axioms 12 and 13 and rules R 2 and R 3 are imposed on the applicability of XIII, XVI, XVII and XXII. In XVIII–XXI, t, s and u are arbitrary terms. In XXIII, r and s are arbitrary terms without variables, $X(r)$ is closed and $X(s)$, which is also closed, can be obtained from $X(r)$ by replacement of one or more occurrences of r by s. [There is no need to consider this as new notation; $X(r)$ and $X(s)$ can be considered as arising from some common name-form $X(\alpha)$ where α is a suitable variable.] XXIII is not applicable when $X(r)$, and therefore $X(s)$, is a conjunction, disjunction or *existential statement*, that is, a *closed* formula of the form $(Ea)\,X(a)$. Subject to these conditions, the rules of $\mathbf{N}_1$ are:

I–XII Closed rules corresponding to the rules of $\mathbf{P}_1$

$$\text{XIII}\ \frac{Q(X(t))}{Q((Ea)\,X(a))} \qquad \text{XIV}\ \frac{Q(X)\,Q(X \to Y)}{Q(Y)} \qquad \text{XV}\ \frac{Q(X \to Y)}{Q(X) \to Q(Y)}$$

$$\text{XVI}\ \frac{Q(Z \to X(a))}{Q(Z \to (a)\,X(a))} \qquad \text{XVII}\ \frac{Q(X(a) \to Z)}{Q((Ea)\,X(a) \to Z)} \qquad \text{XVIII}\ \frac{Q(t = s)}{Q(t' = s')}$$

$$\text{XIX}\ \frac{Q(t' = s')}{Q(t = s)} \qquad \text{XX}\ \frac{Q(t = s)}{Q(t = u \to s = u)} \qquad \text{XXI}\ \frac{Q(t = s)\,Q(t = u)}{Q(s = u)}$$

$$\text{XXII}\ \frac{Q(X(a))}{Q(X(t))} \qquad \text{XXIII}\ \frac{r = s\ X(r)}{X(s)}$$

It will be noticed that all theorems of $\mathbf{N}_1$ are closed. Further, a disjunction, conjunction or existential statement can only be proved by proofs which have as their last step an application of one of rules V, VI, VII or XIII. Most of the rules are closed forms of rules related to the axioms of $\mathbf{N}$ in a way similar to that in which the statements $A_j(T')$ of § 2 are related to each other for different values of j. Other rules have been added for convenience in the proof of later results. Restrictions have been imposed to avoid the proof of a conjunction, disjunction or existential statement except through the rules stated. It may be possible to show that some of the rules, in particular XXIII, are redundant. For the purpose of the present paper it seems, however, simpler to include all the rules given.

Let the theorems of $\mathbf{N}_1$ form a set T^*. By rule XXII, which is related to axiom 13, T^* is closed under changes in the order of prefixed universal quantifiers, if any, of a formula. (If two closed forms of a formula X differ, X must contain at least one free variable, say a. Apply XXII with t replaced by a.)

By rule XXIII it is also closed under the replacement in a formula Z of terms without variables by other such terms which are provably equal to them in $\mathbf{N}_1$. This may be proved by induction on the smallest number of applications of rules other than XXIII in a proof of Z in $\mathbf{N}_1$. In this way the restrictions on the application of XXIII may be overcome. For example, if a replacement is to be made in a formula $(Ea)\,X(a)$ arising through XIII, and the replacement can, by induction hypothesis, be made in the premise $Q(X(t))$ of that application of XIII, to give a formula Y, then the formula obtainable by making the replacement in $(Ea)\,X(a)$ can be proved by an application of XIII to Y.

We shall call the terms 0, $0'$, $0''$, ... numerals. Given a closed formula X of the form $Q(Y)$ where Y has at least one free variable and does not begin with a universal quantifier[3]), we say that the *particular cases* of X are the formulae obtained from Y by substituting numerals for the variables which occur free in Y. Thus, if X is $(a_1) \ldots (a_k)\ Y(a_1, \ldots, a_k)$, $k \geqq 1$, where $Y(a_1, \ldots, a_k)$ does not begin with a universal quantifier, the particular cases of X are the formulae $Y(n_1, \ldots, n_k)$ for arbitrary numerals $n_1, \ldots, n_k$. Given a formula which does not begin with a universal quantifier, it is defined to have itself as its only particular case.

Well-order T^* as a sequence S as in § 2 so that in addition to the satisfaction of the propositional connective condition, if two formulae X and Y have the same number of propositional connectives while they have r and s quantifiers respectively where $r > s$, then X follows Y in S.

Obtain from S a new series S' with corresponding set of formulae T^{**}, by means of a deletion process $\mathfrak{P}$ under which, with the usual notation, a formula X of S is deleted on consideration if and only if one of the following five conditions is satisfied:

(i)—(iii) The same as the conditions for $\rightarrow$, & and $\vee$ in the process $\mathfrak{P}$ used in the proof of Theorem 3.1.

(iv) X begins with a universal quantifier and not all the particular cases of X are in S_X.

(v) X is of the form $(Ea)\ Y(a)$, that is, is an existential statement, and no formula $Y(n)$ where n is a numeral is in S_X.

By Lemma 2.1 (iii), T^{**} is closed under R 1, also, from the deletion conditions and the forms of the rules of $\mathbf{N}_1$, results (α) and (β) in the proof of Theorem 3.1 still apply in the new situation. Further

(γ) A formula of the form $(Ea)\ X(a)$ is in T^{**} if and only if there is a numeral n such that $X(n)$ is in T^{**}. (If $X(n) \in T^{**}$ then $(Ea)\ X(a) \in T^*$ by Lemma 2.1 (i) and XIII and cannot be deleted).

The retention or deletion of a formula X of S which begins with a universal quantifier depends on the presence in or absence from S_X of formulae which, if present in S_X, precede X and all formulae obtainable from X by change of order of initial universal quantifiers. Further, T^* is closed under change of order of such quantifiers and the particular cases of formulae differing only in the order of such quantifiers are the same. Hence:

(δ) If X is in T^{**} then all the particular cases of X are in T^{**}. (There is nothing to prove except when X begins with a universal quantifier).

(ε) If X is in T^* then it is in T^{**} if and only if all its particular cases are in T^{**}.

(ζ) T^{**} is closed under changes of order in the prefixing universal quantifiers of formulae.

Since the deletion of any formula $X \in S$ depends on formulae which if in S_X precede X and any formula obtained from X by replacement of r by s where r, s are terms without variables such that $r = s$ is provable in $\mathbf{N}_1$, and since T^* is closed under such replacements, it follows inductively using the definition of $\mathfrak{P}$ that

(η) T^{**} is closed under replacements in formulae of terms r, s without variables by one another where $r = s \in T^*$.

It can be seen immediately from the definition of $\mathfrak{P}$ that

(θ) If r, s are terms then $r = s \in T^*$ if and only if $r = s \in T^{**}$.

It will later be proved that if N_1 is free from contradiction the sets T^* and T^{**} are identical. Three lemmas used in that proof will now be given.

Lemma 4.1. *If X is a formula of the type $(a_1) \ldots (a_k)\, Y(a_1, \ldots, a_k)$ where Y does not begin with a universal quantifier and $k \geq 1$, then*

(i) *If $X \in T^*$, every formula of the form $(a_{i_1}) \ldots (a_{i_r})\, Y(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ where $1 \leq r < k$ and $i_1 < i_2 \ldots < i_r$ and where $\alpha_j = a_{i_m}$ if $j = i_m$ and if j is not of the form i_m for any m then α_j is some numeral, is also in T^*.*

(ii) *If $X \in T^{**}$, all the formulae mentioned in* (i) *above and also all formulae of the form $Y(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ where $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ are numerals, are in T^{**}. (The latter formulae are the particular cases of X. The particular cases of the other formulae are contained among them.)*

Proof. (i) is an immediate consequence of XXII and (ii) follows from (i), (ε) and (δ).

Lemma 4.2. *If X and Y are formulae and if $Q(X)$ and $Q(X \to Y)$ both belong to T^{**} then $Q(Y) \in T^{**}$, that is, if any formulae representable in the forms $Q(X)$, $Q(X \to Y)$ are in T^{**}, then so is any formula representable in the form $Q(Y)$.*

Proof. Let X and Y be respectively of the forms $(a_1) \ldots (a_p)\, W(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q)$ and $(c_1) \ldots (c_s)\, V(c_1, \ldots, c_s, d_1, \ldots, d_t)$ where p, q, s, t are all ≥ 0, V and W do not begin with universal quantifiers and all free variables present are shown. (If $p = 0$, X does not begin with a universal quantifier; if $q = 0$, X has no free variables etc.) There may be certain coincidences between the variables occurring in V and those occuring in W. Any coincidences between one r more of $d_1, \ldots, d_t$ and $b_1, \ldots, b_q$ lead to corresponding coincidences between the numerals $m_1, \ldots, m_t$ and $n_1, \ldots, n_q$ to be introduced.

Since $Q(X \to Y) \in T^{**}$ so do all its particular cases. These particular cases are the formulae:

$$(a_1, \ldots, a_p)\, W(a_1, \ldots, a_p, n_1, \ldots, n_q) \cdot\to$$
$$\cdot\to (c_1, \ldots, c_s)\, V(c_1, \ldots, c_s, m_1, \ldots, m_t)$$

where $n_1, \ldots, n_q, m_1, \ldots, m_t$ are numerals. By Lemma 4.1 (ii) and the fact that T^{**} is closed under R 1, or if $q = 0$ by direct application of the latter result, it follows, since $Q(X) \in T^{**}$ that for all numerals $m_1, \ldots, m_t$,

$$(c_1, \ldots, c_s)\, V(c_1, \ldots, c_s, m_1, \ldots, m_t) \qquad \ldots \text{(A)}$$

belongs to T^{**}. If Y has no free variables, that is, $t = 0$, this means that $Q(Y)$ which is the same as Y, is in T^{**}. Suppose $t \geq 1$. By (δ) all particular cases of the formulae (A), that is, all particular cases of $Q(Y)$ are in T^{**}. On the other hand, by rule XIV, since Y has at least one free variable, $Q(Y)$ is in T^*. Thus, by (ε), $Q(Y)$ is in T^{**} in this case also. This completes the proof of Lemma 4.2.

Lemma 4.3. *If r is a term without variables then there is a numeral n such that $r = n$ is provable in N_1.*

Proof. Since r contains no variables it is built up from 0 and the functions $+, \cdot$ and $'$. Its value as a numeral can be computed by primitive recursive methods and this numeral can be proved equal to r in N_1 by means of axioms 16, 17, 20 and 21 and rules XXI and XXIII. (When no variables are present, XVIII can be considered as a particular case of XXIII. It is possible to prove $r = r$, where r contains no variables, by an application of XXI to two cases of axiom 16.)

We shall now prove the result to which earlier reference was made.

Lemma 4.4. *If N_1 is free from contradiction, the sets T^* and T^{**} are identical.*

Proof. It will be shown that T^{**} contains all the axioms of N_1 and is closed under all the rules of N_1. The completion of the proof of the lemma is then trivial.

Suppose that T^{**} does not contain all the cases of some axiom, then, by (ε) and the forms of the axioms, there must, except in the case of axiom 11, be some case of the axiom which does not begin with a universal quantifier which is deleted. . . . (B)

Consider now the possibility of T^{**} not being closed under some rule of N_1 other then rules XIV, XV, XVI, XVII, XXII, XXIII. There is then an application of the rule in which the premises are all in T^{**}, and therefore for which all particular cases of the premises are in T^{**}, while the conclusion Y of the application of the rule, though it is in T^*, is not in T^{**}. Hence, there must be some particular case Y^* of Y which is not in T^{**}. Let the variables occurring in prefixed universal quantifiers of Y be $a_1, \ldots, a_k$. Let them be replaced in Y^* by $n_1, \ldots, n_k$. Y^* can be obtained in the case of each of the rules under consideration from the particular cases of the premises in which the variables in their prefixed universal quantifiers are replaced by 1 except for $a_1, \ldots, a_k$ which, if they occur, are replaced by $n_1, \ldots, n_k$ respectively. Since these particular cases of the premises are in T^* so is Y^* and hence, since Y^* is not in T^{**}, it is deleted by $\mathfrak{P}$. If the rule considered is denoted by $\frac{Q(\varphi)\, Q(\psi)}{Q(\chi)}$, with corresponding notation for a single premise rule, then T^* is closed under the rule $\left(\frac{\varphi\, \psi}{\chi}\right)'$, where the prime indicates that restrictions are applied on the applicability of the rules in certain cases, namely, in each of rules I, IV, VI, VIII, XII, the formula denoted by Y must be closed, in II, VII, that denoted by Z and X respectively must be closed and in XX, u must contain no free variables. The result follows since, under the restrictions made, and because all the formulae of T^* are closed, $\left(\frac{\varphi\, \psi}{\chi}\right)'$ acts as a restricted form of $\frac{Q(\varphi)\, Q(\psi)}{Q(\chi)}$. Our previous result can be stated thus:

In the case of each of the rules of N_1 other than XIV–XVII, XXII, XXIII, if T^{**} is not closed under $\frac{Q(\varphi)\, Q(\psi)}{Q(\chi)}$ then neither is it closed under $\left(\frac{\varphi\, \psi}{\chi}\right)'$.

. . . (C)

Combining results (B) and (C) it follows, using Lemma 2.1 (ii), (α), (β), (θ), the deletion conditions and Lemma 2.2, that if we can prove that T^{**} is closed under rules I′, III, IX, XI, XII′, XIII, XVIII, XIX and XXI, these rules not being written as closed rules but the prime having the same significance as previously, then T^{**} contains all the axioms of N_1 except possibly axioms 11 and 13 and is closed under all the rules of N_1 except possibly XIV—XVII, XXII and XXIII.

The arguments of the corresponding part of the proof of Theorem 3.1 show that T^{**} is closed under each of rules I′, III, IX, XI and XII′ assuming the freedom from contradiction of N_1 in the consideration of XII′. The closure of T^{**} under each of XVIII, XIX and XXI follows from (θ). T^{**} can be shown to be closed under XIII by means of (C), (γ), (η) and Lemma 4.3. [(η) and Lemma 4.3 are required to show that if $X(t)$ is a closed formula in T^{**} and t does not contain any variables then there is a numeral n such that $X(n) \in T^{**}$. It will be remembered that in applications of XIII, t must be free for a in $X(a)$.]

If T^{**} does not contain all cases of axiom 11, then, by (ε), some closed formula of the form $X(0) \,\&\, (a)\,(X(a) \to X(a')) \cdot\!\to X(n_0)$ where n_0 is a numeral is not in T^{**}. By axioms 11 and 13 and rules I, III and XVI, it is in T^* and is thus deleted. By Lemma 2.1 (ii) and (α), $X(0)$ and $(a)\,(X(a) \to X(a'))$ are in T^{**} while $X(n_0)$ is not in T^{**}. By application of (δ) and suitably iterated application of Lemma 2.1 (iii), it follows that $X(n_0)$ is in T^{**}. This contradiction shows that all cases of axiom 11 are in T^{**}.

If some case of axiom 13 is deleted, then from (B) and Lemma 2.1 (ii), there must exist closed formulae $(a)\,X(a)$ in T^{**} and $X(t)$ not in T^{**} where t, being free for a in $X(a)$ contains no free variables. Hence, by Lemma 4.3 and (η), there exists a numeral n_0 such that $X(n_0)$ is not in T^{**}. This is in contradiction with Lemma 4.1 (ii). Hence, T^{**} contains all cases of axiom 13. It will be noticed that since $X(a)$ can begin with a universal quantifier, $X(n_0)$ may not be a particular case of $(a)\,X(a)$. On the other hand, it certainly is one of the formulae mentioned in Lemma 4.1 (ii).

It is now shown that T^{**} is closed under rules XIV—XVII, XXII and XXIII. If it is not closed under one of these rules there must be some application of that rule for which the premises, and therefore all particular cases of them, are in T^{**} while the conclusion, though it is in T^* is not in T^{**}. ... (D)

Consider the rules individually. T^{**} is immediately closed with respect to XIV and XXIII by Lemma 4.2 and (η).

XV: If T^{**} is not closed under XV then, by (D), there exist formulae X and Y such that $Q(X \to Y)$ is in T^{**} and $Q(X) \to Q(Y)$ is deleted. Thus, by Lemma 2.1 (ii), $Q(X)$ is in T^{**} and $Q(Y)$ is not in T^{**}. On the other hand, by Lemma 4.2, $Q(Y)$ is in T^{**}. Contradiction.

XVI: If T^{**} is not closed under XVI, there exist formulae Z and $X(a)$ with a not free in Z such that $Q(Z \to X(a))$ is in T^{**} while $Q(Z \to (a)\,X(a))$ is in T^* but not in T^{**}. This means by (ε), that some particular case $Z^* \to (a)\,X^*(a)$

of the latter formula is not in T^{**} while, by Lemma 4.1 (ii), $(a)\,(Z^* \to X^*(a))$ is in T^{**}. Since T^* is closed under XVI, $Z^* \to (a)\,X^*(a)$ is therefore in T^* and must be deleted. Hence, by Lemma 2.1 (ii), Z^* is in T^{**} but $(a)\,X^*(a)$ is not in T^{**}. This together with the fact that $(a)\,(Z^* \to X^*(a))$ is in T^{**} is in contradiction with Lemma 4.2.

XVII: From the assumption that T^{**} is not closed under XVII it can be deduced, compare XVI above, that there exist formulae $X^*(a)$, with the only free variable a, and Z^*, which is closed, such that $(a)\,(X^*(a) \to Z^*)$ is in T^{**} while $(Ea)\,X^*(a) \to Z^*$ is deleted. Hence, by Lemma 2.1 (ii), $(Ea)\,X^*(a)$ is in T^{**} and therefore, by γ, there exists a numeral n_0 such that $X^*(n_0)$ is in T^{**}. By Lemma 4.1 (ii), $X^*(n_0) \to Z^*$ is in T^{**}. Hence, by Lemma 2.1 (iii) so is Z^*. This contradicts Lemma 2.1 (ii) and the deletion of $(Ea)\,X^*(a) \to Z^*$.

XXII: If T^{**} is not closed under this rule, then, by (D), there exists a formula $X(a)$ and a term t free for a in $X(a)$ such that $Q(X(a))$ is in T^{**} while $Q(X(t))$ is deleted. This means, by (ε), that some particular case of $Q(X(t))$ is not in T^{**}. Suppose $X(a)$ is of the form

$$(a_1) \ldots (a_k)\; Y(a_1, \ldots, a_k, a, b_1, \ldots, b_r)$$

where $k \geqq 0$, $r \geqq 0$, Y does not begin with a universal quantifier and all the free variables present are shown. Then $Q(X(t))$ is $Q((a_1) \ldots (a_k)\; Y(a_1, \ldots, a_k, t, b_1, \ldots, b_r))$ where the occurrences of the variables of t introduced into $X(a)$ when $X(t)$ is formed, are not bound in $X(t)$. Some of $a, b_1, \ldots, b_r$ may occur as (free) variables of t. Suppose a particular case of $Q(X(t))$ which is not in T^{**} is $Y(n_1, \ldots, n_k, t^*, m_1, \ldots, m_r)$ where $n_1, \ldots, n_k$ and $m_1, \ldots, m_r$ are numerals and t^* is obtained from t for inserting numerals for its free variables, the given numerals for the variables $b_1, \ldots, b_r$ should any of these variables occur in t. Since t is free for a in $X(a)$, t^* can contain no variables. By Lemma 4.3 and (η) there exists a numeral n_0 such that $Y(n_1, \ldots, n_k, n_0, m_1, \ldots, m_r)$ is not in T^{**}. This formula is a particular case of $Q(X(a))$, namely, the case in which $a_1, \ldots, a_k, a, b_1, \ldots, b_r$ are replaced by $n_1, \ldots, n_k, n_0, m_1, \ldots, m_r$ respectively. This contradicts (δ) and the fact that $Q(X(a))$ is in T^{**}.

On the assumption that N_1 is free from contradiction it has been shown that T^{**} contains all the axioms of N_1 and is closed under the rules of N_1. Hence T^{**} both contains and is contained in T^*. Thus the sets T^* and T^{**} are identical and the proof of Lemma 4.4 is completed.

From Lemma 4.4 and Lemma 2.1 (iii) the following result can be deduced:

Lemma 4.5. *If* N_1 *is free from contradiction then the set of provable formulae of* N_1 *is closed under* R 1.

Using Lemma 4.5 we shall prove:

Theorem 4.1. *If* N_1, *or* N, *is free from contradiction, the set of closed provable formulae of* N *is identical with the set of provable formulae of* N_1.

Proof. We know that any formula provable in N_1 is closed. We now show that any formula provable in N_1 is provable in N. We notice that $\dfrac{X(a)}{(a)\,X(a)}$ is a derived rule of N, for, if Y is a provable formula of N which does not

involve a the following is a proof of $(a)\,X(a)$ from $X(a)$ in $\mathbf{N}$:

$$\cfrac{Y \quad \cfrac{\cfrac{X(a)}{Y \to X(a)}\ \text{R 1, ax. 1}}{Y \to (a)\,X(a)}\ \text{R 2}}{(a)\,X(a)}\ \text{R 1} \qquad \ldots (\mathrm{E})$$

From (E) it can easily be seen that all the axioms of $\mathbf{N}_1$ are provable in $\mathbf{N}$ and also that all the rules of $\mathbf{N}_1$, except possibly XV and XXIII, are derived rules of $\mathbf{N}$. For example, see rule V, if any particular forms of $Q(X)$, $Q(Y)$ are provable in $\mathbf{N}$ then any particular form of $Q(X \,\&\, Y)$ can be obtained in $\mathbf{N}$ as follows, detailed references to the fact that some axioms or rules are used repeatedly being omitted:

$$\cfrac{\cfrac{\text{R 1, ax. 13}\ \cfrac{Q(X)}{X} \quad \cfrac{Q(Y)}{Y}\ \text{R 1, ax. 13}}{X \,\&\, Y}\ \text{ax. 3, R 1}}{Q(X \,\&\, Y)}\ (\mathrm{E})$$

From axioms 1 and 2 and rule R 1, it can be deduced that $\dfrac{X \to Y \quad Y \to Z}{X \to Z}$ is a derived rule of $\mathbf{N}$. Hence, using axiom 13 it can be shown that if X is not closed, $Q(X) \to X$ is provable in $\mathbf{N}$. Rule XV can thus be shown to be a derived rule of $\mathbf{N}$, if X is not closed as follows:

$$\cfrac{\cfrac{\text{as above}\ \ Q(X) \to X \quad \cfrac{Q(X \to Y)}{X \to Y}\ \text{ax. 13, R 1}}{Q(X) \to Y}\ \text{as above}}{Q(X) \to Q(Y)}\ \text{R 2}$$

If X is closed there exists a shorter proof of $Q(X) \to Q(Y)$ from $Q(X \to Y)$ since $Q(X) \to Y$ is then the same as $X \to Y$. Rule XXIII can be seen to be a derived rule of $\mathbf{N}$ by application of Theorem 24 b in [6] (page 184). A particular case of this theorem states that under suitable conditions, here trivially satisfied, replacement of terms provably equal to each other can be made in a provable formula without altering the provability of the formula. From these results it follows that every formula provable in $\mathbf{N}_1$ is provable in $\mathbf{N}$ and hence that if $\mathbf{N}$ is free from contradiction so is $\mathbf{N}_1$.

It is now sufficient to show, on the assumption that $\mathbf{N}_1$ is free from contradiction, that any closed formula provable in $\mathbf{N}$ is provable in $\mathbf{N}_1$. Suppose X is closed and provable in $\mathbf{N}$. It is then its own closed form. It is sufficient to follow a proof of X in $\mathbf{N}$ and to show that at each stage one, and therefore all, of the closed forms of the formulae concerned are provable. Since the closures of the axioms of $\mathbf{N}$ are in $\mathbf{N}_1$, the proof may be completed by showing that the closed forms of the rules of $\mathbf{N}$ are rules or derived rules of $\mathbf{N}_1$. Rules XVI and XVII of $\mathbf{N}_1$ cover R 2 and R 3 of $\mathbf{N}$. R 1 is covered by the scheme:

$$\cfrac{Q(X) \quad \cfrac{Q(X \to Y)}{Q(X) \to Q(Y)}\ \text{XV}}{Q(Y)}\ \text{R 1 (Use Lemma 4.5)}$$

where the particular cases of $Q(X)$ and $Q(Y)$ chosen for the conclusion of the application of XV are those which correspond to the given provable case of

$Q(X)$ and the desired provable case of $Q(Y)$. This completes the proof of the theorem.

From Theorem 4.1, results (α), (β), (γ) and (δ) in the proof of Lemma 4.4, and the fact that if N is not free from contradiction then every formula is provable in it, a consequence of axiom 10 and rule R 1, we may now deduce:

Theorem 4.2 (i) *A closed formula of the form X & Y is provable in* N *if and only if X and Y are both provable in* N.

(ii) *A closed formula of the form $X \vee Y$ is provable in* N *if and only if at least one of X, Y is provable in* N.

(iii) *A closed formula of the form $(Ea)\,X(a)$ is provable in* N *if and only if there exists at least one numeral n_0 such that $X(n_0)$ is provable in* N.

(iv) *If a closed formula X is provable in* N *then all particular cases of X are provable in* N.

(Theorem 4.2 parts (i) and (iv) are results easily obtainable by direct methods without the use of Theorem 4.1.)

The freedom for contradiction of N can be deduced from the freedom from contradiction of a corresponding classical number theory since such a theory would contain as provable formulae the provable formulae of N. On the other hand Theorem 4.2 has been expressed in a form which does not require the knowledge of such a proof of freedom from contradiction. It will be further noticed that, on the assumption of the freedom from contradiction of N, Theorem 4.2 (ii) cannot be strengthened to the form that a disjunction is provable in N if and only if at least one of its disjunctands is provable in N, since, for example, under these circumstances, $a = 0 \vee (Eb)\,(a = b')$ is provable (see [6], formula *137, p. 187), though neither disjunctand is provable. (If either of the disjunctands was provable a contradiction could easily be obtained.)

The method used in this paper cannot directly be applied to the study of the intuitionistic predicate calculus **Pr**. An easy modification of it can, however, be used. Let $X(a_1, \ldots, a_n)$ be a formula of **Pr** which contains the free individual variables $a_1, \ldots, a_n$ but no other free individual variables. This formula, if it is in the appropriate set T^* must be deleted by $\mathfrak{P}$ if not all of $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ for variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ which are not all distinct are in S_X. It may otherwise be deleted for reasons dependent on the structure of X. Thus, for example, if X is of the form $Y \to Z$ it is retained on consideration if and only if all the above formulae are in S_X and also it is not the case that Y is in S_X and Z not in S_X. Lemma 2.1 parts (i) and (iii) remain true. Lemma 2.2 considered in the context in which it is really required, that is, applied to axiom schemes and rules rather than individual formulae is valid though its proof requires modification. It is possible to prove that a disjunction is provable in **Pr** if and only if at least one of its disjunctands is provable and that a formula of the form $(Ea)\,X(a)$ is provable if and only if $X(\alpha)$ is provable for some variable α. These results are weaker than those obtained by Schütte in that, for example no primitive recursive method is found which enables a proof of a disjunctand of a provable disjunction to be obtained from a proof

of the disjunction in **Pr**. (In the associated calculus $\mathbf{Pr}_1$, a disjunction can only be proved through a proof of a disjunctand.)

The methods used in this paper are applicable in certain other similar situations. For example, alternative proofs can be obtained for Theorems 1 and 12 of [4] in this way. It is a consequence of Theorem 4.2 that if a closed formula of the form $(a)\,(Eb)\,A\,(a,b)$ is provable in **N** then for each numeral n there is a least numeral $f(n)$ such that $A\,(n, f(n))$ is provable in **N**. It would be interesting to see if the methods could be extended to investigate the arithmetical form of $f(n)$.

References

[1] Curry, H. B.: On the use of dots as brackets in logical expressions. J. Symbolic Logic **2**, 26—28 (1937). — [2] Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schließen. Math. Z. **39**, 176—210, 405—431 (1934—1935). — [3] Gödel, K.: Zum Intuitionistischen Aussagenkalkül. Erg. math. Kolloq. **4**, 40 (1933). — [4] Harrop, R.: An investigation of the propositional calculus used in a particular system of logic. Proc. Cambridge Phil. Soc. **50**, 495—512 (1954). — [5] Kemeny, J. G.: Models of logical systems. J. Symbolic Logic **13**, 16—30 (1948). — [6] Kleene, S. C.: Introduction to Metamathematics: Amsterdam (1952). — [7] McKinsey, J. C. C., and A. Tarski: Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting: J. Symbolic Logic **13**, 1—15 (1948). — [8] Rasiowa, H.: Algebraic models of axiomatic theories. Fund. Math. **41**, 291—310 (1955). — [9] Rasiowa, H., and R. Sikorski: On existential theorems in non-classical functional calculi. Fund. Math. **41**, 21—28 (1954). — [10] Rieger, L.: On the lattice theory of Brouwerian propositional logic. Spisy. vyd. prirod. fak. Univ. Karlovy **189**, 1—40 (1949). [11] Schütte, K.: Schlußweisen-Kalküle der Prädikatenlogik. Math. Ann. **122**, 47—65 (1950). — [12] Wajsberg, M.: Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting. Wiad. mat. **46**, 45—101 (1938).

(Eingegangen am 25. Mai 1956)

Ostrowski, A.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 362—372 (1956)

Über die Darstellung von symmetrischen Funktionen durch Potenzsummen

Von

Alexander Ostrowski in Basel

I

Setzen wir

$$s_\nu = x_1^\nu + \cdots + x_n^\nu \tag{1}$$

und bezeichnen mit e_ν allgemein die ν-te elementarsymmetrische Funktion der Größen $x_1, \ldots, x_n$,

$$e_\nu = \Sigma\, x_1 \cdots x_\nu\,, \tag{2}$$

so lassen sich bekanntlich die e_ν als Polynome in $s_1, \ldots, s_n$ darstellen:

$$e_\nu = \Sigma\, A_{m_1,\ldots,m_n} s_1^{m_1} \cdots s_n^{m_n}. \tag{3}$$

Hier gilt für jeden Term rechts die durch Dimensionsvergleich sofort zu erhaltende Isobaritätsrelation

$$m_1 + 2\,m_2 + 3\,m_3 + \cdots + n\,m_n = \nu\,. \tag{4}$$

Daraus folgt aber, daß der Gesamtkoeffizient bei x_1^ν rechts in (3) gleich ist der Summe aller Koeffizienten A, und wir sehen, daß *für* $\nu > 1$ *die Koeffizientensumme* $\Sigma\, A_{m_1,\ldots,m_n}$ *in der Darstellung* (3) *den Wert* 0 *hat.* Darüber hinaus gilt die folgende elementare und sehr nützliche, aber anscheinend noch nicht hervorgehobene Tatsache, auf die ich gelegentlich einer Untersuchung über die Stetigkeit von Wurzeln analytischer Gleichungen gestoßen bin:

Satz 1. *Für* $\nu \geqq 1$ *hat die Summe der absoluten Beträge der Koeffizienten in* (3), $\Sigma\, |A_{m_1,\ldots,m_n}|$, *den Wert* 1.

Wohl der kürzeste *Beweis* dieses Satzes ergibt sich aus der für hinreichend kleine $|z|$ geltenden Relation

$$1 - e_1 z + e_2 z^2 - \cdots + (-1)^\varkappa e_\varkappa z^\varkappa + \cdots = e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{s_\nu z^\nu}{\nu}}, \tag{5}$$

die sofort folgt, wenn man einerseits das Produkt $\prod\limits_{\nu=1}^{n} (1 - x_\nu z)$ direkt ausmultipliziert und andererseits die Summe der Entwicklungen der Logarithmen der einzelnen Faktoren bildet.

Um die Summe der absoluten Beträge in (3) zu ermitteln, setze man dort für jedes ν, $s_\nu = -t_\nu$. Dann erhält man aus (3) für jedes $e_\varkappa$ die Gleichung

$$(-1)^\varkappa e_\varkappa = \Sigma \pm A_{m_1,\ldots,m_n} t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}.$$

Andererseits wird dann die rechte Seite von (5) zu $e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{t_\nu z^\nu}{\nu}}$, so daß dabei der Entwicklungskoeffizient bei jeder Potenz von z zu einem Polynom in den $t_\varkappa$ mit *positiven* Koeffizienten wird. Man kann daher schreiben

$$(-1)^\varkappa e_\varkappa = \Sigma \, |A_{m_1,\ldots,m_n}| \, t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}.$$

Setzt man hier für alle t_ν den Wert 1 ein, so erhält man die Summe der absoluten Beträge der Koeffizienten. Dann ergibt sich aber aus der rechten Seite von (5):

$$e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}} = \frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu,$$

und wir sehen, daß $(-1)^\varkappa e_\varkappa$ für jedes $\varkappa > 0$ zu 1 wird. Damit ist der Satz 1 bewiesen. — Ein „rein algebraischer" Beweis ergibt sich im folgenden durch Spezialisierung des Satzes 4.

Die oben angegebenen Tatsachen lassen sich auch auf die Darstellung einer beliebigen symmetrischen Funktionstype $\Sigma x_1^{p_1} \cdots x_r^{p_r}$ durch die Potenzsummen übertragen (Satz 4 im Abschnitt V).

Wie jedes symmetrische Polynom, lassen sich auch die Potenzsummen

$$s_p = \Sigma x_1^p$$

durch die e_μ darstellen:

$$s_\nu = \Sigma D_{m_1,\ldots,m_n} e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

In diesem Falle läßt sich ein Ausdruck für die Summe aller Koeffizienten, $\Sigma D_{m_1,\ldots,m_n}$, durch die Spezialisierung eines allgemeinen Satzes von Faà di Bruno[1]) erhalten, der für die Darstellung einer beliebigen symmetrischen Funktionstype gilt. Man erhält dann

$$\Sigma D_{m_1,\ldots,m_n} = (-1)^{\nu+1} \qquad (n \geqq \nu); \tag{7}$$

allerdings, wie in der Formel (7) bereits vorgemerkt, ist die allgemeine Formel von Faà di Bruno unter der Annahme hergeleitet worden, daß n groß genug ist, im Falle der Formel (7), daß $\nu \leqq n$ ist. Man kann nun einerseits den Wert der Summe in (7) auch für $\nu > n$ ermitteln, andererseits läßt sich für die Darstellung (6) auch die Summe der absoluten Beträge der Koeffizienten D errechnen. Sie ergibt sich für $n \geqq \nu$ zu $2^\nu - 1$, während im Falle $\nu > n$ sich ein etwas komplizierter Ausdruck ergibt (Satz 6 in Abschnitt VI).

[1]) Vgl. [7], p. 12. Die Zitate beziehen sich auf das am Schlusse dieser Mitteilung beigegebene Literaturverzeichnis.

Um den Satz 1 auf die Darstellung einer allgemeinen symmetrischen Funktionstype $\Sigma x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}$ durch die Potenzsummen zu übertragen, kann man von der expliziten Formel für diese Darstellung Gebrauch machen, die auf WARING zurückgeht[2]). Allerdings läßt sich diese Formel nur sehr schwer im Rahmen der gebräuchlichen Indizessymbolik darstellen, und es ist um so mehr zu bewundern, daß WARING, der weder Summenzeichen noch Indizes benutzte, diese Formel hergeleitet und in aller Ausführlichkeit beschrieben hat. Um den Darstellungsschwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, hat FAÀ DI BRUNO den Waringschen Ausdruck durch eine symbolisch aufzufassende Determinante darzustellen versucht:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} s_{p_1} & s_{(p_1)} & s_{(p_1)} & \cdots \\ s_{(p_2)} & s_{p_2} & s_{(p_2)} & \cdots \\ s_{(p_3)} & s_{(p_3)} & s_{p_3} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix},$$

mit der Vorschrift, daß nach dem Ausrechnen der Determinante die symbolischen Produkte $s_{(p_1)} s_{(p_2)} \ldots$ in $s_{p_1 + p_2 + \cdots}$ zu verwandeln sind.

Es ist sofort klar, daß die Faà di Brunosche Determinante nicht den gesuchten Ausdruck im allgemeinsten Falle liefern kann, da ja z. B. ein Produkt von der Gestalt $s_{p_1 + p_2} s_{p_3 + p_4}$ nach der Faà di Brunoschen Vorschrift niemals herauskommen kann, während solche Produkte für $k = 4$ tatsächlich vorkommen[3]). Man kann aber eine anders aufzufassende symbolische Determinante aufstellen, die in der Tat den in Frage kommenden Ausdruck übersichtlich zusammenfaßt (Satz 3 in Abschnitt IV). Allerdings geht dann die Vorschrift über die Addition der Indizes wesentlich tiefer als beim Faà di Brunoschen Versuch; man hat sich dabei nämlich nach der Zerlegung der dem allgemeinen Determinantenglied entsprechenden Permutation in elementenfremde Zyklen zu richten.

Diese Darstellung erscheint zwar zuerst recht umständlich, stellt sich aber dennoch als sehr brauchbar heraus. Der Beweis dieser Determinantendarstellung ist relativ einfach, die allgemeine Formel (Satz 5 im Abschnitt V) in der entwickelten Gestalt läßt sich aus ihr sehr kurz herleiten und die Sätze über die Summe der Koeffizienten und der absoluten Beträge der Koeffizienten ergeben sich aus ihr fast unmittelbar.

Als eine Hilfsformel zum Beweis unserer Determinantendarstellung leiten wir mit dem Satz 2 im Abschnitt III eine rekurrente Relation her, die zwar

---

[2]) Vgl. [16], pp. 8—13, wo allerdings das Resultat ohne Beweis steht. Der erste Beweis scheint von M. HIRSCH [11a], pp. 33—55, gegeben worden zu sein, sodann in modernerer Form von SERRET [15], pp. 447—453. Vgl. hierzu auch AURIC [1] sowie FAÀ DI BRUNO [7], pp. 6—8. Diese Beweise bedürfen allerdings alle in einem bestimmten Punkte einer Präzisierung, da die Verfasser mit dem Fall, daß einige der Exponenten p_ν zusammenfallen können, beim Induktionsschluß vermöge der Rekursions-Formel (12) dieser Abhandlung eigentlich nicht fertig werden.

[3]) Diese bei FAÀ DI BRUNO [7], pp. 8—9 gegebene Determinante ist dann auch, soviel ich weiß, nur bei VAHLEN [18], p. 452 und LOEWY [20], p. 220 wiedergegeben worden, offenbar ohne weitere Prüfung.

im Prinzip bekannt ist, indessen in den meisten mir bekannten Darstellungen des letzten Jahrhunderts, in denen sie angegeben wird, mit falschen Koeffizienten erscheint[4]). An den zitierten Stellen (bis auf M. HIRSCH [11 a] und ETTINGSHAUSEN [6]) wird nämlich der Fall, daß in $\Sigma\, x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}$ nicht alle Exponenten untereinander verschieden sind, als gleichberechtigt mit dem Fall von lauter verschiedenen Exponenten angesehen, und es wird versucht, eine allgemeingültige Formel für alle Fälle aufzustellen, wobei die notwendige Korrektur allein durch Hinzufügung eines geeigneten Gesamtfaktors zu bewerkstelligen wäre. Da aber im Falle nicht lauter verschiedener $p_\varkappa$ die Funktionstype, wie sie z. B. CAYLEY[5]) betrachtet, sich nicht durch reine Spezialisierung ergibt, lassen sich so allgemeine Formeln nicht erhalten. Wir verwenden daher, um unseren Überlegungen die nötige Allgemeinheit zu geben, neben den Cayleyschen Funktionstypen $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ die „nichtreduzierten Funktionstypen" $[p_1, p_2, \ldots, p_k]$ (vgl. den Abschnitt II), die auch im Falle des Zusammenfallens einiger $p_\varkappa$ sich durch direkte Spezialisierung ergeben und die Aufstellung von in jedem Falle gültigen Formeln gestatten.

Es ist bei einer so elementaren Aussage wie der des Satzes 1 natürlich unmöglich, alle Stellen in der mathematischen Literatur zu überprüfen, in denen dieser Satz vorkommen könnte, oder auch nur alle Lehrbücher der Algebra und alle die zahlreichen Programmschriften, in denen die Theorie der symmetrischen Funktionen als ein beliebtes Thema bearbeitet wurde. Immerhin findet sich der Satz 1 nicht in den bekannteren Lehrbüchern der Algebra, wie denjenigen von PERRON, BIEBERBACH-BAUER, HAUPT, FRICKE-WEBER, WEBER, NETTO, SERRET, CHRISTAL, CESARO, REY PASTOR. Ebensowenig findet er sich in den Spezialwerken von M. HIRSCH, ETTINGSHAUSEN, FIEDLER und FAÀ DI BRUNO, von denen namentlich das letztere recht ausführlich die Theorie der symmetrischen Funktionen behandelt. Auch in dem Vahlenschen Enzyklopädieartikel, im Loewyschen Artikel in Pascals Repertorium sowie in den beiden Artikeln von NICOLETTI in der Enciclopedia delle Matematiche elementari findet sich der Satz nicht.

II

Im folgenden sollen die Summen s_p für „beliebige" p behandelt werden. Es genügt natürlich zur Herleitung der Identitäten die Indizes-Exponenten p und die x_ν als *reelle positive* Zahlen vorauszusetzen.

Wir definieren das Symbol $[p_1, \ldots, p_r]$, die „nichtreduzierte Funktionstype",

$$[p_1, \ldots, p_r] = \Sigma\, x_1^{p_1} \cdots x_r^{p_r}, \tag{9}$$

---

[4]) Vgl. HAGEN [10], p. 203; SERRET [15], p. 442; FAÀ DI BRUNO [7], p. 6; NETTO [12], p. 103. Auch ETTINGSHAUSEN, der sich mit dieser Formel sorgfältiger auseinandersetzt, wird damit nicht vollständig fertig. Nur bei M. HIRSCH wird der betreffende Fall vollständig korrekt behandelt.

[5]) Vgl. CAYLEY [3], pp. 417—418.

als die Summe aller Terme, die aus dem angeschriebenen entstehen, wenn die Variablenfolge $x_1, x_2, \ldots, x_r$ durch jede andere Variation der $x_1, \ldots, x_n$ zur r-ten Klasse, $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_r}$ ersetzt wird. Dabei werden also zwei solche Variationen auch dann als *verschieden* angesehen, wenn sie Permutationen voneinander sind. Die Anzahl der Terme in $[p_1, \ldots, p_r]$, d. h. die Koeffizientensumme, ist also stets $n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Unter $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ verstehen wir (mit Cayley) für gegebene Werte der p_ν die Summe der *untereinander verschiedenen Terme* von $[p_1, \ldots, p_r]$; dies ist eine „reduzierte Funktionstype".

Offenbar sind für „unbestimmte" $p_1, \ldots, p_r$ alle Terme in $[p_1, \ldots, p_r]$ untereinander verschieden. Es mögen nun unter den $p_1, \ldots, p_r$, k_1 denselben Wert p' haben, k_2 denselben Wert $p'' \neq p', \ldots, k_i$ denselben Wert $p^{(i)}$, der von $p', \ldots, p^{(i-1)}$ verschieden ist, so daß man

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_i = r$$

hat. Wir nennen die Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_i$ die zu $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ gehörenden *Inzidenzzahlen*. Dann werden in $[p_1, \ldots, p_r]$ jeweils $k_1!\, k_2! \ldots k_i!$ Terme einander gleich, und man hat

$$[p_1, \ldots, p_r] = k_1!\, k_2! \cdots k_i!\, (p_1, p_2, \ldots, p_r)\,. \tag{10}$$

Unsere Resultate gelten im allgemeinen für „unbestimmte" $p_1, \ldots, p_r$, die man aber natürlich als etwa positive Zahlen annehmen kann und sogar als linear unabhängig in bezug auf den rationalen Koeffizientenkörper. Ebenso dürfen die x_ν als positiv vorausgesetzt werden.

Die in den folgenden Abschnitten III–V betrachteten Formeln gelten *unabhängig von n*, so daß man bei der ganzen Diskussion n beliebig groß annehmen kann. Ist dann eine Formel hergeleitet, so gilt sie natürlich auch für kleinere Werte von n. Man sieht dies ein z. B., wenn alle $p_\nu > 0$ sind, indem man alle weiteren x_ν mit $\nu > n$ gleich 0 setzt. Natürlich muß bei der Betrachtung von $[p_1, \ldots, p_r]$ $n \geqq r$ bleiben, da sonst die Untersuchung gegenstandslos wird. In den eckigen und runden Klammersymbolen darf angenommen werden, daß kein $p_\varrho = 0$ ist.

III

Satz 2. *Es gilt die Relation*

$$\begin{aligned}[p_1, \ldots, p_{k-1}]\, s_{p_k} = [p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k] + [p_1 + p_k, p_2, \ldots, p_{k-1}] + \\ + [p_1, p_2 + p_k, \ldots, p_{k-1}] + \cdots + [p_1, p_2, \ldots, p_{k-1} + p_k].\end{aligned} \tag{11}$$

Beweis. Man betrachte den Term $x_1^{p_1} \cdots x_{k-1}^{p_{k-1}}$ von $[p_1, \ldots, p_{k-1}]$ und multipliziere ihn, wenn $n \geqq k$ vorausgesetzt wird, sukzessive mit den Termen $x_1^{p_k}, x_2^{p_k}, \ldots, x_k^{p_k}$ von s_{p_k}. Damit ergeben sich die folgenden Terme des Aus-

drucks rechts in (11)

$$x_1^{p_1+p_k} x_2^{p_2} \cdots x_{k-1}^{p_{k-1}};\quad x_1^{p_1} x_2^{p_2+p_k} x_3^{p_3} \cdots x_{k-1}^{p_{k-1}};\ \ldots;$$
$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_{k-2}^{p_{k-2}} x_{k-1}^{p_{k-1}+p_k};\quad x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_{k-1}^{p_{k-1}} x_k^{p_k}.$$

Da das Produkt links in (11) keine negativen Koeffizienten hat, kommen demnach dort sämtliche k symmetrischen Funktionen vor, die rechts in (11) angegeben sind, und zwar jede mit einem ganzen positiven Koeffizienten ≥ 1. Denn man beachte, daß diese k symmetrischen Funktionen wegen der linearen Unabhängigkeit der p_k keine gemeinsame Terme haben. Um daher zu beweisen, daß die Koeffizienten genau den Wert 1 haben, und zugleich, daß damit das Produkt links in (11) erschöpft ist, genügt es zu zeigen, daß die Gesamtzahl der Terme links in (11) genau gleich ist der Gesamtzahl der Terme rechts in (11). Nun haben wir aber links genau $\frac{n \cdot n!}{(n-k+1)!}$ Terme, während der Ausdruck rechts in (11) offenbar

$$\frac{n!}{(n-k)!} + \frac{(k-1)\,n!}{(n-k+1)!} = n\,\frac{n!}{(n-k+1)!}$$

Terme enthält, womit die Formel (11) bewiesen ist.

Wir werden (11) in der Gestalt der folgenden *Rekursionsformel* benutzen:

$$\begin{aligned}
[p_1, \ldots, p_k] = {} & [p_1, \ldots, p_{k-1}]\, s_{p_k} - [p_1 + p_k, p_2, \ldots, p_{k-1}] - \\
& - [p_1, p_2 + p_k, p_3, \ldots, p_{k-1}] - \cdots - [p_1, p_2, \ldots, p_{k-1} + p_k]\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

IV

Satz 3. *Es gilt die symbolische Determinantendarstellung*

$$[p_1, p_2, \ldots, p_k] = \begin{vmatrix} s_1^{(p_1)} & s_2^{(p_1)} & \ldots & s_k^{(p_1)} \\ s_1^{(p_2)} & s_2^{(p_2)} & \ldots & s_k^{(p_2)} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ s_1^{(p_k)} & s_2^{(p_k)} & \ldots & s_k^{(p_k)} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

wo die Determinante rechts im folgenden Sinne aufzufassen ist: Ist ihr allgemeines Glied

$$\pm\, s_1^{(p_{i_1})} \cdots s_k^{(p_{i_k})}$$

und ist

$$P = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_k \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & k \end{pmatrix} = c_1 c_2 \cdots c_z \tag{14}$$

die Zerlegung der entsprechenden Indexpermutation in elementenfremde Zyklen, so sind in allen s-Faktoren, die einem Zyklus entsprechen, die unteren Indizes wegzulassen, die Exponenten zu addieren und die Summe als unteren Index

zu verwenden. So erhält man

$$(15)\qquad [p_1, p_2, \ldots, p_k] = \Sigma\,(-1)^{k-z}\, s_{c_1}\, s_{c_2} \cdots s_{c_z} \equiv [p_1, \ldots, p_k]^*,$$

wo unter $[p_1, \ldots, p_k]^*$ *der Ausdruck von* $[p_1, \ldots, p_k]$ *als ein Polynom in den* s_c *zu verstehen und allgemein*

$$(16)\qquad s_c = s_{p_{j_1} + p_{j_2} + \cdots + p_{j_t}} \quad [c = (j_1, \ldots, j_t)]$$

für den in den eckigen Klammern angegebeyen t-gliedrigen Zyklus c ist.

Beweis. Für $k = 1$ ist der Satz evident, so daß wir beim Beweise von (13) die Behauptung für kleinere Werte von k als richtig annehmen dürfen. Es sei (14) die Zerlegung der dem allgemeinen Glied der rechten Seite von (13) entsprechenden Permutation, wobei wir annehmen dürfen, daß der Index k gerade in c_1 vorkommt. Bilden wir das Aggregat derjenigen Terme rechts in (15), die $c_1 = (k)$ entsprechen, so enthalten sie nach unserer Vorschrift als Faktor s_{p_k}; die übrigbleibende Permutation $P' = c_2 \ldots c_z$ ist aber dann die allgemeinste Permutation aus $k - 1$ Elementen, so daß der Faktor bei s_{p_k} nach der Annahme gerade $[p_1, \ldots, p_{k-1}]$ ist. Daß das Vorzeichen $(-1)^{k-z}$ erhalten bleibt, folgt daraus, daß sowohl k wie z für P' um 1 kleiner sind als für P. Daher liefert das entsprechende Gliederaggregat rechts in (15) gerade den ersten Term rechts in (12).

Ist aber c_1 nicht eingliedrig, so sei j der auf k folgende Index in c_1, und man fasse das Aggregat A_j der Glieder rechts in (15) ins Auge, die einem festen Wert von j aus der Reihe $(1, 2, \ldots, k-1)$ entsprechen. Dann kommt nach unserer Vorschrift p_k in den Indizes der s in A_j stets in der Verbindung $p_k + p_j$ vor, und man erhält das Gliederaggregat A_j, indem man p_k durch 0 und p_j durch $p_k + p_j$ ersetzt. Dabei wird also der Zyklus c_1 so „gekürzt", daß man dort den Index k einfach wegläßt. Dabei bleibt z unverändert, während k um 1 kleiner wird. Die zugehörigen Permutationen durchlaufen nach dieser „Kürzung" die Gesamtheit aller Permutationen aus $k - 1$ Elementen, und das Gliederaggregat A_j wird zum Term $-[p_1, \ldots, p_{j-1}, p_j + p_k, p_{j+1}, \ldots, p_{k-1}]$ rechts in (12). Das Minuszeichen ergibt sich dadurch, daß der Vorzeichenfaktor $(-1)^{k-z}$ sich mit (-1) multipliziert, wenn man k durch $k-1$ ersetzt.

Da demnach die rechten Seiten von (15) und (12) übereinstimmen, ist der Beweis des Satzes 3 erbracht.

V

Offenbar hat der Ausdruck rechts in (15), wie die allgemeine k-gliedrige Determinante, $k!$ Terme mit entsprechendem Vorzeichen. Wir erhalten daher, wenn wir noch (10) berücksichtigen, da sich in (15) keine Terme herausheben können:

Satz 4. *In der Darstellung von* $[p_1, \ldots, p_k]$ *durch Potenzsummen ist für* $k > 1$ *die Summe aller Koeffizienten* $= 0$ *und für* $k \geq 1$ *die Summe ihrer absoluten Beträge* $= k!$. *In der Darstellung von* $(p_1, \ldots, p_k)$ *durch Potenzsummen*

ist für $k > 1$ die Summe aller Koeffizienten $= 0$ und für $k \geqq 1$ die Summe ihrer absoluten Beträge $= \frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_i!}$, wenn $k_1, k_2, \ldots, k_i$ die zu $(p_1, \ldots, p_k)$ gehörenden Inzidenzzahlen sind.

Offenbar hängt nach (16) die zu einem Zyklus c gehörende Potenzsumme s_c nicht eigentlich vom *Zyklus* c ab, sondern nur von der Gesamtheit der zu diesem Zyklus gehörenden $p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_t}$. Da diese p_ν dabei beliebig permutiert werden können, man aber dann stets je t mal denselben Zyklus bekommt, wird also, bei Festhaltung der übrigen Faktoren, der Faktor s_c insgesamt $(t-1)!$ mal herauskommen.

Will man daher rechts in (15) die gleichen Terme zusammenfassen, so gehe man für jedes feste z $(z = 1, 2, \ldots, k)$ aus von einer allgemeinen *Zerfällung* Z der Menge der k Elemente $p_1, \ldots, p_k$ in z elementenfremde Gruppen g_ζ, von denen keine leer ist:

$$\{p_1, \ldots, p_k\} = g_1 + g_2 + \cdots + g_z \qquad (Z). \tag{17}$$

Versteht man dann unter dem Symbol s_g, wo g eine Gruppe der $p_\varkappa$ ist, die Potenzsumme s, deren Index gleich der Summe der in g steckenden $p_\varkappa$ ist, so erhält man den

Satz 5 (*von* Waring). *Es gilt*

$$[p_1, p_2, \ldots, p_k] = \sum_{z=1}^{k} (-1)^{k-z} \sum_{Z} (m_1 - 1)! \cdots (m_z - 1)!\, s_{g_1} s_{g_2} \cdots s_{g_z}, \tag{18}$$

wo Z alle Zerfällungen (17) durchläuft und m_ζ allgemein die Anzahl der Elemente in der Gruppe g_ζ ist.

Es folgt ferner, wenn z. B. $g = \{1, \ldots, i\}$, $s_g = s_{p_1 + p_2 + \cdots + p_i}$ angenommen wird, die Faà di Brunosche Formel[6])

$$\frac{\partial [p_1, \ldots, p_k]^*}{\partial s_g} = (-1)^{i-1} (i-1)!\, [p_{i+1}, \ldots, p_k]^*. \tag{19}$$

Denn werden in (15) nur die Terme beibehalten, die den Permutationen $P = (1, \ldots, i)\, P'$ entsprechen, so tritt neben s_g der Faktor $(i-1)!$ heraus, und da für P' k um i und z um 1 kleiner werden, tritt noch der Faktor $(-1)^{i-1}$ hinzu.

VI

Satz 6. *In der Darstellung* (6) *ist*

$$\Sigma\, D_{m_1, \ldots, m_n} \tag{20}$$

gleich $(-1)^{\nu+1}$, wenn $n+1$ kein Teiler von ν ist, während, wenn $n+1$ ein Teiler von ν ist, (20) *den Wert $(-1)^\nu n$ hat.*

Ferner gilt in (6)

$$\Sigma\, |D_{m_1, \ldots, m_n}| + 1 = \nu \sum_{\varkappa=0}^{\frac{\nu-1}{n}} \frac{(-1)^\varkappa}{\nu - \varkappa n} \binom{\nu - \varkappa n}{\varkappa} 2^{\nu - \varkappa(n+1)}. \tag{21}$$

---

[6]) Vgl. Faà di Bruno [7], p. 10.

Beweis. Wir setzen

$$(22)\qquad a_\nu = (-1)^\nu e_\nu, \quad \alpha_\nu = -a_\nu,$$

wo die a_ν die Koeffizienten der entsprechenden Gleichung sind, unter der Annahme, daß $a_0 = 1$ wird. Da bekanntlich in (6) die Isobaritätsrelation (4) gilt, folgt aus (6)

$$(23)\qquad s_\nu = (-1)^\nu \Sigma D_{m_1,\ldots,m_n} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n}.$$

Nun folgt aus (5) durch Logarithmieren

$$(24)\qquad \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s_\nu z^\nu}{\nu} &= -\lg\,[1 - e_1 z + e_2 z^2 - \cdots + (-1)^n e_n z^n] = \\ &= -\lg\,[1 - (-a_1 z - a_2 z^2 - \cdots - a_n z^n)] = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n)^\mu}{\mu}. \end{aligned}$$

Vergleichen wir in (24) rechts und links die Koeffizienten bei den gleichen Potenzen von z, so folgt

$$(25)\qquad \frac{s_\nu}{\nu} = \Sigma B_{m_1,\ldots,m_n} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} = \Sigma C_{m_1,\ldots,m_n} \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_n^{m_n}.$$

Zugleich folgt aus (24), daß die Koeffizienten $C_{m_1,\ldots,m_n}$ *nicht negativ sind* und daher wegen (22)

$$|B_{m_1,\ldots,m_n}| = C_{m_1,\ldots,m_n}$$

ist. Es gilt daher durch Vergleich mit (23)

$$(26)\qquad D_{m_1,\ldots,m_n} = (-1)^\nu \nu B_{m_1,\ldots,m_n}, \quad |D_{m_1,\ldots,m_n}| = \nu C_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Setzen wir nun in (25) $a_1 = \cdots = a_n = 1$, so geht $\frac{s_\nu}{\nu}$ in die Summe aller $B_{m_1,\ldots,m_n}$ über, andererseits wird dann $\frac{s_\nu}{\nu}$ zum Koeffizienten von z^ν in der Entwicklung von

$$\begin{aligned} -\lg\,(1 + z + \cdots + z^n) &= \lg \frac{1}{1 - z^{n+1}} - \lg \frac{1}{1-z} \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{z^{(n+1)\mu}}{\mu} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu}. \end{aligned}$$

Ist ν durch $n+1$ nicht teilbar, so ergibt sich für $\frac{s_\nu}{\nu}$ der Wert $-\frac{1}{\nu}$. Ist dagegen $n+1$ ein Teiler von ν, so erhalten wir für $\frac{s_\nu}{\nu}$ den Wert $-\frac{1}{\nu} + \frac{n+1}{\nu} = \frac{n}{\nu}$.

Daher ist die Summe der $B_{m_1,\ldots,m_n}$ im ersten Falle $= -\frac{1}{\nu}$ und im zweiten Falle $= \frac{n}{\nu}$. Wegen (26) ergeben sich daraus die im Satze 6 behaupteten Werte für den Ausdruck (20) ohne weiteres.

Setzen wir andererseits in (25) $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, $a_1 = \cdots = a_n = -1$, so wird $\frac{s_\nu}{\nu}$ zur Summe der $C_{m_1,\ldots,m_n}$; andererseits wird dann offenbar $\frac{s_\nu}{\nu}$ zum

Koeffizienten von z^ν in der Entwicklung von

$$-\lg(1 - z - z^2 - \cdots - z^n) = \lg \frac{1}{1 - z(2 - z^n)} - \lg \frac{1}{1-z},$$

d. h. in

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} z^\mu (2 - z^n)^\mu - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}.$$

Zum Koeffizienten von z^ν liefert hier die zweite Summe den Beitrag $-\frac{1}{\nu}$. Von der ersten Summe erhalten wir aber Beiträge zum Koeffizienten von z^ν nur für $\mu = \nu - \varkappa n$, ($\varkappa = 0, 1, \ldots$), und zwar entspricht dem allgemeinen $\varkappa$ der Beitrag

$$\frac{(-1)^\varkappa}{\nu - \varkappa n} \binom{\nu - \varkappa n}{\varkappa} 2^{\nu - \varkappa(n+1)}.$$

Daher ergibt sich schließlich als Koeffizient bei z^ν der Ausdruck

$$-\frac{1}{\nu} + \sum_{\varkappa=0}^{\frac{\nu-1}{n}} \frac{(-1)^\varkappa}{\nu - \varkappa n} \binom{\nu - \varkappa n}{\varkappa} 2^{\nu - \varkappa(n+1)},$$

und dies ist also der Ausdruck für die Summe aller $C_{m_1, \ldots, m_n}$. Wegen (26) ergibt sich aber daraus die Formel (21), und der Satz 6 ist bewiesen.

Die Benutzung des Satzes 6 gibt für ein gegebenes ν im allgemeinen 2ν lineare Beziehungen zwischen den Koeffizienten, da man dabei n von 1 bis ν laufen lassen kann. Man betrachte z. B. die Darstellung von s_4, die „vollständig“ wird, sobald $n \geqq 4$ ist:

$$s_4 = e_1^4 - 4 e_1^2 e_2 + 4 e_1 e_3 + 2 e_2^2 - 4 e_4 \qquad (\nu = n = 4). \tag{27}$$

Hier erhält man aus dem Satze 6 die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerte

n	ΣD	$\Sigma \lvert D \rvert$
4	-1	15
3	3	11
2	-1	7
1	1	1

Andererseits erhält man die Darstellung von s_4 für kleinere Werte von n, indem man in (27) die $e_\varkappa$ mit $\varkappa > n$ durch Nullen ersetzt. So ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} &(n = 3) && e_1^4 - 4 e_1^2 e_2 + 4 e_1 e_3 + 2 e_2^2, \\ &(n = 2) && e_1^4 - 4 e_1^2 e_2 + 2 e_2^2, \\ &(n = 1) && e_1^4, \end{aligned}$$

an denen das Zutreffen der in der Tabelle angegebenen Werte ohne weiteres zu konstatieren ist.

Literatur

[1] Auric, M.: Formule de Waring. Nouv. Ann. de Math. (3), 9, 561—564 (1890). — [2] Bieberbach, L., u. G. Bauer: Vorlesungen über Algebra, 5. Aufl. (1933). — [3] Cayley, A.: A Memoir on the Symmetric Functions of the Roots of an Equation, 1857, Collected math. papers, Vol. II, pp. 417—453. — [4] Cesaro, E., u. G. Kowalewski: Algebraische Analysis, 1904. — [5] Chrystal, G.: Algebra, part I, 6th ed. — [6] Ettingshausen, A. v.: Die combinatorische Analysis. 1826. — [7] Faà di Bruno: Einführung in die Theorie der binären Formen. 1881. — [8] Fiedler, W.: Die Elemente der neueren Geometrie und die Algebra der binären Formen. 1862. — [9] Fricke, R., u. H. Weber: Lehrbuch der Algebra. Bd. 1 (1924). — [10] Hagen, J.: Synopsis der Höheren Mathematik, Bd. 1 (1891). — [11] Haupt, O.: Einführung in die Algebra, Bd. 1 (1929). — [11a] Hirsch, M.: Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Berlin 1809. — [12] Netto, E.: Vorlesungen über Algebra, Bd. 1 (1896). — [13] Perron, O.: Algebra, Bd. 1 (1927). — [14] Pastor, Rey: Lecciones de Algebra, 2. ed. (1937). — [15] Serret, J.: Cours d'Algèbre Supérieure, 2. ed. 1854, pp. 442—451. — [16] Waring, E.: Meditationes Algebraicae, 1782. — [17] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra, Bd. 1, 2. Aufl. 1898. — [18] Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften I¹, Artikel von Vahlen 3b: Rationale Funktionen der Wurzeln, symmetrische und Affektfunktionen. pp. 449—479. — [19] Enciclopedia delle Matematiche elementari. Vol. I, Parte II, 1932, die Artikel von Nicoletti, pp. 155—259. — [20] Pascal, E.: Repertorium der höheren Mathematik, 2. Auflage, Bd. 1, 1. Hälfte, die Artikel von A. Loewy über allgemeine Gruppentheorie und allgemeine Gleichungen. pp. 168—357.

(Eingegangen am 18. Juni 1956)

LAMPRECHT, E.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 373—403 (1957)

Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper. III*)

Von

ERICH LAMPRECHT in Würzburg

1. Problemstellung und Einleitung

In den ersten beiden Teilen dieser Untersuchungen[1]) wurden einem *AF2 A* über k, d. h. einem endlich-algebraischen Funktionenkörper A vom Transzendenzgrad 2 über dem in A algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper k, algebraische Erzeugungen (K_1, K_i) zugeordnet. Eine solche Erzeugung (K_1, K_i) war ein geordnetes Paar verschiedener *TK1*[2]) von A über k, und jeder Erzeugung (K_1, K_i) entsprach eindeutig ein System B_{1i} von Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$ zu diskreten einrangigen Bewertungen von A. B_{1i} entstand, indem zunächst alle Primdivisoren $\mathfrak{p}_1$ des *AF1* K_1 über k bezüglich eines $x_i \in K_i$, $x_i \notin k$ als Funktionalprimdivisoren $\mathfrak{P}'_{1i}$ auf $K_1(x_i)$ fortgesetzt wurden und anschließend alle möglichen Fortsetzungen $\mathfrak{P}_{1i}$ der $\mathfrak{P}'_{1i}$ auf A gebildet wurden (B_{1i} war unabhängig von der Auswahl von $x_i \in K_i$). Die Restklassenkörper $A\mathfrak{P}_{1i}$[3]) sind endlich-erzeugbar und vom Transzendenzgrad 1 über dem Teilkörper $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ und homomorphe Bilder (Konstantenreduktionen) des *AF1* A über K_1; wie sich bei diesen Konstantenreduktionen algebraische und arithmetische Eigenschaften übertragen, wurde in [6c, d] untersucht; $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ ist endlich-algebraisch über dem isomorphen Bild $k\mathfrak{P}_{1i}$ des Konstantenkörpers k.

Dieser Teil III der Untersuchungen schließt unmittelbar an Teil I ([6c]) an, ohne die Ergebnisse von Teil II vorauszusetzen; es sind lediglich einige methodische Parallelen zwischen den Beweisen in 6. und Überlegungen in Teil II vorhanden, und in 7. wird eine Formel aus Teil II zitiert, die jedoch nicht von prinzipieller Bedeutung ist.

Im Abschnitt 2. dieser Note konstruieren wir zunächst durch Schachtelung der Bewertungen $v_{\mathfrak{P}_{1i}}$ zu $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ mit jeweils allen $k\mathfrak{P}_{1i}$ identisch bewertenden Bewertungen des zugehörigen Restklassenkörpers $A\mathfrak{P}_{1i}$ nach dem Schema der allgemeinen Bewertungstheorie ein System *2-rangig diskreter Bewertungen von A*, denen ein Sytem b_{1i} von *Primstellen* $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q})$ (Resthomomorphismen) von A entspricht. b_{1i} hängt nur von der Erzeugung (K_1, K_i) ab und ist so umfassend,

*) Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für Unterstützung bei der Durchführung dieser Untersuchungen zu Dank verpflichtet.

[1]) Vgl. [6c, d]; Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

[2]) Ein *TK1* war als in A enthaltene und in A algebraisch-abgeschlossene Erweiterung des Transzendenzgrades 1 von k erklärt.

[3]) $A\mathfrak{P}_{1i}$ = Restklassenkörper A modulo $\mathfrak{P}_{1i}$; $\xi\mathfrak{P}_{1i}$ = Restklasse ξ mod $\mathfrak{P}_{1i}$.

daß die zugehörigen Bewertungen eine eindeutige Relativarithmetik von A über k beschreiben (Satz 1); es gibt jedoch sehr viele andere Bewertungssysteme (z. B. zu anderen Erzeugungen) mit der gleichen Eigenschaft.

In den anschließenden 3 Abschnitten werden für die Systeme b_{1i} eines *AF2* die Analoga einiger einfacher, aber grundlegender Tatsachen aus der Theorie algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen hergeleitet: Die Werte der 2-rangigen Bewertungen zu b_{1i} lassen sich durch geordnete Paare ganzrationaler Zahlen darstellen, und diese Darstellungen können (vgl. 3.) in Abhängigkeit von K_1 eindeutig normiert werden (was für Anwendungen vorteilhaft ist); jedem $\xi \in A$ entspricht für jedes $\mathfrak{P}_{1i}$ (auch wenn $\xi\mathfrak{P}_{1i} = 0$ oder $= \infty$) ein „Restdivisor" $(\xi\mathfrak{P}_{1i})$ von $A\mathfrak{P}_{1i}$; beim Übergang von b_{1i} zu b_{1j} (Änderung der zweiten Erzeugungskomponente) bleiben für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ Wertnormierung und Restdivisor erhalten (Satz 2). In 4. werden b_{1i}-*Divisoren* eingeführt (Zuordnungen von Bewertungswerten zu den Primstellen, die einer Homogenitätsbedingung und mit Hilfe der Wertnormierungen aus 3. formulierten Endlichkeitsbedingungen genügen), die die b_{1i}-Hauptdivisoren sowie Zähler- und Nennerdivisoren eines Elementes umfassen; falls A über K_1 separabel ist, haben die Restgrade eines Zählerdivisors eine entsprechende Eigenschaft wie der Zählergrad eines Elementes in der Theorie der *AF1* (Satz 3). Für je endlich viele Primstellen von b_{1i} gilt ein Annäherungsunabhängigkeitssatz (Satz 4), falls die Approximationsgüten und die zu approximierenden Elemente der Homogenitätsforderung für b_{1i}-Divisoren entsprechende Bedingung erfüllen.

Die zu b_{1i} und b_{i1} (Vertauschung der Erzeugungskomponenten) gehörigen Bewertungssysteme sind elementfremd (enthalten verschiedene Bewertungen); dafür kann jedoch in 6. eine wesentliche Beziehung zwischen den Restklassenkörpern $A(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q})$ zu $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}) \in b_{1i}$ und $A(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q})$ zu $(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q}) \in b_{i1}$ hergeleitet werden. Jedem Paar $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ von Primdivisoren $\mathfrak{p}_1$ von K_1 und $\mathfrak{p}_i$ von K_i entsprechen eindeutig endlich viele Primstellen von b_{1i} und endlich viele Primstellen von b_{i1}. Von einer Ausnahmemenge abgesehen sind nun die Paare $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ „vertauschungszulässig", d. h. die zugehörigen Restklassenkörper $A(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q})$ bzw. $A(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q})$ stimmen der Anzahl und dem Typus nach überein (Sätze 5 und 6 und Korollare); hierbei sind z. T. Separabilitätsvoraussetzungen (z. B. Vollkommenheit von k) zu machen. Die Bedeutung dieser Überlegungen liegt einerseits in der Annäherung arithmetischer und algebraisch-geometrischer Betrachtungsweisen (die Zuordnung Primstelle-Primdivisorpaar entspricht ungefähr dem Begriff der Fortsetzung einer Spezialisierung), andererseits in ihren Anwendungen (vgl. 7.).

In 7. wird k als Galoisfeld vorausgesetzt. Für die gemäß [6c, d] definierten arithmetischen Zetafunktionen $Z_A(s; K_1, K_i)$ von A zur Erzeugung (K_1, K_i) wird eine zweite Definition angegeben, und die (recht einfachen) analytischen Konvergenzbeweise dieser Produktdarstellungen werden nachgetragen. $Z_A(s; K_1, K_i)$ ist eine in der Halbebene $\Re(s) > 2$ pol- und nullstellenfreie Funktion von s, die durch ein Bewertungssystem von A bestimmt ist, das wegen Satz 1 eine eindeutige Arithmetik von A beschreibt (Satz 7; es werden die Beiträge genügend vieler Bewertungen in der Definition berücksichtigt).

Während eine frühere Transformationsregel (Satz 5 aus [6c]) den Übergang von $Z_A(s; K_1, K_i)$ zu $Z_A(s; K_1, K_j)$ beschrieb, folgt nun aus unserem Satz 6 das Verhalten der Zetafunktion bei Vertauschung der Erzeugungskomponenten. Beides zusammen ergibt den folgenden *Hauptsatz über die Erzeugungsabhängigkeit der Zetafunktionen* (Satz 8): Alle in der offenen Halbebene $\Re(s) > 1$ liegenden Pole und Nullstellen von $Z_A(s; K_1, K_i)$ sind dem Körper A in invarianter Weise zugeordnet, d. h. sind unabhängig von der Auswahl der Erzeugung (K_1, K_i). — Neben der Frage nach einer Verschärfung dieser Invarianzaussage aus Satz 8, nämlich einer Ausdehnung des Invarianzgebietes über die Halbebene $\Re(s) > 1$ hinaus oder der Herleitung einer vollinvarianten Zetafunktion (z. B. durch invariante Auszeichnung einer Erzeugungsklasse), verbleibt das folgende Problem: Kann man ähnlich wie im Fall eines *AF1* über einem Galoisfeld aus den Polen und Nullstellen von $Z_A(s; K_1, K_i)$ in $\Re(s) > 1$ algebraisch-arithmetische Invarianten von A herleiten?

2. Die Primstellensysteme $\mathfrak{b}_{1i}$ eines *AF2*

Es sei (K_1, K_i) eine Erzeugung eines *AF2* A über dem beliebigen Konstantenkörper k und B_{1i} das System der zugehörigen Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$. Mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})$ bezeichnen wir Primdivisoren des Restklassenkörpers $A\mathfrak{P}_{1i}$ zu diskreten 1-rangigen Bewertungen von $A\mathfrak{P}_{1i}$, die $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ und damit auch $k\mathfrak{P}_{1i}$ identisch bewerten[4]). Wir bilden nun die geordneten Paare

$$(2.1)\qquad (\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})),$$

wobei $\mathfrak{P}_{1i}$ Primdivisor aus B_{1i} ist und $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})$ Primdivisor von $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ ist, und nennen diese *Primstellen oder Stellen des AF2 A über k*. Diese Bezeichnungsweise basiert auf folgenden Eigenschaften des Symbols $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q})$:

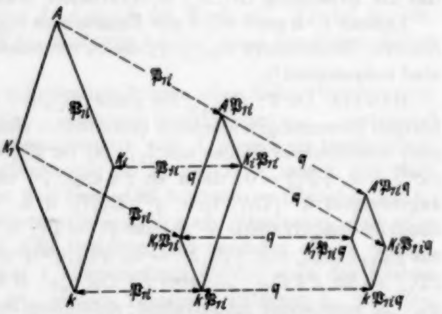


Fig. 1. (—→ homomorphe Abbildungen, ←—→ isomorphe Abbildungen)

Die Hintereinanderausführung der Restabbildungen $A\mathfrak{P}_{1i} = A$ modulo $\mathfrak{P}_{1i}$ und anschließend $A(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}) = A\mathfrak{P}_{1i}\mathfrak{q} = A\mathfrak{P}_{1i}$ modulo $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})$ liefert (vgl. Fig. 1) einen Resthomomorphismus (Spezialisierung, vgl. [8]) von A auf einen über dem isomorphen Bild $k(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q})$ von k endlich-algebraischen Körper

$$(2.2)\qquad A(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}) = A\mathfrak{P}_{1i} \text{ modulo } \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})$$

4) Die Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1i}$ und $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})$ sind von grundsätzlich verschiedener Bedeutung; $\mathfrak{q}$ ist Primdivisor des Restklassenkörpers $A\mathfrak{P}_{1i}$, dieser als algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ aufgefaßt.

und ein Symbol ∞[5]). Der eindeutig bestimmte Körpergrad

$$f_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} = [A(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) : k(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})]$$

werde der *Grad der Stelle* $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$ genannt. Der Spezialisierungsring $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ der Stelle $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$, d. h. die Gesamtheit der $\xi \in A$, für die $\xi(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) \in A(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$ (also $\neq \infty$), ist sogar ein *Bewertungsring*; ist nämlich $\xi \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$, so ist entweder schon $\xi\mathfrak{P}_{1\iota} = \infty$ oder aber $\xi\mathfrak{P}_{1\iota} \neq \infty$ und $\xi(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) = \infty$, d. h. stets ist $\xi^{-1} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$. Nach Konstruktion ist $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ ein 2-rangiger diskreter (spezieller) Bewertungsring von A über k[6]), dem also eindeutig eine Klasse von Relativbewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$ von A über k mit geordneter diskreter abelscher Wertgruppe W vom Rang 2 entspricht. Wie üblich nennen wir Bewertungen *äquivalent* (aus einer Klasse), wenn sie den gleichen Bewertungsring haben; die Wertgruppe werde in unserem Fall additiv geschrieben. Die Stelle $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$ ist also einerseits Repräsentant des obigen Resthomomorphismus, andererseits repräsentiert sie eine Klasse äquivalenter Bewertungen, deren Vertreter $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$ die zu $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$ gehörigen Bewertungen genannt werden.

Definition 1. *Die Gesamtheit $b_{1\iota}$ der Primstellen $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$, wobei $\mathfrak{P}_{1\iota} \in B_{1\iota}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$ Primdivisor des zugehörigen $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1\iota}$ ist, nennen wir das zur Erzeugung (K_1, K_ι) von A über k gehörige Primstellensystem; die Bewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$ mit $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) \in b_{1\iota}$ heißen die zu (K_1, K_ι) gehörigen maximalrangig diskreten Bewertungen von A über k.*

Wir wollen zunächst einige grundlegende Eigenschaften des Systems $b_{1\iota}$, das der Erzeugung (K_1, K_ι) in invarianter Weise zugeordnet ist, herleiten.

Lemma 1. *k wird durch alle Bewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$ mit $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) \in b_{1\iota}$ identisch bewertet; Bewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$, die zu verschiedenen Primstellen aus $b_{1\iota}$ gehören, sind inäquivalent*[7]).

Beweis. Da $k \subset \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ für jedes $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) \in b_{1\iota}$, wird k durch alle zu $b_{1\iota}$ gehörigen Bewertungen identisch bewertet. — Seien jetzt $(\mathfrak{P}_{1\iota}^{(1)}, \mathfrak{q}^{(1)})$ und $(\mathfrak{P}_{1\iota}^{(2)}, \mathfrak{q}^{(2)})$ zwei verschiedene Stellen aus $b_{1\iota}$. (a) Ist $\mathfrak{P}_{1\iota}^{(1)} \neq \mathfrak{P}_{1\iota}^{(2)}$, so gibt es ein $\xi \in A$ mit $\xi\mathfrak{P}_{1\iota}^{(1)} = \infty$, $\xi\mathfrak{P}_{1\iota}^{(2)} = 0$; dann ist $\xi \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(1)},\mathfrak{q}^{(1)}}$ und $\xi \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(2)},\mathfrak{q}^{(2)}}$ (bei beliebigem zugehörigem $\mathfrak{q}^{(1)}(\mathfrak{P}_{1\iota}^{(1)})$ bzw. $\mathfrak{q}^{(2)}(\mathfrak{P}_{1\iota}^{(2)})$), d. h. $w_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(1)},\mathfrak{q}^{(1)}}$ und $w_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(2)},\mathfrak{q}^{(2)}}$ sind zueinander inäquivalent. — (b) Ist $\mathfrak{P}_{1\iota} = \mathfrak{P}_{1\iota}^{(1)} = \mathfrak{P}_{1\iota}^{(2)}$, aber $\mathfrak{q}^{(1)} \neq \mathfrak{q}^{(2)}$, so gibt es ein $\xi\mathfrak{P}_{1\iota} \in A\mathfrak{P}_{1\iota}$ mit $\xi\mathfrak{P}_{1\iota}\mathfrak{q}^{(1)} = \infty$, $\xi\mathfrak{P}_{1\iota}\mathfrak{q}^{(2)} \neq \infty$; ist nun $\xi \in A$ ein Urbild von $\xi\mathfrak{P}_{1\iota}$, so ist $\xi \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}^{(1)}}$, aber $\xi \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}^{(2)}}$, d. h. wiederum sind $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}^{(1)}}$ und $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}^{(2)}}$ zueinander inäquivalent; zusammen ergibt dies Lemma 1.

Lemma 2. *Ist $\xi \in A$, $\xi \notin k$, so ist für unendlich viele*[8]) *Stellen $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) \in b_{1\iota}$*

$$w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) \neq O \qquad \textit{(neutrales Element von } W\textit{)}$$

bei jedem Repräsentanten $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ der zu $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$ gehörigen Bewertungsklasse.

---

[5]) Vgl. [8]; für $\xi \in A$ bezeichne $\xi(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$ das Bild bei diesem Homomorphismus, das entweder in $A(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$ liegt oder ∞ ist.

[6]) Vgl. W. Krull [4a], S. 113 bzw. O. F. G. Schilling [7], S. 17; der Homomorphismus $A(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$ entsteht durch Hintereinanderausführung von 2 Restklassenhomomorphismen zu diskreten 1-rangigen Bewertungen.

[7]) Das heißt, die zugehörigen Bewertungsringe $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(1)},\mathfrak{q}^{(1)}}$ und $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(2)},\mathfrak{q}^{(2)}}$ sind verschieden.

[8]) Die Anzahl dieser $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$ hat sogar die gleiche „Mächtigkeit" wie die der Primdivisoren eines $AF1$ über k.

Beweis. (a) Falls $\xi \in K_1$, aber $\xi \notin k$, so ist $\xi\mathfrak{P}_{1i} = 0$ bzw. $\xi\mathfrak{P}_{1i} = \infty$ für genau endlich viele $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$; folglich ist $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi) \neq O$ für alle zugehörigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})$. Für alle anderen $\mathfrak{P}_{1i}$ ist $\xi\mathfrak{P}_{1i} \neq 0$ aus $K_1\mathfrak{P}_{1i}$, also auch stets $\xi\mathfrak{P}_{1i}\mathfrak{q} \neq 0, \neq \infty$, d. h. $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi) = O$. (b) Falls $\xi \in A$, aber $\xi \notin K_1$, so ist nach Satz 2 aus [6c] $\xi\mathfrak{P}_{1i}$ ein über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ transzendentes Element für fast alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$. Folglich hat $\xi\mathfrak{P}_{1i}$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ bei je endlich vielen zugehörigen $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})$ eine Nullstelle bzw. einen Pol, und somit gibt es zu fast allen $\mathfrak{P}_{1i}$ je endlich viele zugehörige $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})$, so daß $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi) \neq O$, was die Behauptung ergibt.

Fortan sei unter den zu $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q})$ gehörigen Bewertungen eine ausgezeichnet, so daß also jedem $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q})$ genau *eine Bewertung* $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi)$ entspricht; bei additiver Schreibweise lauten dann die Bewertungspostulate

$$(2.3)\quad \begin{aligned} w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi\,\eta) &= w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi) + w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\eta), \\ w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi + \eta) &\geq \mathrm{Min}(w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi), w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\eta)), \end{aligned}$$

wobei das Minimum im Sinne der Ordnung der Wertgruppe W zu verstehen ist. Nach Lemma 1 haben Elemente aus A, die sich nur um einen Faktor $\neq 0$ aus k unterscheiden, wegen (2.3) für alle $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}$ zu $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}) \in b_{1i}$ den gleichen Wert. Ist andererseits für $\xi, \eta \in A$ der Quotient $\frac{\xi}{\eta} \notin k$ und somit transzendent über k, so ist nach Lemma 2 $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \neq O$, d. h. wegen (2.3) $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi) \neq w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\eta)$, für unendlich viele Stellen $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}) \in b_{1i}$. — Zusammen ergibt dies

Satz 1. *Ein Element $\xi \neq 0$ aus A ist durch die Werte $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi)$ bei den Bewertungen aller Stellen $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}) \in b_{1i}$ eindeutig bis auf einen konstanten Faktor aus k bestimmt.*

Wie im Fall eines *AF1* das vollständige System aller Relativbewertungen ist nach Satz 1 das System der zu b_{1i} gehörigen Bewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}$ umfassend genug, um eine eindeutige Relativarithmetik von A über k zu beschreiben; mit diesen Überlegungen sind gleichzeitig die Fragen 1., 2. und 3. aus [6a], (4.2, S. 71) für den allgemeinsten Fall eines *AF2* bewiesen. — Daneben hat b_{1i} mit dem System aller Primdivisoren eines *AF1* noch gemeinsam, daß seine sinngemäße Einschränkung auf *AF1* (beachte, daß zunächst ein in A algebraisch-abgeschlossener *AF1* über k ausgezeichnet wurde) eben das System aller Primdivisoren eines *AF1* ist; weitere Parallelen zwischen b_{1i} und dem System aller Primdivisoren eines *AF1* werden wir in den nächsten Abschnitten feststellen.

Das System b_{1i} und damit auch das System der zugehörigen Bewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}$ entspricht eindeutig der Erzeugung (K_1, K_i) von A über k, ändert sich also im Sinne von [6c] nicht bei denjenigen birationalen Transformationen von A, die die Erzeugung invariant lassen. Aus diesem Grunde gibt es auch sehr viele zu b_{1i} gleichwertige Systeme, nämlich zu jeder Erzeugung (K_1, K_i) eines. — Beim Übergang von b_{1i} zu b_{1j} z. B. (Ersetzung der zweiten Erzeugungskomponente K_i durch K_j) ändern sich zwar unendlich viele 2-rangige Bewertungen, der größere Teil bleibt jedoch erhalten: für die endlich vielen $\mathfrak{P}_{1i} \in S_{1i}(K_j)$ (vgl. Satz 3 aus [6c]) und jeweils alle zugehörigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})$ sind

die $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}$ durch andere Bewertungen zu ersetzen (die zugehörigen Bewertungsringe sind verschieden). Beim Übergang von b_{1i} zu b_{i1} dagegen (Vertauschung der Erzeugungskomponenten) ändern sich *alle* Bewertungen. Ist nämlich $(\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}) \in b_{1i}$ und $(\mathfrak{P}_{i1},\mathfrak{q}) \in b_{i1}$, so gibt es ein $\xi_1 \in K_1$ mit $\xi_1\mathfrak{P}_{1i} = 0$ und ein $\xi_i \in K_i$ mit $\xi_i\mathfrak{P}_{i1} = \infty$. Folglich ist $(\xi_1\xi_i)\,\mathfrak{P}_{1i} = 0$, d. h. $\xi_1\xi_i \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}$, und $(\xi_1\xi_i)\mathfrak{P}_{i1} = \infty$, d. h. $\xi_1\xi_i \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{i1},\mathfrak{q}}$, was die Behauptung ergibt.

Schließlich gibt es noch wesentlich umfassendere Systeme inäquivalenter diskreter 2-rangiger Bewertungen von A über k als die vom Typus der zu b_{1i} gehörigen. Geht man z. B. vom System aller Primdivisoren $\mathfrak{Q}_i$ des *AF1* A über K_i aus (dieses enthält als Teilsystem B_{1i}), so entspricht den Paaren $(\mathfrak{Q}_i,\mathfrak{q})$, wobei $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{Q}_i)$ alle Primdivisoren von $A\mathfrak{Q}_i$ über $k\mathfrak{Q}_i$ durchläuft, ein System inäquivalenter 2-rangig diskreter Bewertungen von A über k, das die $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}$ zu $(\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}) \in b_{1i}$ enthält und wesentlich umfassender ist. Für eine Relativarithmetik von A über k ist dieses System insofern zu „umfangreich", als das wesentlich kleinere System b_{1i} schon das gleiche leistet.

3. Wertgruppen, normierte Wertdarstellungen, Restdivisoren

Die arithmetische Beschreibung eines Körpers mit einem System $\{w_\nu\}$ inäquivalenter nichtarchimedischer Bewertungen (die zugehörigen Wertgruppen seien mit W_ν bezeichnet; die Bewertungen seien additiv geschrieben) beruht auf dem folgenden *allgemeinen Divisorbegriff*: 1) Ein System von Zuordnungen

$$\text{(3.1)} \qquad \mathfrak{A}:\ \{\alpha_\nu \to w_\nu,\ \alpha_\nu \in W_\nu\},$$

das jeder Bewertung aus w_ν einen Wert α_ν aus der zugehörigen Wertgruppe W_ν zuordnet, nennt man einen Divisor $\mathfrak{A}$, und bei der Festsetzung

$$\text{(3.2)} \qquad \mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}:\ \{\alpha_\nu \pm \beta_\nu \to w_\nu;\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu \in W_\nu\}$$

bilden diese Zuordnungen eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe, die Divisorengruppe. 2) Ist $\xi \neq 0$ ein Element des Körpers, so wird der spezielle Divisor

$$\text{(3.3)} \qquad (\xi):\ \{w_\nu(\xi) \to w_\nu,\ w_\nu(\xi) \in W_\nu\}$$

ein Hauptdivisor genannt, und diese Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe der Divisorengruppe [9]).

Um diesen Divisorbegriff nicht zu weit zu fassen, werden den Zuordnungen (3.1) im allgemeinen noch einschränkende Bedingungen (z. B. Endlichkeitsbedingungen) auferlegt, die einerseits mit der Gruppenoperation der Divisoren und andererseits mit dem Hauptdivisorbegriff verträglich sein müssen. In dem wichtigen Spezialfall aller Relativbewertungen eines *AF1* K über k lautet diese Endlichkeitsbedingung: Für fast alle Bewertungen w_ν soll α_ν das neutrale Element aus W_ν sein. Außerdem werden im Fall eines *AF1* die Wertgruppen W_ν isomorph auf die Additivgruppe Γ^+ der ganzrationalen Zahlen abgebildet (normierte Bewertungen mit kleinstem positivem Betrag 1) und die Divisoren (bei additiver Schreibweise) als endliche Summen von Bewertungen (bzw. den

[9]) Eine Arithmetik des Körpers stützt sich dann auf eine Teilbarkeit der Divisoren.

zugehörigen Primdivisoren) mit ganzrationalen Koeffizienten geschrieben, d. h.

$$\mathfrak{A} = \sum_\nu \alpha_\nu \mathfrak{p}_\nu \qquad \text{(fast alle } \alpha_\nu = 0\text{)}. \tag{3.4}$$

Wir wollen dieses Schema auf einen *AF2* A über k und das zu $b_{1\iota}$ gehörige System der Bewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ anwenden und untersuchen hierzu als Vorbereitung die zur den Bewertung $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ gehörigen Wertgruppen W.

Die zur Bewertung $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$ $((\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) \in b_{1\iota})$ gehörige Wertgruppe W ist eine (additiv geschriebene) geordnete diskrete abelsche Gruppe vom Rang 2; ist O das neutrale Element von W, so heiße $\alpha \in W$ positiv, falls $\alpha > O$. W besitzt (vgl. [4a] bzw. [7]) eine einzige echte isolierte Untergruppe Δ, die eine geordnete diskrete abelsche Gruppe vom Rang 1 ist, d. h. es ist $\Delta \cong \Gamma^+$; die Gesamtheit der positiven $\alpha \in W$ mit $\alpha \notin \Delta$ bildet eine Oberklasse Ω, d. h. mit α gehört auch jedes $\beta \geq \alpha$ zu Ω. Die Körperelemente $\xi \in A$ mit $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) \in \Omega$ bilden ein Primideal (und zwar das minimale Primideal) des Bewertungsrings $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ und sind genau diejenigen Elemente, für die $\xi\mathfrak{P}_{1\iota} = 0$. Folglich ist für $\xi \in A$ $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) \in \Delta$ dann und nur dann, wenn $\xi\mathfrak{P}_{1\iota} \neq 0$, $\neq \infty$ ist, d. h. wenn $\xi\mathfrak{P}_{1\iota}$ ein von 0 verschiedenes Element von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ ist. Ist $\xi \in A$ mit $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) \in \Delta$, so haben wir (bei naheliegender Wertnormierung) die umkehrbar eindeutige Zuordnung

$$w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) \leftrightarrow v_{\mathfrak{q}}(\xi\mathfrak{P}_{1\iota}), \tag{3.5}$$

wobei $v_{\mathfrak{q}}(\xi\mathfrak{P}_{1\iota})$ die zu $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$ gehörige 1-rangig diskrete Bewertung von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ über $k\mathfrak{P}_{1\iota}$ ist, d. h. die Darstellung der Werte aus Δ durch ganzrationale Zahlen kann als Bewertung von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ gedeutet werden.

Die Wertfaktorgruppe $\overline{W} = W/\Delta$ ist wieder eine 1-rangig diskrete geordnete abelsche Gruppe, d. h. isomorph zu Γ^+, und die Restklassen modulo Δ der Werte von $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ können (bei Normierung auf den kleinsten positiven Betrag 1) eineindeutig durch die ganzrationalen Zahlen dargestellt werden. Nach der obigen Bedeutung der Oberklasse Ω haben wir hierbei sogar die eineindeutige Zuordnung

$$v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) \leftrightarrow w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) \bmod \Delta, \tag{3.6}$$

wobei $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi)$ die zu $\mathfrak{P}_{1\iota}$ gehörige einrangig diskrete Bewertung von A ist. Während also den Werten aus Δ eine Bewertung des Restklassenkörpers $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ entspricht, liefern die Wertrestklassen mod Δ eine Bewertung von A.

Da sowohl die Werte des Normalteilers Δ der Wertgruppe W als auch die der Wertfaktorgruppe $\overline{W} = W/\Delta$ durch ganzrationale Zahlen dargestellt werden können, gibt es Darstellungen der Werte von $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ selbst durch geordnete Paare ganzrationaler Zahlen der Form

$$w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) = (v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi), w_{\mathfrak{q}}(\xi)),$$

(3.7) wobei

$$w_{\mathfrak{q}}(\xi) = v_{\mathfrak{q}}(\xi\mathfrak{P}_{1\iota}) \text{ für } \xi \in A \text{ mit } v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = 0.$$

In diesen Wertdarstellungen ist zwar die erste Komponente $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi)$ stets eindeutig, die zweite jedoch nur auf der in (3.7) beschriebenen Teilmenge eindeutig festgelegt; es kann somit sehr viele verschiedene Darstellungen (3.7)

einer Bewertung $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$ geben. Eine eindeutige Normierung der Wertdarstellung wird z. B. dadurch erreicht, daß man für ein festes $\xi \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = 1$ den Wert $w_{\mathfrak{q}}(\xi)$ vorschreibt[10]. Die Durchführung dieser Normierungsvorschrift für alle zu $b_{1\iota}$ gehörigen Bewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ ergäbe eine recht komplizierte Abhängigkeit der Bewertungswerte von einem Elementsystem $\{\xi\}$, was wir hier vermeiden wollen. Wir leiten deshalb eine andere eindeutige Normierungsvorschrift her, die für alle zu $b_{1\iota}$ gehörigen Bewertungen in gleicher Weise gilt und nur von der ersten Erzeugungskomponente K_1, die in die Definition von $b_{1\iota}$ ohnehin schon eingeht, abhängt.

Für jeden Primdivisor $\mathfrak{P}_{1\iota} \in B_{1\iota}$ (dieser ist Primdivisor des *AF1 A* über K_ι) bezeichne $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ die Verzweigungsordnung über dem zugehörigen (induzierten) Primdivisor $\mathfrak{p}_1$ von K_1 über k. $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ ist eine durch A und K_1 eindeutig bestimmte natürliche Zahl, und sind $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ bzw. $v_{\mathfrak{p}_1}$ die zu $\mathfrak{P}_{1\iota}$ bzw. $\mathfrak{p}_1$ gehörigen normierten Bewertungen, so gilt

$$(3.8)\qquad v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi_1) = e_{\mathfrak{P}_{1\iota}} v_{\mathfrak{p}_1}(\xi_1) \quad \text{für alle } \xi_1 \in K_1 \text{ [11]},$$

d. h. die $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$-Werte der $\xi_1 \in K_1$ sind genau die ganzrationalen Vielfachen von $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$.

Für alle Elemente $\xi_1 \in K_1$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi_1) = v_{\mathfrak{p}_1}(\xi_1) = 0$ (solche existieren stets) ist $\xi_1 \mathfrak{P}_{1\iota}$ eine Konstante von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1\iota}$ und somit

$$(3.9)\qquad w_{\mathfrak{q}}(\xi_1) = v_{\mathfrak{q}}(\xi_1 \mathfrak{P}_{1\iota}) = 0 \quad \text{für alle } \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota}) \text{ von } A\mathfrak{P}_{1\iota}$$

und bei jeder Wertdarstellung (3.7). Folglich gilt für jedes Element $\zeta_1 \in K_1$ und bei jeder Wertdarstellung von $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$

$$(3.10)\qquad w_{\mathfrak{q}}(\zeta_1) = v_{\mathfrak{p}_1}(\zeta_1)\, w_{\mathfrak{q}}(\eta_1),$$

wobei η_1 beliebig aus K_1 mit $v_{\mathfrak{p}_1}(\eta_1) = 1$, und diese Relation ist unabhängig von der speziellen Auswahl des η_1 mit den angegebenen Eigenschaften $\left(\text{betrachte hierzu } \zeta_1 \cdot \eta_1^{-v_{\mathfrak{p}_1}(\zeta_1)}\right)$.

Ist $\eta_1 \in K_1$ ein beliebiges Element mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\eta_1) = e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$, d. h. $v_{\mathfrak{p}_1}(\eta_1) = 1$, so bilden die Werte

$$(3.11)\qquad w_{\mathfrak{q}}\left(\eta_1 \cdot \xi^{-e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}}\right), \text{ wobei } \xi \text{ alle Elemente von } A \text{ mit } v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = 1 \text{ durchläuft,}$$

eine wegen $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}\left(\eta_1 \xi^{-e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}}\right) = 0$ durch K_1 und $(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q})$ eindeutig bestimmte arithmetische Progression der Länge $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ im Ring Γ der ganzrationalen Zahlen, d. h. (3.11) liefert alle Zahlen einer festen Restklasse Γ mod $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$. Der kleinste nichtnegative Repräsentant dieser Restklasse ist eine durch $(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q})$ und K_1 eindeutig bestimmte ganzrationale Zahl $c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ mit $0 \leq c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} \leq e_{\mathfrak{P}_{1\iota}} - 1$.

---

[10]) Wegen (3.5) ist die Wertdarstellung für ganze W eindeutig bestimmt, wenn die Werte $w_{\mathfrak{q}}(\xi)$ für ein relationstreues Vertretersystem in W von $\overline{W}$ vorgeschrieben sind.

[11]) Es ist $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}} = \bar{e}_{\mathfrak{P}_{1\iota}} e_{\mathfrak{P}^*_{1\iota}}$, wo $\bar{e}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{P}_{1\iota}$ über $\mathfrak{P}^*_{1\iota}$ von $K_{1\iota}$ und $e_{\mathfrak{P}^*_{1\iota}}$ die von $\mathfrak{P}^*_{1\iota}$ über $\mathfrak{p}_1$ bedeutet; falls K_1 über k und A über $K_{1\iota}$ separabel ist, ist $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}} = 1$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1\iota}$ (vgl. [6c], Satz 4).

Die durch $(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q})$ und K_1 eindeutig bestimmte Klasse $\mathfrak{C}^{(2)}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ von Elementen $\xi \in A$ mit

$$
\begin{aligned}
&v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = 1,\ w_{\mathfrak{q}}\left(\eta_1 \cdot \xi^{-e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}}\right) = c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} \\
&\text{für alle } \eta_1 \in K_1 \text{ mit } v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\eta_1) = e_{\mathfrak{P}_{1\iota}},
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

nennen wir die 2. *Primklasse zu* $(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q})$.

Definition 2. *Die Wertdarstellung* (3.7) *von* $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$ *heiße die normierte Wertdarstellung zu* $(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q})$, *falls*

$$
w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}) = (1, 0) \ \textit{ist, für alle } \xi_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} \in \mathfrak{C}^{(2)}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}.
\tag{3.13}
$$

Bemerkungen. Da die Werte $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$ der $\xi \in \mathfrak{C}^{(2)}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ genau einen Repräsentanten des erzeugenden Elementes von $w \bmod \Delta$ liefern, ist die Vorschrift (3.13) stets durchführbar und liefert (in Abhängigkeit von K_1) eine eindeutige Normierung der Wertdarstellung von $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$. — Wenn wir fortan von Wertdarstellungen sprechen, so meinen wir *stets* die normierten Wertdarstellungen. Zunächst einige einfache Eigenschaften.

Lemma 3. *Die normierte Wertdarstellung von* $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ *für ein Element* $\eta \in A$ *errechnet sich nach der Vorschrift*

$$
w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\eta) = (v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\eta), w_{\mathfrak{q}}(\eta)),\ w_{\mathfrak{q}}(\eta) = w_{\mathfrak{q}}\left(\eta \cdot \xi^{-v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\eta)}\right) = v_{\mathfrak{q}}\left(\eta \cdot \xi^{-v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\eta)}\mathfrak{P}_{1\iota}\right),
\tag{3.14}
$$

wobei $\xi = \xi_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} \in \mathfrak{C}^{(2)}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ *ist; speziell für Elemente* $\xi_1 \in K_1$ *ist*

$$
w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi_1) = (v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi_1),\ c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}\, v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi_1)).
\tag{3.14a}
$$

Die Frage nach der Bestimmung der Hilfskonstanten $c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ wird weitgehend eingeschränkt durch das folgende

Lemma 4. *Für jedes* $\mathfrak{P}_{1\iota} \in B_{1\iota}$ *gilt: Bei fast allen zu* $\mathfrak{P}_{1\iota}$ *gehörigen* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$ *von* $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ *ist die Konstante* $c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} = 0$; *ist speziell* $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}} = 1$, *so sind alle zugehörigen* $c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} = 0$ [12]).

Beweis. Ist wie oben $\eta_1 \in K_1$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\eta_1) = e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ und $\xi \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = 1$, so ist $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}\left(\eta_1 \cdot \xi^{-e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}}\right) = 0$, d. h. $\left(\eta_1 \xi^{-e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}}\right)\mathfrak{P}_{1\iota} \neq 0$ aus $A\mathfrak{P}_{1\iota}$. Folglich ist $v_{\mathfrak{q}}\left(\eta_1 \xi^{-e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}}\right) = w_{\mathfrak{q}}\left(\eta_1 \xi^{-e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}}\right) = 0$ für fast alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$ von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$, und wegen (3.11) sind somit fast alle zu $\mathfrak{P}_{1\iota}$ gehörigen $c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} = 0$. — Ist $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}} = 1$, so sind wegen $0 \leqq c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} \leqq e_{\mathfrak{P}_{1\iota}} - 1$ alle zugehörigen $c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} = 0$, womit Lemma 4 bewiesen ist.

Die Anordnung der zu $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ gehörigen Wertgruppe W sieht in der Sprechweise der (normierten) Wertdarstellungen folgendermaßen aus: Es ist $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) = w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\eta)$ dann und nur dann, wenn $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\eta)$ *und* $w_{\mathfrak{q}}(\xi) = w_{\mathfrak{q}}(\eta)$; es ist $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) > w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\eta)$ dann und nur dann, wenn *entweder* $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) > v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\eta)$ *oder* $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\eta)$ und zugleich $w_{\mathfrak{q}}(\xi) > w_{\mathfrak{q}}(\eta)$. — Die Elemente $\xi \in A$ mit $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) = (0,0)$ sind die Einheiten von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$, die mit $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) \geqq (0,1)$ bilden das maximale Primhauptideal von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ und die mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) \geqq 1$ das minimale Primideal von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$; letzteres ist kein Hauptideal

[12]) Wir wollen hier nicht untersuchen, wie weit bei $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}} \neq 1$ auch *alle* $c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} = 0$ sein können. Unter den Separabilitätsvoraussetzungen der Fußnote [11]) sind höchstens endlich viele zu $b_{1\iota}$ gehörige $c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} \neq 0$.

(keine endliche Basis; vgl. [4a], S. 112) und ist von der obigen 2. Primklasse $\mathfrak{C}^{(2)}_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ zu unterscheiden. — Die Bewertungspostulate (2.3) lassen sich mit Hilfe der Wertdarstellungen in Aussagen der Zahlkomponenten $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi)$ und $w_{\mathfrak{q}}(\xi)$ aufspalten.

Eine erste Strukturaussage über die Werte eines Elementes $\xi \in A$ bei allen zu $b_{1\iota}$ gehörigen Bewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$ enthält das nachstehende

Lemma 5. *Ist $\xi \neq 0$ ein beliebiges Element von A, so hat für alle Bewertungen $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$, die zu einem festen $\mathfrak{P}_{1\iota} \in B_{1\iota}$ gehören, die erste Komponente der Wertdarstellung den gleichen Wert, nämlich $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi)$, und es gibt höchstens endlich viele $\mathfrak{P}_{1\iota} \in B_{1\iota}$, für die $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) \neq 0$ ist; zu jedem $\mathfrak{P}_{1\iota} \in B_{1\iota}$ gibt es höchstens endlich viele zugehörige $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$, für die $w_{\mathfrak{q}}(\xi) \neq 0$ ist* [13]).

Beweis. Die ersten Aussagen dieses Lemmas sind einfache Folgerungen aus der Konstruktion der Wertdarstellungen. — Sei nun $\mathfrak{P}_{1\iota} \in B_{1\iota}$ fest gewählt, so ist für alle $\xi \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = 0$ für fast alle zugehörigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$: $w_{\mathfrak{q}}(\xi) = v_{\mathfrak{q}}(\xi) = 0$. Ist jedoch $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) \neq 0$, so gibt es eine ganzrationale Zahl a, so daß $a \cdot v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) > 0$ und zugleich ein Vielfaches von $e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ ist. Ist $\xi_1 \in K_1$ ein Hilfselement mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi_1) = a \cdot v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi)$, so ist $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi_1 \cdot \xi^{-a}) = 0$ und für fast alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$ gilt: $w_{\mathfrak{q}}(\xi_1 \cdot \xi^{-a}) = w_{\mathfrak{q}}(\xi_1) - a \cdot w_{\mathfrak{q}}(\xi) = 0$. Wegen (3.14a) und Lemma 4 ist aber $w_{\mathfrak{q}}(\xi_1) = 0$ für fast alle $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$. Zusammen ergibt dies die Behauptung: $w_{\mathfrak{q}}(\xi) = 0$ für fast alle zu $\mathfrak{P}_{1\iota}$ gehörigen $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$.

Nach Lemma 5 erfüllt das System von Zuordnungen

$$\{w_{\mathfrak{q}}(\xi) \to \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})\}, \quad \xi \in A, \ \mathfrak{P}_{1\iota} \in B_{1\iota} \text{ fest,} \tag{3.15}$$

für alle $\mathfrak{P}_{1\iota}$ entsprechenden Primdivisoren $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})$ die in (3.1) und (3.4) beschriebenen Voraussetzungen (einschließlich Endlichkeitsbedingung) eines *AF1*-Divisors.

Definition 3. *Für jedes $\xi \neq 0$ aus A und jedes $\mathfrak{P}_{1\iota} \in B_{1\iota}$ nennen wir den durch die normierten Wertdarstellungen in Abhängigkeit von K_1 gelieferten Divisor*

$$(\xi \mathfrak{P}_{1\iota}) = \sum_{\mathfrak{q}} w_{\mathfrak{q}}(\xi)\, \mathfrak{q} \quad \textit{(Summation über alle } \mathfrak{q} \textit{ von } A\mathfrak{P}_{1\iota}) \tag{3.16}$$

den Restdivisor von ξ bei $\mathfrak{P}_{1\iota}$.

Bemerkung. (3.16) definiert auch dann einen Divisor endlichen Grades von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$, wenn der Elementrest $\xi\mathfrak{P}_{1\iota} = 0$ oder $= \infty$ ist.

Lemma 6. *Für alle $\xi \in A$ mit festem ganzrationalem $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = a$ gehört der Restdivisor $(\xi\mathfrak{P}_{1\iota})$ zur gleichen durch a und K_1 bestimmten Divisorenklasse $H_a(A\mathfrak{P}_{1\iota})$ von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$, der „Hauptklasse zum Exponenten a" von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$, und zu jedem Divisor $\mathfrak{a} \in H_a(A\mathfrak{P}_{1\iota})$ gibt es ein $\xi \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = a$ und $(\xi\mathfrak{P}_{1\iota}) = \mathfrak{a}$; $H_0(A\mathfrak{P}_{1\iota})$ ist die Hauptdivisorenklasse von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$, und die Restdivisoren $(\xi\mathfrak{P}_{1\iota})$ zu Elementen $\xi \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) = 0$ sind unabhängig von der Wertnormierung eindeutig bestimmt; stets ist*

$$H_a(A\mathfrak{P}_{1\iota}) = a \cdot H_1(A\mathfrak{P}_{1\iota}) \textit{ und vom Grade } d(H_a(A\mathfrak{P}_{1\iota})) = \frac{a}{e_{\mathfrak{P}_{1\iota}}} \sum_{\mathfrak{q}} c_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}\, d(\mathfrak{q}), \tag{3.17}$$

[13]) Diese Aussage ist für die $\mathfrak{P}_{1\iota}$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi) \neq 0$ erst auf Grund der normierten Wertdarstellungen möglich; sie bestätigt zugleich die Zweckmäßigkeit des obigen Normierungsprozesses.

wo $d(\mathfrak{q})$ *den Grad des Primdivisors* $\mathfrak{q}$ *von* $A\mathfrak{P}_{1i}$ *bezeichnet; sind alle zu* $\mathfrak{P}_{1i}$ *gehörigen* $c_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}} = 0$, *so ist* $H_{n e_{\mathfrak{P}_{1i}}}(A\mathfrak{P}_{1i}) = H_0(A\mathfrak{P}_{1i})$ *für alle ganzrationalen* n, *und ist speziell* $e_{\mathfrak{P}_{1i}} = 1$, *so ist* $H_a(A\mathfrak{P}_{1i}) = H_0(A\mathfrak{P}_{1i})$ *für alle Werte* a.

Beweis. Ist $\xi \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\xi) = 0$, so stimmt $(\xi\mathfrak{P}_{1i})$ mit dem Divisor des Elementes $\xi\mathfrak{P}_{1i}$ überein und ist also ein Hauptdivisor; somit gibt es zu jedem Hauptdivisor von $A\mathfrak{P}_{1i}$ auch ein $\xi \in A$ mit den genannten Eigenschaften. Sind $\eta, \zeta \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\eta) = v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\zeta)$, so liegen folglich die Restdivisoren in der gleichen Divisorenklasse, und zu jedem Divisor dieser Klasse gibt es ein $\eta \in A$, dessen Restdivisor diesem Divisor gleich ist und für das $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\eta)$ den vorgeschriebenen Wert hat. Ist weiter $\xi \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\xi) = 1$, so ist $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\xi^a) = a$ und $(\xi^a\mathfrak{P}_{1i}) = a(\xi\mathfrak{P}_{1i}) \in H_a(A\mathfrak{P}_{1i})$ für jedes ganzrationale a, woraus die Klassenrelation in (3.17) folgt. Die Gradformel aus (3.17) folgt aus (3.14a), da für ein Element $\xi_1 \in K_1$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\xi_1) = e_{\mathfrak{P}_{1i}}$ der Grad des Divisors $(\xi_1\mathfrak{P}_{1i})$ gleich $\sum_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})} c_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}\, d(\mathfrak{q})$ ist. Die restlichen Aussagen des Lemmas folgen, da in diesen Fällen die Elemente $\xi_1 \in K_1$ den Restdivisor $(\xi_1\mathfrak{P}_{1i}) = \sum_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})} 0 \cdot \mathfrak{q}$ haben, der ja ein Hauptdivisor von $A\mathfrak{P}_{1i}$ ist.

Die hier ermittelten Abhängigkeiten der normierten Wertdarstellungen und Restdivisoren von K_1 bedingen folgendes dem Satz 3 aus [6c] entsprechende Verhalten beim Wechsel der zweiten Erzeugungskomponente K_i:

Satz 2. *Beim Übergang von der Erzeugung* (K_1, K_i) *zur Erzeugung* (K_1, K_j) *des AF2 A über k gilt für alle* $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}(K_j) = B_{1j}(K_i)$, *d. h. alle sowohl zu* B_{1i} *als auch zu* B_{1j} *gehörenden Primdivisoren* $\mathfrak{P}_{1i} = \mathfrak{P}_{1j}$, *und jeweils alle zugehörigen* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i}) = \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1j})$: *die zu den Bewertungen* $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}$ *gehörenden normierten Wertdarstellungen ändern sich beim Erzeugungswechsel nicht; für alle* $\xi \in A$ *bzw. alle ganzrationalen* a *bleiben die zugehörigen Restdivisoren* $(\xi\mathfrak{P}_{1i}) = (\xi\mathfrak{P}_{1j})$ *und Hauptklassen* $H_a(A\mathfrak{P}_{1i}) = H_a(A\mathfrak{P}_{1j})$ *beim Erzeugungswechsel unverändert.*

Man beachte hierbei, daß nach Satz 3 aus [6c] dies für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ zutrifft.

4. b_{1i}-Divisoren und b_{1i}-Hauptdivisoren

Die Untersuchungen aus 3. zusammen mit dem Schema (3.1) führen nun zu folgender

Definition 4. *Ein System von Zuordnungen*

$$\{(a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1i}}, a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})}) \to (\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i}))\}, \tag{4.1}$$

das jeder Primstelle $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})) \in b_{1i}$ *ein geordnetes Paar* $(a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1i}}, a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})})$ *ganzrationaler Zahlen* $a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ *und* $a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})}$, *d. h. einen Wert der zugehörigen normierten Wertgruppe, zuordnet, nennen wir einen* b_{1i}-**Divisor** *und schreiben abkürzend dafür*

$$\mathfrak{A} = \sum_{(\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}) \in b_{1i}} (a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1i}}, a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})}) \cdot (\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})), \tag{4.2}$$

falls (4.1) *die folgenden Postulate erfüllt:*

(H) *Für alle Stellen* $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q})$ *mit dem gleichen* $\mathfrak{P}_{1i}$ *hat die erste Zahlkomponente* $a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1i}}$ *den gleichen festen Wert (Homogenität in* $\mathfrak{P}_{1i}$*).*

(E_1) *Für fast alle $\mathfrak{P}_{1\iota}$ ist $a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}} = 0$ (1. Endlichkeitsbedingung).*

(E_2) *Für jedes $\mathfrak{P}_{1\iota}$ sind fast alle zugehörigen $a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})} = 0$ (2. Endlichkeitsbedingung).*

Diese Definition ist offensichtlich eine Weiterführung derjenigen für *AF1*-Divisoren [vgl. (3.4)], nur daß hier zwei Endlichkeitsbedingungen (entsprechend dem Transzendenzgrad) und eine Homogenitätsbedingung auftreten. (H), (E_1) und (E_2) haben zur Folge, daß für höchstens endlich viele Stellen aus $b_{1\iota}$ beide Zahlkomponenten $a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ und $a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})}$ gleichzeitig ungleich 0 sein können; es kann jedoch für unendlich viele Stellen $a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ oder $a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})}$ ungleich 0 sein.

Entsprechend (3.2) bilden bei der Festsetzung

$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} = \sum_{(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) \in b_{1\iota}} (a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}} \pm b^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}, a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})} \pm b^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})}) \cdot (\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}) \tag{4.3}$$

die $b_{1\iota}$-Divisoren eine unendliche additive abelsche Gruppe $D_{1\iota}$ mit dem neutralen Element

$$\mathfrak{E} = \sum_{(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) \in b_{1\iota}} (0, 0) \cdot (\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q})\,[14]. \tag{4.4}$$

Lemma 7. *Bedeutet $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi) = (v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi), w_{\mathfrak{q}}(\xi))$ für jede Stelle von $b_{1\iota}$ die normierte Wertdarstellung, so wird durch*

$$(\xi) = \sum_{(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) \in b_{1\iota}} (v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi), w_{\mathfrak{q}}(\xi)) \cdot (\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}) \tag{4.5}$$

jedem Element $\xi \neq 0$ aus A ein $b_{1\iota}$-Divisor zugeordnet, nämlich der $b_{1\iota}$-Hauptdivisor (ξ); für jedes $\xi \neq 0$ und $\eta \neq 0$ aus A gilt

$$(\xi\,\eta) = (\xi) + (\eta), \tag{4.6}$$

d. h. (4.5) liefert eine homomorphe Abbildung der Multiplikativgruppe $A^\times$ von A auf eine Untergruppe $H_{1\iota}$ der additiven $b_{1\iota}$-Divisorengruppe $D_{1\iota}$ von A, nämlich auf die $b_{1\iota}$-Hauptdivisorengruppe von A; der Kern dieses Homomorphismus, d. h. die Gesamtheit der $\xi \in A$, die auf das neutrale Element $\mathfrak{E}$ abgebildet werden, ist die Multiplikativgruppe $k^\times$ des Konstantenkörpers k von A.

Beweis. Nach Lemma 5 erfüllen die Werte $w_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}(\xi)$ für ein Element $\xi \in A$ die Forderungen (H), (E_1) und (E_2), d. h. durch (4.5) wird ein $b_{1\iota}$-Divisor erklärt. (4.6) ist eine Folge der Bewertungspostulate (in der Schreibweise der normierten Wertdarstellungen). Aus Satz 1 folgt schließlich, daß ein $b_{1\iota}$-Hauptdivisor (ξ) dann und nur dann gleich $\mathfrak{E}$ ist, wenn $\xi \in k^\times$ ist.

Nach Lemma 7 ist unser $b_{1\iota}$-Divisorbegriff so umfassend, daß in ihm Hauptdivisoren mit Eigenschaften, die die der *AF1*-Hauptdivisoren unmittelbar verallgemeinern, enthalten sind. Mit Hilfe von Lemma 6 kann man darüber hinaus sehr leicht $b_{1\iota}$-Divisoren konstruieren, die keine $b_{1\iota}$-Hauptdivisoren sind.

Wir geben zunächst eine formale Umschreibung des Divisorausdruckes (4.2) an, die den Einblick in die Struktur der Divisorengruppe $D_{1\iota}$ vertieft; hierbei werden an Stelle der Primstellen $(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q})$ die Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1\iota}$ als Bausteine der $b_{1\iota}$-Divisoren benutzt.

[14]) Die Forderungen (H), (E_1) und (E_2) sind mit der Gruppenverknüpfung verträglich.

Für jeden gemäß (4.2) erklärten $\mathfrak{b}_{1\iota}$-Divisor schreiben wir

$$(4.7)\qquad \mathfrak{A} = \sum_{\mathfrak{P}_{1\iota}\in B_{1\iota}} [a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}};\, \mathfrak{a}_{1\iota}]\cdot \mathfrak{P}_{1\iota},\ \text{mit}\ \mathfrak{a}_{1\iota} = \sum_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})} a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})}\cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota}),$$

wobei fast alle $a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}} = 0$ und alle $\mathfrak{a}_{1\iota}$ *AF1*-Divisoren des zugehörigen Restklassenkörpers $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ sind. Addition und Subtraktion der $\mathfrak{b}_{1\iota}$-Divisoren in dieser Schreibweise geschieht komponentenweise nach dem Schema

$$(4.8)\qquad \mathfrak{A}\pm\mathfrak{B} = \sum_{\mathfrak{P}_{1\iota}\in B_{1\iota}} [a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}} \pm b^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}};\, \mathfrak{a}_{1\iota}\pm \mathfrak{b}_{1\iota}]\cdot \mathfrak{P}_{1\iota}.$$

(4.2) und (4.7) sind offensichtlich gleichwertig, und die $\mathfrak{b}_{1\iota}$-Divisoren von A sind also gleichzeitig als Systeme von Zuordnungen von geordneten Paaren $[a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}};\, \mathfrak{a}_{1\iota}]$ zu den Primdivisoren $\mathfrak{P}_{1\iota}\in B_{1\iota}$ erklärbar, bei denen die ersten Komponenten $a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ ganzrationale Zahlen und fast alle gleich 0 sind (entsprechend (H) und (E_1)) und bei denen die zweiten Komponenten jeweils (endliche) Divisoren $\mathfrak{a}_{1\iota}$ von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ sind (entsprechend (E_2)). Nennen wir diese zweiten Komponenten $\mathfrak{a}_{1\iota}$ die *Restdivisoren von* $\mathfrak{A}$ *bei* $\mathfrak{P}_{1\iota}$, so stimmt dieser Restdivisorbegriff speziell für $\mathfrak{b}_{1\iota}$-Hauptdivisoren (ξ) mit dem früheren in Definition 3 überein.

Aus der Darstellung (4.7) der $\mathfrak{b}_{1\iota}$-Divisoren folgt nun: Die Gruppe $D_{1\iota}$ der $\mathfrak{b}_{1\iota}$-Divisoren $\mathfrak{A}$ von A ist isomorph zur direkten Summe aus der durch die $\mathfrak{P}_{1\iota}\in B_{1\iota}$ erzeugten gewöhnlichen Divisorengruppe (mit ganzrationalen Koeffizienten) und einer abelschen Gruppe $D'_{1\iota}$, die ihrerseits unendliche direkte Summe der *AF1*-Divisorengruppen der $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ zu $\mathfrak{P}_{1\iota}\in B_{1\iota}$ ist, wobei in jedem der unendlich vielen direkten Summanden ein vom neutralen Element desselben verschiedenes Element stehen darf.

Da jeder Primstelle $(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})\in \mathfrak{b}_{1\iota}$ gemäß 2. (vgl. nach (2.2)) in invarianter Weise ein Grad $f_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}} = d(\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})) = [A(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}) : k(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})]$ zugeordnet ist, kann zunächst jedem Restdivisor $\mathfrak{a}_{1\iota}$ eindeutig ein Grad

$$(4.9)\qquad d(\mathfrak{a}_{1\iota}) = \sum_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})\ \text{von}\ A\mathfrak{P}_{1\iota}} a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1\iota})}\cdot f_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}}$$

zugeordnet werden; wir nennen $d(\mathfrak{a}_{1\iota}) = d_{1\iota}(\mathfrak{A})$ den *Restdivisorgrad von* $\mathfrak{A}$ *bei* $\mathfrak{P}_{1\iota}$. Jedem $\mathfrak{b}_{1\iota}$-Divisor $\mathfrak{A}$ entspricht somit eine unendliche Schar von ganzrationalen Zahlen $d_{1\iota}(\mathfrak{A})$.

Durch Einbeziehung der Werte $a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ (diese sind fast alle $= 0$) kommt man zu der ganzrationalen Zahl

$$(4.10)\qquad d(\mathfrak{A}) = \sum_{\mathfrak{P}_{1\iota}\in B_{1\iota}} a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}\cdot d_{1\iota}(\mathfrak{A}),$$

die wir den $\mathfrak{b}_{1\iota}$-*Grad von* $\mathfrak{A}$ nennen wollen. Für $\mathfrak{b}_{1\iota}$-Hauptdivisoren (ξ) hängen $d((\xi))$ und die Restgrade $d_{1\iota}((\xi))$ zu $\mathfrak{P}_{1\iota}$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi)\neq 0$ natürlich von der Wertnormierung ab.

Ist $\xi\neq 0$ aus A, so sind die Ausdrücke

$$(4.11)\qquad \mathfrak{N}_\xi = -\sum_{(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})\in \mathfrak{b}_{1\iota}} \mathrm{Min}\,((v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi),\, w_{\mathfrak{q}}(\xi)),\,(0,0))\cdot(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q}),$$

$$(4.12)\qquad \mathfrak{Z}_\xi = \sum_{(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})\in \mathfrak{b}_{1\iota}} \mathrm{Max}\,((v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi),\, w_{\mathfrak{q}}(\xi)),\,(0,0))\cdot(\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{q})$$

$\mathfrak{b}_{1\iota}$-Divisoren im Sinn von Definition 4. In Anlehnung an die (multiplikativ

geschriebene) *AF1*-Divisorentheorie nennen wir $\mathfrak{N}_\xi$ den *totalen* b_{1i}*-Nenner* und $\mathfrak{Z}_\xi$ den *totalen* b_{1i}*-Zähler* von ξ [15]). Nach Konstruktion gilt

(4.13) $$\mathfrak{Z}_\xi - \mathfrak{N}_\xi = (\xi), \qquad \text{für jedes } \xi \neq 0 \text{ aus } A.$$

Satz 3. *Ist $\xi \neq 0$ aus A, so ist der Restdivisor $(\xi\mathfrak{P}_{1i})$ von (ξ) für fast alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ ein Hauptdivisor von $A\mathfrak{P}_{1i}$, und es ist $d_{1i}((\xi)) = 0$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$; ist zusätzlich $\xi \notin K_1$, so ist $d_{1i}(\mathfrak{N}_\xi) = d_{1i}(\mathfrak{Z}_\xi) \neq 0$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$. Ist speziell K_1 ein separierender TK1 für A über k* [16]) *und ist $\xi \in A$, $\xi \notin K_1$, so gilt für fast alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$*

(4.14) $$d_{1i}(\mathfrak{N}_\xi) = d_{1i}(\mathfrak{Z}_\xi) = [A : K_1(\xi)].$$

Beweis. Da $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\xi) = 0$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$, ist auch $(\xi\mathfrak{P}_{1i})$ Hauptdivisor von $A\mathfrak{P}_{1i}$ und $d_{1i}((\xi)) = d((\xi\mathfrak{P}_{1i})) = 0$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$. — Ist $\xi \notin K_1$, so ist $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\xi) = 0$ und $\xi\mathfrak{P}_{1i}$ transzendent über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ (vgl. [6c], Satz 2); für diese $\mathfrak{P}_{1i}$ hat $\xi\mathfrak{P}_{1i}$ in $A\mathfrak{P}_{1i}$ jeweils einen ganzen Divisor $\mathfrak{n}_{\xi\mathfrak{P}_{1i}} \neq \mathfrak{e}_{1i}$ bzw. $\mathfrak{z}_{\xi\mathfrak{P}_{1i}} \neq \mathfrak{e}_{1i}$ als Nenner bzw. Zähler, und es ist $\mathfrak{n}_{\xi\mathfrak{P}_{1i}} = (\mathfrak{n}_\xi)_{1i}$ bzw. $\mathfrak{z}_{\xi\mathfrak{P}_{1i}} = (\mathfrak{z}_\xi)_{1i}$ jeweils der Restdivisor von $\mathfrak{N}_\xi$ bzw. $\mathfrak{Z}_\xi$ bei $\mathfrak{P}_{1i}$; folglich ist $d_{1i}(\mathfrak{N}_\xi) = d_{1i}(\mathfrak{Z}_\xi) \neq 0$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$. — Die letzte Aussage dieses Satzes, d. h. (4.14), ist eine Umschreibung von Satz 4 aus [6c] in die Sprechweise der b_{1i}-Divisoren.

Das Ergebnis (4.14) kann als Weiterführung auf *AF2* eines bekannten Resultates aus der Theorie der *AF1* angesehen werden (vgl. etwa [1], S. 18).

Nach Satz 3 ist für jedes $\xi \in A$ mit $\xi \notin K_1$ sowohl $\mathfrak{N}_\xi$ als auch $\mathfrak{Z}_\xi$ sicher kein Hauptdivisor. Ist $\xi_0 \in k$, so ist $(\xi_0) = \mathfrak{N}_{\xi_0} = \mathfrak{Z}_{\xi_0} = \mathfrak{E}$, also ein b_{1i}-Hauptdivisor. Wir untersuchen nun, ob der totale b_{1i}-Nenner bzw. b_{1i}-Zähler eines Elementes $\xi_1 \in K_1$ mit $\xi_1 \notin k$ ein b_{1i}-Hauptdivisor ist.

Unter den angegebenen Voraussetzungen für ξ_1 gibt es jeweils mindestens ein $\mathfrak{p}_1$ und ein $\bar{\mathfrak{p}}_1$ von K_1, so daß $v_{\mathfrak{p}_1}(\xi_1) > 0$ und $v_{\bar{\mathfrak{p}}_1}(\xi_1) < 0$; also gibt es auch jeweils mindestens ein $\mathfrak{P}_{1i}$ und ein $\bar{\mathfrak{P}}_{1i}$ aus B_{1i}, so daß $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\xi_1) > 0$ und $v_{\bar{\mathfrak{P}}_{1i}}(\xi_1) < 0$; folglich gibt es sowohl Primstellen aus b_{1i}, für die $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi_1) > O$ ist, als auch solche, für die $w_{\mathfrak{P}_{1i},\mathfrak{q}}(\xi_1) < O$ ist. Da nun $\mathfrak{N}_{\xi_1} \neq \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Z}_{\xi_1} \neq \mathfrak{E}$ ganze Divisoren sind (alle zugehörigen Werte sind $\geq O$) und da ein b_{1i}-Hauptdivisor entweder gleich $\mathfrak{E}$ oder „nicht ganz" ist (für Elemente $\xi \in A$ mit $\xi \notin K_1$ folgt dies aus Satz 3), sind $\mathfrak{N}_{\xi_1}$ und $\mathfrak{Z}_{\xi_1}$ sicher keine b_{1i}-Hauptdivisoren.

Zusammen ergibt dies

Korollar zu Satz 3. *Ist $\xi \in A$, aber $\xi \notin k$, so sind $\mathfrak{N}_\xi$ und $\mathfrak{Z}_\xi$ b_{1i}-Divisoren, die keine b_{1i}-Hauptdivisoren sind.*

Mit diesen Überlegungen ist zunächst gezeigt, daß der Begriff der hier eingeführten b_{1i}-Divisoren umfassend genug ist, neben den b_{1i}-Hauptdivisoren noch b_{1i}-Nenner und b_{1i}-Zähler zu enthalten, und daß sich einige wesentliche Eigenschaften aus der Theorie der *AF1*-Divisoren auf unsere Bildungen fast wörtlich übertragen. Die Definition des totalen b_{1i}-Nenners sowie des b_{1i}-Zählers und die Beziehung (4.13) sind zudem unabhängig von der Wertnormierung.

---

[15]) Für einige der $\mathfrak{N}_\xi$ bzw. $\mathfrak{Z}_\xi$ zugeordneten Zahlenpaare kann jedoch die zweite Komponente $a^{(2)}_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})}$ negativ sein, nämlich wenn gleichzeitig $v_{\mathfrak{P}_{1i}}(\xi) \neq 0$ ist.

[16]) Das heißt, ist A über K_1 separabel erzeugbar.

5. Ein Annäherungsunabhängigkeitssatz

Der *AF1*-Annäherungsunabhängigkeitssatz besteht, grob gesagt, in folgender Aussage: Zu je endlich vielen Bewertungen $v_1, \ldots, v_n$ und Elementen $x_1, \ldots, x_n$ des Körpers existiert stets ein Körperelement y, das die x_i bei v_i in vorgegebener Güte approximiert. Die Approximationsgüte wird im allgemeinen durch Bewertungswerte der v_i beschrieben; diese sind für die Exponentenbewertungen also ganzrationale Zahlen. Der Satz ist daher gleichbedeutend damit, daß y ein System von endlich vielen simultanen Kongruenzen nach Primdivisorpotenzen (in multiplikativer Schreibweise) löst, welche als „Ausschnitt"[17]) eines *AF1*-Divisors bei endlich vielen Primdivisoren aufgefaßt werden können.

Wir wollen hier einen entsprechenden Satz für *AF2* herleiten, wobei als Approximationsgüte die „Ausschnitte" eines $b_{1\iota}$-Divisors bei endlich vielen Primstellen auftreten. Das Ergebnis wird die Zweckmäßigkeit der Homogenitätsforderung (H) in Definition 4 unterstreichen und zugleich zeigen, daß der Begriff des $b_{1\iota}$-Divisors auch diesem Problemkreis angepaßt ist. — Zunächst eine Vorbemerkung.

Lemma 8. *Es seien zu einem fest gewählten* $\mathfrak{P}_{1\iota} \in \mathrm{B}_{1\iota}$ $n_{1\iota}$ *Primdivisoren* $\mathfrak{q}^{(\nu)} = \mathfrak{q}^{(\nu)}(\mathfrak{P}_{1\iota})$ $(\nu = 1, \ldots, n_{1\iota})$ *von* $A\mathfrak{P}_{1\iota}$, $n_{1\iota}$ *Elemente* $\xi_\nu \in A$ *mit* $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\xi_\nu) \geq a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$ $(\nu = 1, \ldots, n_{1\iota})$ *und* $n_{1\iota}$ *ganzrationale Zahlen* $a^{(2)}_{\mathfrak{q}^{(\nu)}}$ *gegeben; dann gibt es stets ein* $\xi \in A$ *mit*

$$w_{\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}^{(\nu)}}(\xi - \xi_\nu) \geq (a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}, a^{(2)}_{\mathfrak{q}^{(\nu)}}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n_{1\iota}); \tag{5.1}$$

speziell existiert stets ein Element $\eta \in A$, *so daß*

$$w_{\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}^{(\nu)}}(\eta) = (a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}, a^{(2)}_{\mathfrak{q}^{(\nu)}}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n_{1\iota}). \tag{5.2}$$

Beweis. Ist $\zeta \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\zeta) = -a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}$, so ist $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\zeta\, \xi_\nu) \geq 0$ für $\nu = 1, \ldots, n_{1\iota}$, d. h. $\zeta\, \xi_\nu \mathfrak{P}_{1\iota}$ ist jeweils ein Element von $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ (das evtl. Null sein kann). Nach dem Annäherungsunabhängigkeitssatz für *AF1* (vgl. etwa [1], S. 11) gibt es ein $\bar{\xi} \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(\bar{\xi}) \geq 0$, so daß $v_{\mathfrak{q}^{(\nu)}}(\bar{\xi}\mathfrak{P}_{1\iota} - \zeta\, \xi_\nu \mathfrak{P}_{1\iota}) \geq a^{(2)}_{\mathfrak{q}^{(\nu)}} + w_{\mathfrak{q}^{(\nu)}}(\zeta)$ für $\nu = 1, \ldots, n_{1\iota}$. Multiplizieren wir die Ausdrücke $\bar{\xi} - \zeta\, \xi_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n_{1\iota})$ mit ζ^{-1} und setzen $\bar{\xi}\, \zeta^{-1} = \xi$, so ergibt eine Rechnung mit den normierten Wertdarstellungen, daß ξ die Approximationsbedingungen (5.1) erfüllt. — Sind speziell die $\xi_\nu \in A$ so gewählt, daß $w_{\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}^{(\nu)}}(\xi_\nu) = (a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}, a^{(2)}_{\mathfrak{q}^{(\nu)}})$ für $\nu = 1, \ldots, n_{1\iota}$, so gibt es nach (5.1) ein $\eta \in A$ mit $w_{\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}^{(\nu)}}(\eta - \xi_\nu) \geq (a^{(1)}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}, a^{(2)}_{\mathfrak{q}^{(\nu)}} + 1)$ für $\nu = 1, \ldots, n_{1\iota}$, und dieses η erfüllt die Wertgleichungen (5.2).

Wir erhalten nun den folgenden allgemeineren $b_{1\iota}$-Annäherungsunabhängigkeitssatz.

Satz 4. *Sind zu jedem der* m *Primdivisoren* $\mathfrak{P}^{(\mu)}_{1\iota} \in B_{1\iota}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ *je* n_μ *Primdivisoren* $\mathfrak{q}^{(\nu,\mu)} = \mathfrak{q}^{(\nu)}(\mathfrak{P}^{(\mu)}_{1\iota})$ *von* $A\mathfrak{P}^{(\mu)}_{1\iota}$, *je* n_μ *Elemente* $\xi_{\nu,\mu} \in A$ *mit* $v_{\mathfrak{P}^{(\mu)}_{1\iota}}(\xi_{\nu,\mu}) \geq a^{(1)}_{\mathfrak{P}^{(\mu)}_{1\iota}} = a^{(1)}_\mu$ *und je* n_μ *ganzrationale Zahlen* $a^{(2)}_{\nu,\mu} = a^{(2)}_{\mathfrak{q}^{(\nu)}(\mathfrak{P}^{(\mu)}_{1\iota})}$ *vorgegeben, so gibt es ein* $\xi \in A$ *mit*

$$w_{\mathfrak{P}^{(\mu)}_{1\iota}, \mathfrak{q}^{(\nu)}}(\xi - \xi_{\nu,\mu}) \geq (a^{(1)}_\mu, a^{(2)}_{\nu,\mu}) \text{ für } \mu = 1, \ldots, m;\ \nu_\mu = 1, \ldots, n_\mu; \tag{5.3}$$

[17]) Es wird nur der Beitrag endlich vieler Primdivisoren zum Divisor berücksichtigt.

speziell gibt es bei obiger Vorgabe von $a_\mu^{(1)}$ und $a_{\nu,\mu}^{(2)}$ stets ein Element $\eta \in A$ mit

(5.4) $\qquad w_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)},\mathfrak{q}^{(\nu)}}(\eta) = (a_\mu^{(1)}, a_{\nu,\mu}^{(2)})$ *für* $\mu = 1, \ldots, m;\ \nu_\mu = 1, \ldots, n_\mu$.

Beweis. Gemäß Lemma 8 gibt es für $\mu = 1, \ldots, m$ Elemente $\xi_\mu \in A$ mit $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)}}(\xi_\mu) = a_\mu^{(1)}$, so daß

$$w_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)},\mathfrak{q}^{(\nu)}}(\xi_\mu - \xi_{\nu,\mu}) \geqq (a_\mu^{(1)}, a_{\nu,\mu}^{(2)}) \text{ für } \nu_\mu = 1, \ldots, n_\mu;$$

hierbei können diese Annäherungen jeweils so eingerichtet werden, daß $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)}}(\xi_\mu - \xi_{\nu,\mu}) \leqq a_\mu^*$ mit einem geeigneten festen ganzrationalen $a_\mu^* < +\infty$ für alle μ und alle ν_μ. Nach dem Annäherungsunabhängigkeitssatz für den *AF1 A* über K_ι (alle $\mathfrak{P}_{1\iota}$ sind Primdivisoren von A über K_ι) gibt es ein $\xi \in A$, so daß

$$v_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)}}(\xi - \xi_\mu) \geqq a_\mu^* + 1, \text{ aber } < +\infty \text{ für } \mu = 1, \ldots, m.$$

Zusammen ergibt dies, daß ξ die Approximationsgleichungen (5.3) löst. — (5.4) folgt aus (5.3) und (5.2), wenn man die dem Beweis von (5.2) entsprechende Schlußweise wiederholt.

Der bewiesene Satz 4 ist ein Annäherungsunabhängigkeitssatz für je endlich viele Primstellen von $b_{1\iota}$; seine Aussage ist unabhängig von der zugrundeliegenden Wertnormierung. Im Unterschied zur *AF1*-Theorie (dort konnte dies allerdings auch nicht auftreten) sind jedoch die Stellen nach den ersten Komponenten $\mathfrak{P}_{1\iota}$ zunächst vorzusortieren, und für die ersten Komponenten der Approximationsgüten $a_\mu^{(1)}$ gilt folgendes: 1. Für alle zu einem festen $\mathfrak{P}_{1\iota}$ gehörigen Stellen hat $a_\mu^{(1)}$ den gleichen Wert (was offenbar der Bedingung **(H)** entspricht). 2. $a_\mu^{(1)}$ ist kleiner als $\operatorname{Min}_{\nu_\mu} v_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)}}(\xi_{\nu,\mu})$ gewählt. — Einfache Überlegungen mit Hilfe der Bewertungsaxiome zeigen, daß zumindest 1. für $n_\mu \neq 1$ allgemein, d. h. bei beliebigen $\xi_{\nu,\mu}$, nicht zu verschärfen ist. Eine gewisse Verschärfung von 2. liefert das nachstehende

Korollar zu Satz 4. *Gilt unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 4 zusätzlich für ein oder mehrere $\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)}$, daß $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)}}(\xi_{\nu,\mu}) = a_\mu^{(1)}$ für $\nu_\mu = 1, \ldots, n_\mu$ und daß $\xi_{\nu_1,\mu} \equiv \xi_{\nu_2,\mu} \bmod^\times \mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)c_\mu}$[18]) mit ganzrationalem $c_\mu \geqq 0$ für alle Paare $\xi_{\nu_1,\mu}, \xi_{\nu_2,\mu}$, so gibt es ein $\xi \in A$ mit*

(5.5) $\qquad w_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)},\mathfrak{q}^{(\nu)}}(\xi - \xi_{\nu,\mu}) \geqq (a_\mu^{(1)} + c_\mu, a_{\nu,\mu}^{(2)})$ *für* $\nu_\mu = 1, \ldots, n_\mu$ *und diese* μ.

Beweis. Sei zunächst μ fest, so gilt für die Elemente $\eta_{\nu,\mu} = \dfrac{\xi_{\nu,\mu}}{\xi_{1,\mu}} - 1$ $v_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)}}(\eta_{\nu,\mu}) \geqq c_\mu$; nach Lemma 8 existiert somit ein $\zeta_\mu \in A$ mit

(5.6) $\qquad w_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)},\mathfrak{q}^{(\nu)}}(\zeta_\mu - \eta_{\nu,\mu}) \geqq (c_\mu, a_{\nu,\mu}^{(2)} - w_{\mathfrak{q}^{(\nu)}}(\xi_{1,\mu}))$ für $\nu_\mu = 1, \ldots, n_\mu$.

Dann leistet $\xi_\mu = (\zeta_\mu + 1)\,\xi_{1,\mu}$ die Approximation (5.5) für μ, wenn man ξ_μ an die Stelle von ξ setzt. Der Übergang zu einem ξ, das für mehrere μ das Gewünschte leistet, geschieht wie im Beweis von Satz 4.

---

[18]) $\bmod^\times$ bedeute die multiplikative Kongruenz im Sinne von Hasse (vgl. [2a], S. 94), d. h. daß $\dfrac{\xi_{\nu_1,\mu}}{\xi_{\nu_2,\mu}} \equiv 1 \bmod \mathfrak{P}_{1\iota}^{(\mu)c_\mu}$ ist.

6. Primstellen, Primdivisorpaare und Vertauschungszulässigkeit

Es seien K_1 und $K_i \neq K_1$ zwei *TK1* des *AF2* A über dem (beliebigen) Konstantenkörper k. Diesen beiden *TK1* entsprechen die Erzeugungen (K_1, K_i) und (K_i, K_1) von A über k mit den Primdivisor- bzw. Primstellensystemen B_{1i} bzw. b_{1i} und B_{i1} bzw. b_{i1}. Aus unseren bisherigen Überlegungen folgt, daß keine der zu B_{1i} gehörigen Bewertungen mit einer zu B_{i1} gehörigen und daß keine der zu b_{1i} gehörigen Bewertungen mit einer zu b_{i1} gehörigen übereinstimmt und umgekehrt. Wir wollen hier auf einem anderen Wege eine Beziehung zwischen den Systemen b_{1i} und b_{i1} konstruieren, die einige wesentliche Folgerungen zuläßt (es ist naheliegend, daß dies nicht schon für B_{1i} und B_{i1} geht). Dazu folgende Überlegungen (wo die Beweise bzw. Begründungen für beide Erzeugungen analog verlaufen, beschränken wir uns auf die Beschreibung des Falles (K_1, K_i)):

Jedem Primdivisor $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ entspricht nach Konstruktion der $\mathfrak{P}_{1i}$ eindeutig ein Primdivisor $\mathfrak{p}_1$ von K_1 über k; $\mathfrak{p}_1$ wird auch durch Einschränkung der zu $\mathfrak{P}_{1i}$ gehörigen Bewertung auf K_1 erhalten. Entsprechendes Vorgehen für $\mathfrak{P}_{i1}$ liefert die eindeutigen Zuordnungen

$$\mathfrak{P}_{1i} \to \mathfrak{p}_1 \text{ von } K_1, \qquad \mathfrak{P}_{i1} \to \mathfrak{p}_i \text{ von } K_i, \tag{6.1}$$

wobei jedem $\mathfrak{p}_1$ von K_1 bzw. jedem $\mathfrak{p}_i$ von K_i mindestens ein und höchstens endlich viele $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ bzw. $\mathfrak{P}_{i1} \in B_{i1}$ entsprechen.

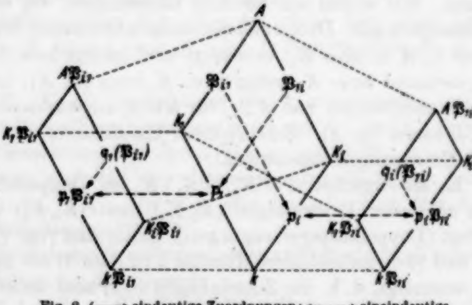


Fig. 2. (—→ eindeutige Zuordnungen; ←——→ eineindeutige Zuordnungen)

Für jedes $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ gilt weiter: Jedem Primdivisor $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})$ von $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_1\mathfrak{P}_{1i}$ entspricht eindeutig ein Primdivisor $\mathfrak{p}_i\mathfrak{P}_{1i}$ von $K_i\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\mathfrak{P}_{1i}$, der durch die Einschränkung der zu $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})$ gehörigen Bewertung auf $K_i\mathfrak{P}_{1i}$ bestimmt ist; da ferner K_i über k isomorph zu $K_i\mathfrak{P}_{1i}$ über $k\mathfrak{P}_{1i}$ ist vermöge des durch die Restabbildung mod $\mathfrak{P}_{1i}$ gelieferten Isomorphismus, entspricht $\mathfrak{p}_i\mathfrak{P}_{1i}$ bei isomorpher Rückabbildung (Bezeichnung: $\mathfrak{P}_{1i}^{-1}$) eineindeutig ein Primdivisor $\mathfrak{p}_i$ von K_i über k. Der entsprechende Sachverhalt gilt bei Vertauschung der Erzeugungskomponenten, und wir erhalten die eindeutigen Zuordnungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i}) &\to \mathfrak{p}_i\mathfrak{P}_{1i} \leftrightarrow \mathfrak{p}_i \text{ von } K_i \text{ mit } \mathfrak{p}_i = (\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i}) \cap K_i\mathfrak{P}_{1i})\,\mathfrak{P}_{1i}^{-1}, \\ \mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1}) &\to \mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_{i1} \leftrightarrow \mathfrak{p}_1 \text{ von } K_1 \text{ mit } \mathfrak{p}_1 = (\mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1}) \cap K_1\mathfrak{P}_{i1})\,\mathfrak{P}_{i1}^{-1}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

wobei, da $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_i\mathfrak{P}_{1i}$ bzw. $A\mathfrak{P}_{i1}$ über $K_1\mathfrak{P}_{i1}$ endlich algebraisch ist, jedem $\mathfrak{p}_i$ nur endlich viele $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})$ von $A\mathfrak{P}_{1i}$ und jedem $\mathfrak{p}_1$ nur endlich viele $\mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1})$ von $A\mathfrak{P}_{i1}$ entsprechen (vgl. Fig. 2).

Aus (6.1) und (6.2) ergibt sich, daß jeder Primstelle von b_{1i} und jeder Primstelle von b_{i1} eindeutig ein Paar von Primdivisoren $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ zugeordnet ist nach dem Schema

$$(6.3)\quad \begin{aligned} &(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})) \to (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i) \text{ mit } \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{P}_{1i} \cap K_1,\ \mathfrak{p}_i = (\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i}) \cap K_i \mathfrak{P}_{1i})\mathfrak{P}_{1i}^{-1} \\ &(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1})) \to (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i) \text{ mit } \mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_{i1} \cap K_i,\ \mathfrak{p}_1 = (\mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1}) \cap K_1 \mathfrak{P}_{i1})\mathfrak{P}_{i1}^{-1} \end{aligned}$$

und daß jedem Primdivisorpaar $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ gemäß (6.3) jeweils mindestens eine höchstens endlich viele Primstellen von b_{1i} bzw. b_{i1} entsprechen.

Definition 5. *Die einem Primdivisorpaar* $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$, *wobei* $\mathfrak{p}_1$ *Primdivisor von* K_1 *über* k *und* $\mathfrak{p}_i$ *Primdivisor von* K_i *über* k *ist, gemäß* (6.3) *zugeordneten endlich vielen Primstellen von* b_{1i} *bzw.* b_{i1} *nennen wir die zu* $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ *gehörigen* b_{1i}*-Primstellen* $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i}))$ *bzw.* b_{i1}*-Primstellen* $(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1}))$. *Das Primdivisorpaar* $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ *heiße vertauschungszulässig, wenn 1. die Anzahl* m_{1i} *der zu* $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ *gehörigen* b_{1i}*-Primstellen* $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}_i)_\mu$ *mit der der* b_{i1}*-Primstellen* $(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q}_1)_\mu$ *übereinstimmt und wenn 2. bei geeigneter Numerierung gilt:*

(6.4) $A(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}_i)_\mu$ *über* $k(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}_i)_\mu$ *ist isomorph* $A(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q}_1)_\mu$ *über* $k(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q}_i)_\mu$ *für* $\mu = 1, \ldots, m_{1i}$.

Diese Vertauschungszulässigkeit ist offensichtlich ein Hilfsmittel, um sich von der Abhängigkeit von der Reihenfolge der Erzeugungsfaktoren zu befreien. Wir wollen anschließend untersuchen, wie weit diese Vertauschungszulässigkeit gilt. Dazu zunächst einige abkürzende Bezeichnungen: Ist $\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}$ über $\mathfrak{p}_1$, d. h. über K_1, verzweigt bzw. zerlegt bzw. träge, so sagen wir, $\mathfrak{p}_1$ sei K_i*-verzweigt* bzw. K_i*-zerlegt* bzw. K_i*-träge* (in A); ist $K_1\mathfrak{p}_1$ sogar der genaue Konstantenkörper von $A\mathfrak{P}_{1i}$ für alle $\mathfrak{p}_1$ zugeordneten $\mathfrak{P}_{1i}$, so sagen wir, $\mathfrak{p}_1$ sei K_i*-konstant* (in A). Entsprechend klassifizieren wir die $\mathfrak{p}_i$ bei Vertauschung der Erzeugungskomponenten.

Es sei zunächst $A = K_{1i} = K_1 \cdot K_i$ ein Doppelkörper über k, und es seien die speziellen Erzeugungen (K_1, K_i) bzw. (K_i, K_1) von A über k zugrundegelegt (Doppelkörpererzeugungen). Dann sind (vgl. [1], insbesondere S. 92 bis 95 und [6c], insbesondere Korollar 2 zu Satz 3) alle $\mathfrak{p}_1$ K_i-unzerlegt und alle $\mathfrak{p}_i$ K_1-unzerlegt, d. h. die Zuordnungen (6.1) sind umkehrbar eindeutig, und für die zugehörigen Restklassenkörper gilt:

$$(6.5)\quad \begin{aligned} &A\mathfrak{P}_{1i} \text{ ist rein-inseparabel algebraisch über } K_i\mathfrak{P}_{1i} \cdot K_1\mathfrak{P}_{1i}, \\ &A\mathfrak{P}_{i1} \text{ ist rein-inseparabel algebraisch über } K_1\mathfrak{P}_{i1} \cdot K_i\mathfrak{P}_{i1}, \end{aligned}$$

wobei evtl. Gleichheit vorliegen kann; weiter ist sogar

$$(6.6)\quad \begin{aligned} &A\mathfrak{P}_{1i} = K_i\mathfrak{P}_{1i} \cdot K_1\mathfrak{P}_{1i} \cong K_i \cdot K_1\mathfrak{p}_1, \text{ falls } K_i \text{ über } k \text{ oder } K_1\mathfrak{p}_1 \text{ über } k\mathfrak{p}_1 \text{ separabel ist,} \\ &A\mathfrak{P}_{i1} = K_1\mathfrak{P}_{i1} \cdot K_i\mathfrak{P}_{i1} \cong K_1 \cdot K_i\mathfrak{p}_i, \text{ falls } K_1 \text{ über } k \text{ oder } K_i\mathfrak{p}_i \text{ über } k\mathfrak{p}_i \text{ separabel ist;} \end{aligned}$$

die Voraussetzungen für (6.6) sind bei vollkommenem k stets erfüllt.

Wir bilden das Kroneckerprodukt $K_1\mathfrak{p}_1 \times K_i\mathfrak{p}_i$, wobei $K_1\mathfrak{p}_1$ bzw. $K_i\mathfrak{p}_i$ als Algebren über $k\mathfrak{p}_1 \cong k$ bzw. $k\mathfrak{p}_i \cong k$ aufgefaßt werden, und bezeichnen sein

Radikal mit $\mathfrak{n}_{1\iota}$ (evtl. ist $\mathfrak{n}_{1\iota} = (0)$). Dann ist

$$(K_1\mathfrak{p}_1 \times K_\iota\mathfrak{p}_\iota)/\mathfrak{n}_{1\iota} = k_{1\iota}^{(1)} \oplus \cdots \oplus k_{1\iota}^{(l_{1\iota})} \tag{6.7}$$

die direkte Summe von $l_{1\iota}$ endlichen Erweiterungskörpern von k. Nach [1], S. 92 entsprechen die Körper $k_{1\iota}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, \ldots, l_{1\iota})$ einerseits umkehrbar eindeutig den Fortsetzungen $\overline{\mathfrak{q}}_\iota^{(\lambda)}(\mathfrak{P}_{1\iota})$ von $\mathfrak{p}_\iota\mathfrak{P}_{1\iota}$ in $K_\iota\mathfrak{P}_{1\iota} \cdot K_1\mathfrak{P}_{1\iota} \cong K_\iota \cdot K_1\mathfrak{p}_1$, und es ist jeweils $(K_\iota\mathfrak{P}_{1\iota} \cdot K_1\mathfrak{P}_{1\iota})\, \overline{\mathfrak{q}}_\iota^{(\lambda)}(\mathfrak{P}_{1\iota})$ rein inseparable Erweiterung von $k_{1\iota}^{(\lambda)}$; andererseits entsprechen sie umkehrbar eindeutig den Fortsetzungen $\overline{\mathfrak{q}}_1^{(\lambda)}(\mathfrak{P}_{\iota 1})$ von $\mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_{\iota 1}$ in $K_1\mathfrak{P}_{\iota 1} \cdot K_\iota\mathfrak{P}_{\iota 1} \cong K_1 \cdot K_\iota\mathfrak{p}_\iota$, und es ist jeweils $(K_1\mathfrak{P}_{\iota 1} \cdot K_\iota\mathfrak{P}_{\iota 1})\, \overline{\mathfrak{q}}_1^{(\lambda)}(\mathfrak{P}_{\iota 2})$ rein inseparable Erweiterung von $k_{1\iota}^{(\lambda)}$. Bei der noch möglichen rein-inseparablen Erweiterung von $K_1\mathfrak{P}_{1\iota} \cdot K_\iota\mathfrak{P}_{1\iota}$ zu $K_{1\iota}\mathfrak{P}_{1\iota}$ bzw. von $K_\iota\mathfrak{P}_{\iota 1} \cdot K_1\mathfrak{P}_{\iota 1}$ zu $K_{1\iota}\mathfrak{P}_{\iota 1}$ treten keine Zerlegungen und höchstens rein-inseparable Restklassenkörpererweiterungen auf; somit entsprechen jedem Paar $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_\iota)$ gleich viele zugehörige $b_{1\iota}$- und $b_{\iota 1}$-Primstellen, und bei geeigneter Numerierung enthalten die Restklassenkörper $K_{1\iota}(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}_\iota)_\lambda$ und $K_{1\iota}(\mathfrak{P}_{\iota 1}, \mathfrak{q}_1)_\lambda$ den dem Typus nach gemeinsamen Teilkörper $k_{1\iota}^{(\lambda)}$, über dem sie beide rein inseparabel sind.

Ist speziell $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ oder $K_\iota\mathfrak{p}_\iota$ über $k\mathfrak{p}_\iota$ separabel, so ist das Radikal $\mathfrak{n}_{1\iota} = (0)$, und es gilt

$$\begin{gathered} K_1\mathfrak{p}_1 \times K_\iota\mathfrak{p}_\iota = k_{1\iota}^{(1)} \oplus \cdots \oplus k_{1\iota}^{(l_{1\iota})}, \\ \text{wobei } k_{1\iota}^{(\lambda)}/k \cong K_{1\iota}(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}_\iota)_\lambda \cong K_{1\iota}(\mathfrak{P}_{\iota 1}, \mathfrak{q}_1)_\lambda \text{ für } \lambda = 1, \ldots, l_{1\iota}. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Da aus der Existenz eines separablen $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ (bzw. $K_\iota\mathfrak{p}_\iota$ über $k\mathfrak{p}_\iota$) schon die Separabilität von K_1 über k (bzw. K_ι über k) folgt[19]), so ergibt sich aus (6.6) und (6.8) der

Satz 5. *Ist $A = K_{1\iota} = K_1 \cdot K_\iota$ ein Doppelkörper über k, so entsprechen jedem Primdivisorpaar $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_\iota)$ der Doppelkörpererzeugung gleich viele $b_{1\iota}$- und $b_{\iota 1}$-Primstellen, und bei geeigneter Numerierung enthalten $A(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}_\iota)_\lambda$ und $A(\mathfrak{P}_{\iota 1}, \mathfrak{q}_1)_\lambda$ einen zu $k_{1\iota}^{(\lambda)}$ isomorphen Teilkörper und sind über diesem jeweils endliche rein-inseparable Erweiterungen $(\lambda = 1, \ldots, l_{1\iota})$. Ist $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ oder $K_\iota\mathfrak{p}_\iota$ über $k\mathfrak{p}_\iota$ separabel, so ist $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_\iota)$ vertauschungszulässig*[20]).

Da nun jede endlich-algebraische Erweiterung eines vollkommenen Körpers k separabel über k ist, erhalten wir das folgende

Korollar zu Satz 5. *Ist $A = K_{1\iota} = K_1 \cdot K_\iota$ ein Doppelkörper über einem vollkommenen Körper k, so sind alle zur Doppelkörpererzeugung gehörigen Primdivisorpaare $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_\iota)$ vertauschungszulässig.*

Es sei nun (K_1, K_ι) eine Erzeugung eines *AF2* A über dem beliebigen Konstantenkörper k mit der Eigenschaft, daß A über $K_1 \cdot K_\iota = K_{1\iota}$ separabel

[19]) Ist $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ separabel, so gibt es nach dem Riemann-Rochschen Satz ein $x_1 \in K_1$, das $\mathfrak{p}_1$ als einzigen Pol besitzt und für das $v_{\mathfrak{p}_1}(x_1)$ prim zur Charakteristik p von k ist (wähle $v_{\mathfrak{p}_1}(x_1)$ genügend groß). Es sei $\mathfrak{p}_{10}$ der unter $\mathfrak{p}_1$ liegende Primdivisor von $k(x_1)$ ($\mathfrak{p}_1$ ist die einzige Fortsetzung von $\mathfrak{p}_{10}$ in K_1), K_1' die maximal separable Erweiterung von $k(x_1)$ in K_1 und $\mathfrak{p}_1'$ die Fortsetzung von $\mathfrak{p}_{10}$ in K_1'. Wäre nun $K_1 \neq K_1'$, so wäre bei dieser rein-inseparablen Erweiterung entweder $\mathfrak{p}_1$ über $\mathfrak{p}_1'$ verzweigt von durch p teilbarer Verzweigungsordnung (unmöglich, da $(v_{\mathfrak{p}_1}(x), p) = 1$) oder $K_1\mathfrak{p}_1$ über $K_1'\mathfrak{p}_1'$ rein-inseparabel (unmöglich, da $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ separabel ist). Somit ist x_1 separierende Variable für K_1 über k.

[20]) Dieser Satz ist eine Kombination der Aussagen über das Verhalten der *AF1*-Primdivisoren bei Konstantenerweiterung (vgl. [1]).

ist[21]). Wir wollen nun ein hinreichendes Kriterium für die Vertauschungszulässigkeit eines Primdivisorpaares $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ herleiten.

Nach Voraussetzung ist A über K_{1i} separabel, d. h. es existiert ein primitives Element y für A über K_{1i} und es ist

(6.9) $A = K_{1i}(y)$ mit $g(y) = 0$, wo $g(Y) = Y^n + a_1 Y^{n-1} + \cdots + a_n \in K_{1i}[Y]$,

d. h. $g(Y)$ ist ein normiertes irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus K_{1i}. Wenn alle Koeffizienten a_ν $\mathfrak{P}^*_{1i}$-ganz (bzw. $\mathfrak{P}^*_{i1}$-ganz) sind, so ist y ganz für $\mathfrak{P}^*_{1i} \in B^*_{1i}$ (bzw. ganz für $\mathfrak{P}^*_{i1} \in B^*_{i1}$) und für jedes $\mathfrak{P}^*_{1i}$ (bzw. $\mathfrak{P}^*_{i1}$) gibt es ein solches $\mathfrak{P}^*_{1i}$-ganzes ($\mathfrak{P}^*_{i1}$-ganzes) primitives $y \in A$.

Sind alle a_ν $\mathfrak{P}^*_{1i}$-ganz, so können wir das Polynom

$$(6.10) \qquad g_{\mathfrak{P}^*_{1i}}(Y) = Y^n + (a_1 \mathfrak{P}^*_{1i})\, Y^{n-1} + \cdots + (a_n \mathfrak{P}^*_{1i}) \in K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}[Y]$$

bilden (entsprechend erklärt man $g_{\mathfrak{P}^*_{i1}}(Y)$). Ist weiter $\mathfrak{p}_i$ ein Primdivisor von K_i, so entspricht diesem der *AF1*-Divisor $\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}^*_{1i}$ von $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}$ (entsprechend (6.2)), der ein ganzer Divisor, aber nicht notwendig ein Primdivisor von $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}$ ist; seine Primteiler sind die Primdivisoren $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}^*_{1i})$. Sind nun alle Koeffizienten $a_\nu \mathfrak{P}^*_{1i}$ von $g_{\mathfrak{P}^*_{1i}}(Y)$ für $\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}^*_{1i}$, d. h. für alle zugehörigen $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}^*_{1i})$, ganz, so setzen wir

$$(6.11) \qquad g_{\mathfrak{P}^*_{1i}, \mathfrak{p}_i}(Y) = Y^n + (a_1 \mathfrak{P}^*_{1i} \mathfrak{p}_i)\, Y^{n-1} + \cdots + (a_n \mathfrak{P}^*_{1i} \mathfrak{p}_i),$$

wobei $(a_\nu \mathfrak{P}^*_{1i} \mathfrak{p}_i) = (a_\nu \mathfrak{P}^*_{1i})\, \mathfrak{p}_i \mathfrak{P}^*_{1i}$ Element des im allgemeinen Nullteiler enthaltenden Ringes $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}\mathfrak{p}_i = K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i} \bmod \mathfrak{p}_i \mathfrak{P}^*_{1i}$ ist, d. h. $g_{\mathfrak{P}^*_{1i}, \mathfrak{p}_i}(Y)$ ist ein Polynom aus $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}\mathfrak{p}_i[Y]$; analog wird $g_{\mathfrak{P}^*_{i1}, \mathfrak{p}_1}(Y)$ erklärt. Unser Kriterium lautet nun:

Lemma 9. *Es sei A eine endliche separable Erweiterung eines Doppelkörpers K_{1i} und $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ ein zugehöriges Primdivisorpaar, für das entweder $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ oder $K_i\mathfrak{p}_i$ über $k\mathfrak{p}_i$ separabel ist. Hinreichend für die Vertauschungszulässigkeit von $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ ist die Existenz eines primitiven Elementes y für A über K_{1i} mit der erzeugenden Gleichung $g(y) = 0$ und den folgenden Eigenschaften:*

(V_1) *Die Potenzen $1, y, \ldots, y^{n-1}$ bilden sowohl eine $\mathfrak{P}^*_{1i}$- als auch eine $\mathfrak{P}^*_{i1}$-Ganzheitsbasis für A über K_{1i}*[22]).

(V_2) *Für jedes zu $\mathfrak{p}_1$ gehörige $\mathfrak{P}_{1i}$ und zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})$ ist $1\mathfrak{P}_{1i}, y\mathfrak{P}_{1i}, y^2\mathfrak{P}_{1i}, \ldots$ eine $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})$-Ganzheitsbasis von $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}$, und für jedes zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige $\mathfrak{P}_{i1}$ und zu $\mathfrak{p}_1$ gehörige $\mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1})$ ist $1\mathfrak{P}_{i1}, y\mathfrak{P}_{i1}, y^2\mathfrak{P}_{i1}, \ldots$ eine $\mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1})$-Ganzheitsbasis von $A\mathfrak{P}_{i1}$ über $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{i1}$.*

(V_3) *Es ist $g_{\mathfrak{P}^*_{1i}, \mathfrak{p}_i}(Y) = g_{\mathfrak{P}^*_{i1}, \mathfrak{p}_1}(Y)$ bei dem natürlichen Isomorphismus zwischen $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}\mathfrak{p}_i$ und $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{i1}\mathfrak{p}_1$.*

Beweis. Wegen (V_1) ist $g_{\mathfrak{P}^*_{1i}}(Y)$ bildbar, seine Zerlegung in irreduzible Faktoren

$$(6.12) \qquad g_{\mathfrak{P}^*_{1i}}(Y) = \prod_{\mathfrak{P}_{1i}/\mathfrak{P}^*_{1i}} g_{\mathfrak{P}_{1i}}(Y)^{e^*_{\mathfrak{P}_{1i}}} \text{ mit } g_{\mathfrak{P}_{1i}}(Y) \in K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}[Y]$$

---

[21]) Eine solche Erzeugung existiert, wenn A über k separabel ist (vgl. [6c], Abschnitt 2).

[22]) Dies ist bei vorgegebenem y für fast alle $\mathfrak{P}^*_{1i}$ erfüllt; ferner gibt es für fast alle $\mathfrak{P}^*_{1i}$ ein solches y (außerwesentliche Diskriminantenteiler von A über K_{1i} ausgeschlossen).

entspricht eineindeutig dem Zerlegungsgesetz von $\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}$ in A, und die Elemente $y\mathfrak{P}_{1\iota}$ sind jeweils primitive Elemente für $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ über $K_{1\iota}\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}$ mit der normierten irreduziblen Gleichung $g_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(y\mathfrak{P}_{1\iota}) = 0$. Entsprechendes gilt bei Vertauschung der Komponenten.

Wegen der vorausgesetzten Separabilität von $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ oder $K_\iota\mathfrak{p}_\iota$ über $k\mathfrak{p}_\iota$ ist (vgl. (6.7), (6.8) und Satz 5)

$$K_{1\iota}\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}\mathfrak{p}_\iota \cong k_{1\iota}^{(1)} \oplus \cdots \oplus k_{1\iota}^{(l_{1\iota})} \cong K_{1\iota}\mathfrak{P}_{\iota 1}^{*}\,\mathfrak{p}_1, \tag{6.13}$$

wobei bei geeigneter Numerierung die $k_{1\iota}^{(\lambda)}$ den Primstellen $(\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}, \mathfrak{q}_\iota^{*})_\lambda$ bzw. $(\mathfrak{P}_{\iota 1}^{*}, \mathfrak{q}_\iota^{*})_\lambda$ umkehrbar eindeutig entsprechen.

Wegen (V_2) sind zunächst die Polynome $g_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{*},\mathfrak{p}_\iota}(Y)$ und entsprechend auch $g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}(Y)$ bildbar, und diese sind entsprechend (6.13) in eine direkte Summe zerlegbar (im Sinne der zugehörigen isomorphen Abbildung)

$$\begin{aligned} g_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{*},\mathfrak{p}_\iota}(Y) &= g_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{*},\mathfrak{p}_\iota}^{(1)}(Y) \oplus \cdots \oplus g_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{*},\mathfrak{p}_\iota}^{(l_{1\iota})}(Y),\\ g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}(Y) &= g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}^{(1)}(Y) \oplus \cdots \oplus g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}^{(l_{1\iota})}(Y), \end{aligned} \tag{6.14}$$

wobei $g_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{*},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda)}(Y)$ und $g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda)}(Y)$ jeweils ein Polynom aus $k_{1\iota}^{(\lambda)}[Y]$ mit dem höchsten Koeffizienten 1_λ (Einselement von $k_{1\iota}^{(\lambda)}$) ist; hierbei gilt entsprechend (6.12) die Produktzerlegung

$$g_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{*},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda)}(Y) = \prod_{\mathfrak{P}_{1\iota}|\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}} g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda)}(Y)^{e^{*}_{\mathfrak{P}_{1\iota}}} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l_{1\iota}). \tag{6.15}$$

Ist weiter

$$g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda)}(Y) = \prod_{\nu} g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda,\nu)}(Y)^{e_{\lambda,\nu}} \quad (\lambda = 1, \ldots, l_{1\iota}; \mathfrak{P}_{1\iota}|\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}) \tag{6.16}$$

die Zerlegung von $g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda)}(Y)$ in irreduzible Faktoren aus $k_{1\iota}^{(\lambda)}[Y]$, so entspricht bei festem λ (wegen (V_2) und da $g_{\mathfrak{P}_{1\iota}}(Y)$ irreduzible Gleichung für $A\mathfrak{P}_{1\iota}$ über $K_{1\iota}\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}$ ist) die durch (6.15) und (6.16) gelieferte Zerlegung von $g_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{*},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda)}(Y)$ in irreduzible Faktoren $g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda,\nu)}(Y)$ eineindeutig dem Zerlegungsgesetz der Primstelle $(\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}, \mathfrak{q}_\iota^{*})_\lambda$ von $K_{1\iota}$ in Primstellen $(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}_\iota)_\mu$ von A, und die zugehörigen Restklassenkörper $A(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}_\iota)_\mu$ sind:

$$k_{1\iota}^{(\lambda)}[Y] \bmod g_{\mathfrak{P}_{1\iota},\mathfrak{p}_\iota}^{(\lambda,\nu)}(Y) \qquad (\lambda = 1, \ldots, l_{1\iota};\ \nu = 1, \ldots;\ \mathfrak{P}_{1\iota}|\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}). \tag{6.17}$$

Dies gilt für jedes λ. Entsprechendes gilt bei Vertauschung der Erzeugungskomponenten.

Wegen (V_3) haben die Polynome $g_{\mathfrak{P}_{1\iota}^{*},\mathfrak{p}_\iota}(Y)$ und $g_{\mathfrak{P}_{\iota 1}^{*},\mathfrak{p}_1}(Y)$ bei Fortsetzung des natürlichen Isomorphismus zwischen $K_{1\iota}\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}\mathfrak{p}_\iota$ und $K_{1\iota}\mathfrak{P}_{\iota 1}^{*}\mathfrak{p}_1$ gemäß (6.13) auf $K_{1\iota}\mathfrak{P}_{1\iota}^{*}\mathfrak{p}_\iota[Y]$ und $K_{1\iota}\mathfrak{P}_{\iota 1}^{*}\mathfrak{p}_1[Y]$ die gleiche Zerlegung (6.14), und da gemäß (6.17) die Restklassenkörper $A(\mathfrak{P}_{1\iota}, \mathfrak{q}_\iota)_\mu$ und entsprechend $A(\mathfrak{P}_{\iota 1}, \mathfrak{q}_1)_\mu$ charakterisiert sind, folgt die Vertauschungszulässigkeit von $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_\iota)$, und Lemma 9 ist bewiesen.

Um aus Lemma 9 eine Bestimmung oder Abschätzung aller vertauschungszulässigen $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_\iota)$ herzuleiten, muß man prüfen, für welche Paare $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_\iota)$ es ein primitives Element $y \in A$ mit den Eigenschaften (V_1), (V_2) und (V_3) gibt.

Sind $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_1}$ bzw. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_\iota}$ die zu $\mathfrak{p}_1$ bzw. $\mathfrak{p}_\iota$ gehörigen Bewertungsringe von K_1 bzw. K_ι, so bezeichne $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_\iota} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_1} \cdot \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_\iota}$ das Kompositum (Kroneckerprodukt) über k

der Ringe $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_1}$ und $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_i}$ ist ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K_{1i}, dessen Elemente als endliche Linearkombinationen $\sum_\lambda \xi_{1,\lambda}\xi_{i,\lambda}$ $(\xi_{1,\lambda}\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_1}, \xi_{i,\lambda}\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i})$ darstellbar sind. — Sind nun alle Koeffizienten des normierten Polynoms $g(Y)$ aus $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_i}$ d. h. $a_\nu=\sum_\lambda \xi^{(\nu)}_{1,\lambda}\xi^{(\nu)}_{i,\lambda}$ mit $\xi^{(\nu)}_{1,\lambda}\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_1}$, $\xi^{(\nu)}_{i,\lambda}\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$ $(\nu=1,\ldots,n)$, so ist

$$(6.18)\qquad \begin{aligned} &a_\nu\mathfrak{P}^*_{1i}=\sum_\lambda(\xi^{(\nu)}_{1,\lambda}\mathfrak{p}_1)\,\xi^{(\nu)}_{i,\lambda},\quad a_\nu\mathfrak{P}^*_{i1}=\sum_\lambda(\xi^{(\nu)}_{i,\lambda}\mathfrak{p}_i)\,\xi^{(\nu)}_{1,\lambda},\\ &a_\nu\mathfrak{P}^*_{1i}\mathfrak{p}_i=\sum_\lambda(\xi^{(\nu)}_{1,\lambda}\mathfrak{p}_1)(\xi^{(\nu)}_{i,\lambda}\mathfrak{p}_i)=a_\nu\mathfrak{P}^*_{i1}\mathfrak{p}_1 \qquad (\nu=1,\ldots,n),\end{aligned}$$

woraus (V_3) folgt; außerdem ist y in diesem Fall $\mathfrak{P}^*_{1i}$- und $\mathfrak{P}^*_{i1}$-ganz, $y\mathfrak{P}_{1i}$ ist $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})$-ganz und $y\mathfrak{P}_{i1}$ ist $\mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1})$-ganz.

Es sei nun $x_1\in K_1$, $x_1\notin k$ und $x_i\in K_i$, $x_i\notin k$. Mit $\mathfrak{r}_{x_1}$ bzw. $\mathfrak{r}_{x_i}$ bezeichnen wir den Ring der x_1- bzw. x_i-ganzen Elemente von K_1 bzw. K_i und mit $\mathfrak{R}_{x_1,x_i}=\mathfrak{r}_{x_1}\cdot\mathfrak{r}_{x_i}$ das Kompositum über k dieser beiden Ringe. $\mathfrak{R}_{x_1,x_i}$ ist ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K_{1i}, und für alle den Nenner von x_1 nicht teilenden $\mathfrak{p}_1$ und alle den Nenner von x_i nicht teilenden $\mathfrak{p}_i$ ist $\mathfrak{R}_{x_1,x_i}\subseteq\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_i}$. Es sei y ein primitives Element für A über K_{1i}, dessen normierte erzeugende Gleichung $g(Y)$ Koeffizienten $a_\nu\in\mathfrak{R}_{x_1,x_i}$ hat (ein solches existiert stets), das also über $\mathfrak{R}_{x_1,x_i}$ ganz ist. Dann gibt es ein aus fast allen $\mathfrak{p}_1$ bestehendes System S'_{1i} und ein aus fast allen $\mathfrak{p}_i$ bestehendes System S'_{i1}, so daß $1, y,\ldots,y^{n-1}$ $\mathfrak{P}^*_{1i}$-Ganzheitsbasis und zugleich $\mathfrak{P}^*_{i1}$-Ganzheitsbasis für alle S'_{1i} gemäß (6.1.) entsprechenden $\mathfrak{P}^*_{1i}$ und S'_{1i} gemäß (6.1) entsprechenden $\mathfrak{P}^*_{i1}$, und weiter gilt nach Obigem (V_3) für diese Paare $(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_i)$.

Durch Fortlassen der endlich vielen K_i-verzweigten oder K_i-zerlegten $\mathfrak{p}_1$ aus S'_{1i} bzw. der endlich vielen K_1-verzweigten oder K_1-zerlegten $\mathfrak{p}_i$ aus S'_{i1} entstehen Teilsysteme S''_{1i} bzw. S''_{i1}. Dann ist

$$(6.19)\qquad \begin{aligned} &1\mathfrak{P}_{1i}, y\mathfrak{P}_{1i},\ldots,y^{n-1}\mathfrak{P}_{1i} \text{ Basis für } A\mathfrak{P}_{1i} \text{ über } K_{1i}\mathfrak{P}_{1i}, \text{ falls } \mathfrak{P}_{1i}\to\mathfrak{p}_1\in S''_{1i},\\ &1\mathfrak{P}_{i1}, y\mathfrak{P}_{i1},\ldots,y^{n-1}\mathfrak{P}_{i1} \text{ Basis für } A\mathfrak{P}_{i1} \text{ über } K_{1i}\mathfrak{P}_{i1}, \text{ falls } \mathfrak{P}_{i1}\to\mathfrak{p}_i\in S''_{i1}.\end{aligned}$$

Die Basisdiskriminante $d(y)$ von $1, y,\ldots,y^{n-1}$ stimmt mit der Diskriminante des Polynoms $g(Y)$ bis auf das Vorzeichen überein, ist also ein Element von $\mathfrak{R}_{x_1,x_i}$. Somit ist $d(y)\mathfrak{P}^*_{1i}=d(y\mathfrak{P}_{1i})$ für S''_{1i} entsprechende $\mathfrak{P}_{1i}$ und $d(y)\mathfrak{P}^*_{i1}=d(y\mathfrak{P}_{i1})$ für S''_{i1} entsprechende $\mathfrak{P}_{i1}$, d. h. durch Restklassenbildung entsteht die Basisdiskriminante der zugehörigen Restklassenkörper, und diese ist zudem ganz für alle $\mathfrak{p}_1\in S''_{1i}$ bzw. $\mathfrak{p}_i\in S''_{i1}$ gemäß (6.2) entsprechenden Primdivisoren der Restklassenkörper. Weiter ist entsprechend zu (6.18)

$$(6.20)\qquad d(y)\mathfrak{P}^*_{1i}\mathfrak{p}_i=d(y)\mathfrak{P}^*_{i1}\mathfrak{p}_1 \quad\text{für } \mathfrak{P}^*_{1i}\to\mathfrak{p}_1\in S''_{1i},\ \mathfrak{P}^*_{i1}\to\mathfrak{p}_i\in S''_{i1},$$

d. h. dieser Ausdruck ist Nullteiler im Restklassenring $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}\mathfrak{p}_i\cong K_{1i}\mathfrak{P}^*_{i1}\mathfrak{p}_1$ oder nicht, unabhängig von der Reihenfolge der Restklassenbildung.

Falls $d(y)\mathfrak{P}^*_{1i}\mathfrak{p}_i$ Nichtnullteiler ist, d. h. falls $d(y)\mathfrak{P}^*_{1i}$ Einheit modulo allen Primteilern $\mathfrak{q}^*_i(\mathfrak{P}^*_{1i})$ von $\mathfrak{p}_i$ in $K_{1i}\mathfrak{P}^*_{1i}$ ist (dies trifft bei festem $\mathfrak{P}_{1i}\to\mathfrak{p}_1\in S''_{1i}$[23]) für fast alle $\mathfrak{p}_i\in S''_{i1}$ zu), so ist $1\mathfrak{P}_{1i}, y\mathfrak{P}_{1i},\ldots,y^{n-1}\mathfrak{P}_{1i}$ Ganzheitsbasis für alle

[23]) Bis auf endlich viele Ausnahme-$\mathfrak{P}_{1i}$.

Primteiler $\mathfrak{q}_i^*$ ($\mathfrak{P}_{1i}^*$) von $\mathfrak{p}_i$. Wegen (6.20) ist dann auch $1\,\mathfrak{P}_{i1}, y\mathfrak{P}_{i1}, \ldots, y^{n-1}\mathfrak{P}_{i1}$ Ganzheitsbasis für alle Primteiler $\mathfrak{q}_i^*$ ($\mathfrak{P}_{i1}^*$) von $\mathfrak{p}_1$. Folglich sind die Forderungen (V_1), (V_2) und (V_3) erfüllt.

Falls $d(y)\mathfrak{P}_{1i}^* \neq 0$ ist (dies trifft für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}^* \to \mathfrak{p}_1 \in S_{1i}''$ zu, inseparable Restklassenkörpererweiterungen ausgeschlossen), so ist die Zahl der zugehörigen Ausnahme-$\mathfrak{p}_i$ (mit $d(y)\mathfrak{P}_{1i}^*\,\mathfrak{p}_i$ = Nullteiler) durch die Zahl der nicht in S_{i1}'' liegenden $\mathfrak{p}_i$ und durch den Grad von $d(y)$ beschränkt[24]); somit gibt es eine allen diesen $\mathfrak{p}_1$ gemeinsame Schranke für die Ausnahme-$\mathfrak{p}_i$. Entsprechendes gilt bei Vertauschung der Komponenten.

Um nun Lemma 9 wirklich anwenden zu können, muß man noch voraussetzen, daß entweder $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\,\mathfrak{p}_1$ oder $K_i\mathfrak{p}_i$ über $k\,\mathfrak{p}_i$ separabel ist. Es ist jedoch durchaus möglich, daß neben den hier erfaßten Fällen noch für weitere Paare $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ Vertauschungszulässigkeit vorliegt[25]). Auf jeden Fall erhalten wir das folgende (evtl. grobe) Ergebnis:

Satz 6. *Es sei (K_1, K_i) eine Erzeugung des AF2 A über k, und es sei A separabel-algebraisch über dem Doppelkörper $K_{1i} = K_1 \cdot K_i$. Dann gibt es ein aus fast allen $\mathfrak{p}_1$ mit separablem $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ bestehendes System S_{1i} und eine natürliche Zahl N_{1i}, so daß für jedes $\mathfrak{p}_1 \in S_{1i}$ und jeweils fast alle $\mathfrak{p}_i$ bis auf höchstens N_{1i} Ausnahme-$\mathfrak{p}_i$ das Primdivisorpaar $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ vertauschungszulässig ist; entsprechend gibt es ein aus fast allen $\mathfrak{p}_i$ mit separablem $K_i\mathfrak{p}_i$ über $k\mathfrak{p}_i$ bestehendes System S_{i1} und eine natürliche Zahl N_{i1}, so daß für jedes $\mathfrak{p}_i \in S_{i1}$ und alle $\mathfrak{p}_1$ bis auf höchstens N_{i1} Ausnahmen $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ vertauschungszulässig ist.*

Wenn es kein oder nur endlich viele $\mathfrak{p}_1$ mit separablem $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ (entsprechend beim Index i) gibt, garantiert Satz 6 keineswegs, daß es überhaupt ein vertauschungszulässiges Paar $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ gibt, d. h. die Aussage kann in diesem Fall leer sein. Dies ist jedoch anders, wenn es z. B. unendlich viele $\mathfrak{p}_1$ mit separablem $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ gibt. Falls speziell k ein vollkommener Körper ist, so ist stets $K_1\mathfrak{p}_1$ über $k\mathfrak{p}_1$ und $K_i\mathfrak{p}_i$ über $k\mathfrak{p}_i$ separabel, und wir erhalten

Korollar 1 zu Satz 6. *Ist unter den Voraussetzungen von Satz 6 zusätzlich k ein vollkommener Körper, so besteht das System S_{1i} aus Satz 6 aus fast allen $\mathfrak{p}_1$ von K_1 über k und S_{i1} aus fast allen $\mathfrak{p}_i$ von K_i über k.*

Bei vollkommenem Körper k gilt überdies noch die folgende Verschärfung von Satz 6 und seinem Korollar 1.

Korollar 2 zu Satz 6. *Ist (K_1, K_i) eine Erzeugung des AF2 A über dem vollkommenen Körper k, so gelten die Aussagen von Satz 6 und seinem Korollar 1 auch dann, wenn A über K_{1i} nicht separabel ist*[26]).

Beweis. Ist A_{1i} die maximal separable in A enthaltene Erweiterung von K_{1i}, so ist Satz 6 und Korollar 1 zunächst für A_{1i} über K_{1i} richtig. Da bei der rein inseparablen Erweiterung von A_{1i} zu A jedes $\bar{\mathfrak{P}}_{1i}$ (bzw. jedes $\bar{\mathfrak{P}}_{i1}$) von A_{1i} genau eine Fortsetzung $\mathfrak{P}_{1i}$ (bzw. $\mathfrak{P}_{i1}$) besitzt und da $A\mathfrak{P}_{1i}$ über $A_{1i}\bar{\mathfrak{P}}_{1i}$ (bzw.

---

[24]) Für nicht in $d(y)\mathfrak{P}_{1i}^*$ aufgehende $\mathfrak{q}_i^*$ ($\mathfrak{P}_{1i}^*$) ist nämlich (6.19) eine $\mathfrak{q}_i^*$ ($\mathfrak{P}_{1i}^*$)-Ganzheitsbasis.

[25]) Zum Beispiel können schon beim Übergang von der Transzendenzbasis x_1, x_i zu x_1', x_i' weitere Paare $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ erfaßt werden.

[26]) Dieses Korollar und die Idee seines Beweises entspricht dem Satz 6 aus [6c].

$A\mathfrak{P}_{i1}$ über $A_{1i}\mathfrak{P}_{i1}$) rein inseparabel algebraisch ist (vgl. [1], S. 94), sind die Primdivisoren $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})$ bzw. $\mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1})$ beim Übergang zu $A\mathfrak{P}_{1i}$ bzw. $A\mathfrak{P}_{i1}$ wegen der Vollkommenheit von k rein-verzweigt, d. h. ihre Anzahl und ihre Restklassenkörper ändern sich nicht; dies ergibt aber die Behauptung.

Durch die Überlegungen, die zu Satz 6 und seinen Korollaren führten, ist jedoch keineswegs garantiert, daß zu allen $\mathfrak{p}_1 \in S_{1i}$ die gleichen Ausnahme-$\mathfrak{p}_i$ gehören (wenn auch deren Anzahl durch N_{1i} beschränkt ist). Es ist vielmehr eine offene Frage, ob beim Übergang von einem $\mathfrak{p}_1$ zu einem anderen $\mathfrak{p}_1$ endlich viele neue Ausnahme-$\mathfrak{p}_i$ auftreten und dafür alte Ausnahme-$\mathfrak{p}_i$ fortfallen können[27]). Ferner ist es nach den obigen Ergebnissen durchaus möglich, daß unendlich viele nicht vertauschungszulässige Paare $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ auftreten können, und diese Ausnahmepaare sind zudem rechnerisch noch nicht genau festgelegt. Beachtet man dagegen, daß bei vollkommenem k im Fall einer Doppelkörpererzeugung (Korollar zu Satz 5) kein Ausnahmepaar auftritt, d. h. daß dort die Aussage von Satz 6 zu grob ist, so ist es naheliegend, zumindest für spezielle Erzeugungstypen von $AF2$[28]) eine Korollar 1 und 2 von Satz 6 verschärfende Aussage zu suchen. Wir skizzieren anschließend, zugleich als Beispiel zu den obigen Überlegungen, einen Prototyp einer solchen Untersuchung.

Es sei k ein vollkommener Körper, der die p-ten Einheitswurzeln enthält, wo p eine von der Charakteristik von k verschiedene Primzahl ist. Es sei weiter A ein $AF2$ über k, der über dem rationalen Teilkörper $K_{12} = k(x_1, x_2)$ (separabel) zyklisch vom Grade p ist, und es sei $k(x_1)$ und $k(x_2)$ in A algebraisch abgeschlossen. Nach der Hasseschen Theorie der zyklischen Erweiterungen (vgl. [2b]) existiert dann eine Erzeugung $A = K_{12}(y)$ von A über K_{12} mit

$$y^p = B(x_1, x_2) = \prod_{\nu=1}^{n} P_\nu(x_1, x_2)^{\lambda_\nu} \qquad (0 \leq \lambda_\nu < p), \tag{6.21}$$

wobei $P_\nu(x_1, x_2)$ irreduzibles Polynom aus $k(x_1, x_2)$ für $\nu = 1, \ldots, n$.

Wir betrachten zunächst die „endlichen" Primdivisoren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ (d. h. ausgenommen die Nenner $\mathfrak{p}_{1,\infty}$ bzw. $\mathfrak{p}_{2,\infty}$ von x_1 bzw. x_2), die umkehrbar eindeutig den irreduziblen Polynomen $P(x_1)$ bzw. $P(x_2)$ in x_1 bzw. x_2 allein entsprechen. Für sie gilt entsprechend (6.18) unabhängig von der Reihenfolge der Restklassenbildung $B\mathfrak{P}_{12}^*\mathfrak{p}_2 = B(x_1\mathfrak{p}_1, x_2\mathfrak{p}_2) = B\mathfrak{P}_{21}^*\mathfrak{p}_1 = \bar{B}$ (als Element des Kroneckerprodukts $k(x_1)\mathfrak{p}_1 \times k(x_2)\mathfrak{p}_2$ über k aufgefaßt). Ist $1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{l_{12}}$ die der direkten Summenzerlegung (6.7) von $k(x_1)\,\mathfrak{p}_1 \times k(x_2)\,\mathfrak{p}_2$ entsprechende Zerlegung von 1 in orthogonale Idempotente, so ist

$$Y^p - B(x_1\mathfrak{p}_1, x_2\mathfrak{p}_2) = (\varepsilon_1 Y^p - \varepsilon_1 \bar{B}) \oplus \cdots \oplus (\varepsilon_{l_{12}} Y^p - \varepsilon_{l_{12}} \bar{B}) \tag{6.22}$$

eine direkte Summe von l_{12} Polynomen p-ten Grades aus $k_{12}^{(\lambda)}[Y]$ mit dem jeweiligen höchsten Koeffizienten ε_λ.

---

[27]) Sei z. B. k algebraisch-abgeschlossen und $A = k(x_1, x_i, y)$ mit $y^p = x_1 + x_i$; dann ist stets $x_1\mathfrak{p}_1 = a_1 \in k\,\mathfrak{p}_1$. Bei einem Wechsel der $\mathfrak{p}_1$ werden somit jeweils andere $\mathfrak{p}_i$ in $A\mathfrak{P}_{1i}$ verzweigt, d. h. $d(y\,\mathfrak{P}_{1i})$ ist der Reihe nach durch jedes $\mathfrak{p}_i$ einmal teilbar, und zwar bei jedem $\mathfrak{p}_1$ durch ein anderes $\mathfrak{p}_i$.

[28]) Es kommt hierbei offensichtlich auf die Erzeugung (K_1, K_i) von A über k und auf die Art der Erweiterung A über K_{1i} an; bei einer anderen Erzeugung des gleichen Körpers kann ein ganz anderes Verhalten vorliegen.

Wir zeigen zunächst: *Für fast alle Paare* $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ *bestimmt das Zerlegungsverhalten von* (6.22) *eindeutig die zu* $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ *gehörigen Restklassenkörper* $A(\mathfrak{P}_{12}, \mathfrak{q}_2)$. Zum Beweis unterscheiden wir 4 Fälle:

1) $\mathfrak{p}_1$ *ist* K_2*-träge und kein Polynom von* $K_1\mathfrak{p}_1[x_2]$ *teilt* $B(x_1\mathfrak{p}_1, x_2)$ *genau in einer* p*-ten Potenz.* Dann ist $Y^p - B(x_1\mathfrak{p}_1, x_2)$ irreduzibel und für *jedes* $\mathfrak{p}_2$ entscheidet nach [2b] die Zerlegung von $\varepsilon_\lambda Y^p - \varepsilon_\lambda \overline{B}$ über das Zerlegungsgesetz des zugehörigen $\mathfrak{q}_2^*(\mathfrak{P}_{12}^*)_\lambda$ in $A\mathfrak{P}_{12}$ für $\lambda = 1, \ldots, l_{12}$.

2) $\mathfrak{p}_1$ *ist* K_2*-träge und Fall* 1) *liegt nicht vor.* Dieser Fall kann für höchstens endlich viele träge $\mathfrak{p}_1$ eintreten[29]). Für jedes dieser $\mathfrak{p}_1$ und jeweils fast alle $\mathfrak{p}_2$ (die zu den Ausnahmepolynomen aus $K_1\mathfrak{p}_1[x_2]$ gehörigen ausgenommen) bestimmt das Zerlegungsgesetz der $\varepsilon_\lambda Y^p - \varepsilon_\lambda \overline{B}$ die zugehörigen $A(\mathfrak{P}_{12}, \mathfrak{q}_2)$ eineindeutig.

3) $\mathfrak{p}_1$ *ist* K_2*-zerlegt* (also vollzerlegt, da A über K_{12} zyklisch ist). Da dann schon $Y^p - B(x_1\mathfrak{p}_1, x_2)$ in verschiedene Linearfaktoren zerfällt, zerfällt auch jedes $\varepsilon_\lambda Y^p - \varepsilon_\lambda \overline{B}$ in p Linearfaktoren für jedes $\mathfrak{p}_2$, und diesen $p \cdot l_{12}$ Linearfaktoren entsprechen eineindeutig die $A(\mathfrak{P}_{12}, \mathfrak{q}_2)$.

4) $\mathfrak{p}_1$ *ist* K_2*-verzweigt* (also vollverzweigt). Dann ist schon $B(x_1\mathfrak{p}_1, x_2) = 0$ und also auch stets $\varepsilon_\lambda \overline{B} = 0$. Somit entspricht für jedes $\mathfrak{p}_2$ die Zerlegung der $\varepsilon_\lambda Y^p - \varepsilon_\lambda \overline{B}$ (trivialerweise) dem Zerlegungsgesetz von $\mathfrak{q}_2^*(\mathfrak{P}_{12}^*)$.

Zusammen ergibt dies die obige Aussage. Der entsprechende Sachverhalt gilt natürlich auch bei Vertauschung der Komponenten, d. h. für die $A(\mathfrak{P}_{21}, \mathfrak{q}_1)$. In beiden Fällen zusammen gibt es also höchstens endlich viele Ausnahme-$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$. Hierbei ist noch auf die besondere Lesart des obigen Falles 3) hinzuweisen: Kommt bei Kombination von Fall 3) mit einem anderen Fall zuerst der zerlegte Schritt, so sind auf jeden Fall alle $p \cdot l_{12}$-Linearfaktoren zu zählen, kommt zuerst der andere Schritt, so nur die verschiedenen Linearfaktoren. Dies führt nur zu Komplikationen, falls $\overline{B}$ ein Nullteiler ist, d. h. bei jedem zerlegten $\mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{p}_2$ nur in endlich vielen Fällen. Zusammen ergibt dies: *Fast alle Paare* $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ *sind vertauschungszulässig.*

Um die verbleibenden Primdivisorpaare $(\mathfrak{p}_{1,\infty}, \mathfrak{p}_2)$ bzw. $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{2,\infty})$ bzw. $(\mathfrak{p}_{1,\infty}, \mathfrak{p}_{2,\infty})$ nach der gleichen Methode untersuchen zu können, wendet man die Substitutionen $\left\{x_1 \to \frac{1}{x_1'}\right\}$ bzw. $\left\{x_2 \to \frac{1}{x_2'}\right\}$ bzw. $\left\{x_1 \to \frac{1}{x_1'}, x_2 \to \frac{1}{x_2'}\right\}$ an und bringt die rechte Seite der erzeugenden Gleichung in den neuen Variablen wieder auf die Normalform (6.21). Es zeigt sich, daß fast alle Paare $(\mathfrak{p}_{1,\infty}, \mathfrak{p}_2)$ und $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{2,\infty})$ vertauschungszulässig sind. — Zusammen erhalten wir

Lemma 10. *Ist A eine separable zyklische Erweiterung vom Primzahlgrad p eines rationalen AF2 $k(x_1, x_2)$ mit dem vollkommenen Konstantenkörper k der Charakteristik $\neq p$, der die p-ten Einheitswurzeln enthält, so sind fast alle der zur Erzeugung $(k(x_1), k(x_2))$ gehörigen Primdivisorpaare $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ vertauschungszulässig.*

---

[29]) Zum Ausnahmefall müßte entweder für mindestens ein P_ν aus (6.21) $P_\nu(x_1\mathfrak{p}_1, x_2)$ einen p-ten Potenzfaktor enthalten, oder es müßten zwei verschiedene P_ν modulo $\mathfrak{P}_{12}^*$ einander kongruent werden. Beides ist für höchstens endlich viele $\mathfrak{P}_{12}^*$ möglich, also gibt es insgesamt höchstens endlich viele träge Ausnahme-$\mathfrak{p}_1$.

Mit diesem Lemma ist für einen speziellen Erzeugungstypus ein Satz 6 und seine Korollare wesentlich verschärfendes Ergebnis gewonnen, nämlich daß nur endlich viele Paare $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ nicht vertauschungszulässig sind. Ein ähnlich scharfes Ergebnis kann man zumindest noch für einige weitere Erzeugungstypen erwarten, z. B. für p-Erweiterungen (vgl. [2b] und [6b]), für zyklische Erweiterungen vom Grade n (keine Primzahl) und wenn der Ausgangskörper kein rationaler *AF2* ist in speziellen Fällen.

7. Die arithmetischen Zetafunktionen eines *AF2* und ihre Abhängigkeit von den Erzeugungen

In diesem Abschnitt sei stets k ein Galoisfeld von q Elementen, A ein *AF2* über k und (K_1, K_i) eine Erzeugung von A über k. Dann ist gemäß [6c] ((1.1) und (6.1)) bzw. [6d] (vgl. (4.1))

$$(7.1)\qquad Z_A(s; K_1, K_i) = \prod_{\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}} Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s) \quad (s = \text{komplexe Variable})$$

die zur Erzeugung (K_1, K_i) gehörige arithmetische Zetafunktion von A; hierbei sind die Faktoren $Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s)$ in (7.1) die Kongruenzzetafunktionen der *AF1* $A\mathfrak{P}_{1i}$ und (vgl. [6a], (1.2)) von der Form

$$(7.2)\qquad Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})\\ \text{von } A\mathfrak{P}_{1i}}} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i}))^{-s})^{-1} = \frac{L_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s)}{(1 - q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{-s})(1 - q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{1-s})},$$

wobei $q_{\mathfrak{P}_{1i}} \geq q^{d(\mathfrak{p}_1)}$ die Elementanzahl des Konstantenkörpers von $A\mathfrak{P}_{1i}$ bezeichnet und $L_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s)$ ein Polynom vom Grade $2g(A\mathfrak{P}_{1i})$ in $q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{-s}$ ist. Wegen der Vollkommenheit von k ist $A\mathfrak{P}_{1i} \cong A_{1i}\mathfrak{P}_{1i}$ (A_{1i} = separabler Abschluß von K_{1i} in A), und somit sind fast alle $\mathfrak{p}_1$ K_i-unzerlegt und für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ gilt: $q_{\mathfrak{P}_{1i}} = q^{d(\mathfrak{p}_1)} = q_{\mathfrak{p}_1}$ und[30] $g(A\mathfrak{P}_{1i}) = G(A/K_1) = G$.

Zeichnet man für die endlich vielen K_i-zerlegten $\mathfrak{p}_1$ ein festes zugehöriges $\mathfrak{P}_{1i}$ aus und setzt bei irgendeiner festen Numerierung der Nullstellen $\alpha_{\mathfrak{p}_1,\nu}$ von $L_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s)$ in $q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{-s}$

$$(7.3)\qquad L_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s) = \prod_{\nu=1}^{2g(A\mathfrak{P}_{1i})} \left(1 - \frac{\alpha_{\mathfrak{p}_1,\nu}}{q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{s}}\right), \qquad |\alpha_{\mathfrak{p}_1,\nu}| = \sqrt{q_{\mathfrak{P}_{1i}}},$$

so unterscheidet sich das formale Produkt

$$(7.4)\qquad \prod_{\nu=1}^{2G} \left(\prod_{\mathfrak{p}_1} \left(1 - \frac{\alpha_{\mathfrak{p}_1,\nu}}{q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{s}}\right)\right) \prod_{\mathfrak{p}_1} (1 - q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{-s})^{-1} \prod_{\mathfrak{p}_1} (1 - q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{1-s})^{-1}$$

von $Z_A(s; K_1, K_i)$ nur um endlich viele Zähler- und Nennerfaktoren der Form

$$\left(1 - \frac{\alpha_{\mathfrak{p}_1,\nu}}{q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{s}}\right), \quad (1 - q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{-s}) \quad \text{bzw.} \quad (1 - q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{1-s}).$$

---

[30]) Die Beziehung $g(A\mathfrak{P}_{1i}) = G(A/K_1)$ für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$ ist in [6d] (Korollar 2 zu Satz 2) bewiesen; für die folgenden Überlegungen genügte auch schon die etwas schwächere Ungleichung (5.6) aus [6c]; g bzw. G bedeuten das Geschlecht bzw. das konservative Geschlecht des Körpers (vgl. [6c]).

Da das unendliche Produkt

$$\text{(7.5)} \qquad Z_{K_1}(s) = \prod_{\mathfrak{p}_1} (1 - q_{\mathfrak{p}_1}^{-s})^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}_1} (1 + q_{\mathfrak{p}_1}^{-s} + q_{\mathfrak{p}_1}^{-2s} + \cdots)$$

für $\Re(s) > 1$ absolut konvergent und dort keine Pole und Nullstellen hat, folgt in geläufiger Weise (vgl. [3], S. 229ff.), daß

$$\text{(7.6)} \qquad \prod_{\mathfrak{p}_1} (1 + |q_{\mathfrak{p}_1}^{-s} + q_{\mathfrak{p}_1}^{-2s} + \cdots|) \quad \text{und} \quad \sum_{\mathfrak{p}_1} \sum_{r \geq 1} |q_{\mathfrak{p}_1}^{-rs}|$$

für $\Re(s) > 1$ konvergieren; hieraus und aus den obigen Bemerkungen folgt sofort, daß $\prod_{\mathfrak{p}_1} (1 - q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{-s})^{-1}$ für $\Re(s) > 1$ und $\prod_{\mathfrak{p}_1} (1 - q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{1-s})^{-1}$ für $\Re(s) > 2$ absolut konvergieren.

Wegen (7.3) ist für fast alle $\mathfrak{P}_{1i}$

$$\text{(7.7)} \qquad \left| \frac{\alpha_{\mathfrak{p}_1,\nu}}{q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{s+1/2}} \right| = |q_{\mathfrak{p}_1}^{-s}| \qquad (\nu = 1, \ldots, 2G),$$

d. h. für $\Re(s) > \frac{3}{2}$ sind

$$\text{(7.8)} \qquad \sum_{r \geq 1}' \sum_{\mathfrak{p}_1} \left| \frac{\alpha_{\mathfrak{p}_1,\nu}}{q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{s}} \right|^r \quad \text{und} \quad \prod_{\mathfrak{p}_1} \left(1 - \frac{\alpha_{\mathfrak{p}_1,\nu}}{q_{\mathfrak{P}_{1i}}^{s}}\right)$$

absolut konvergent und haben dort weder Pole noch Nullstellen. Da das Produkt endlich vieler absolut konvergenter unendlicher Produkte im gemeinsamen Konvergenzbereich ebenfalls absolut und damit auch unbedingt konvergent ist (bei beliebiger Umordnung der Faktoren), konvergiert (7.1) für $\Re(s) > 2$ absolut gegen eine in dieser Halbebene pol- und nullstellenfreie Funktion von s [31]).

Da die unendliche Produktdarstellung (7.2) für jedes $Z_{A\mathfrak{P}_{1i}}(s)$ für $\Re(s) > 1$ und da (7.1) für $\Re(s) > 2$ absolut konvergiert, konvergiert auch die durch formales Einsetzen entstehende Produktdarstellung

$$\text{(7.9)} \quad Z_A(s; K_1, K_i) = \prod_{\mathfrak{P}_{1i} \in B_{1i}} \left(\prod_{\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i})} \left(1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{q}(\mathfrak{P}_{1i}))^{-s}\right)^{-1} \right) = \prod_{(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}) \in b_{1i}} (1 - q^{-s f_{\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}}})^{-1}$$

für $\Re(s) > 2$ absolut gegen die durch (7.1) gegebene Funktion. Somit ist $Z_A(s; K_1, K_i)$ eine durch die Beiträge aller Primstellen von b_{1i} bestimmte Funktion, d. h. entspricht der zugehörigen Relativarithmetik von A über k.

Satz 7. *Die zur Erzeugung (K_1, K_i) von A über k gehörige Zetafunktion $Z_A(s; K_1, K_i)$ besitzt die Produktdarstellungen* (7.1) *und* (7.9), *die beide für $\Re(s) > 2$ absolut konvergieren und in dieser Halbebene eine pol- und nullstellenfreie Funktion von s liefern; $Z_A(s; K_1, K_i)$ ist gemäß* (7.9) *dem Primstellensystem b_{1i} in gleicher Weise zugeordnet wie die Kongruenzzetafunktion eines AF1 dem System aller Primdivisoren dieses AF1.*

Da bei der obigen Konvergenzuntersuchung von (7.1) alle unendlichen Teilprodukte bis auf

$$\text{(7.10)} \qquad \prod_{\mathfrak{p}_1} (1 - q^{1-s})^{-1}$$

[31]) Die endlich vielen in (7.4) nicht berücksichtigten Ausnahmefaktoren können nur für $\Re(s) \leq 1$ Pole oder Nullstellen liefern.

schon in der Halbebene $\Re(s) > \frac{3}{2}$ absolut konvergieren und dort keine Pole und Nullstellen liefern, können die im Streifen $\frac{3}{2} < \Re(s) \leq 2$ liegenden Pole und Nullstellen von $Z_A(s; K_1, K_i)$ nur vom Bestandteil (7.10) herrühren. Diese sind aber bekannt, da (7.10) mit $Z_{K_1}(s+1)$ übereinstimmt, und wir erhalten das

Korollar zu Satz 7. *$Z_A(s; K_1, K_i)$ hat in der Halbebene $\Re(s) > \frac{3}{2}$ außer den Polen erster Ordnung bei*

$$s_0 = 2 + 2\pi\, i\, \nu \cdot \log q \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{7.11}$$

keine weiteren Nullstellen und Pole.

Was nun die erwähnte Abhängigkeit der arithmetischen Zetafunktionen von A über k von den Erzeugungen (K_1, K_i) anbetrifft, so wurde in [6c], Satz 5 für den speziellen Erzeugungswechsel $(K_1, K_i) \to (K_1, K_j)$, d. h. bei fester erster Komponente K_1, die folgende Transformationsregel hergeleitet:

$$Z_A(s; K_1, K_j) = Z_A(s; K_1, K_i) \frac{\prod\limits_{\mathfrak{P}_{1j} \in S_{1j}(K_i)} Z_{A\,\mathfrak{P}_{1j}}(s)}{\prod\limits_{\mathfrak{P}_{1i} \in S_{1i}(K_j)} Z_{A\,\mathfrak{P}_{1i}}(s)}; \tag{7.12}$$

hierbei traten im Zähler und Nenner der rechten Seite von (7.12) jeweils endlich viele Zetafunktionen von *AF1* als Störfaktoren auf. Daraus folgte speziell, daß alle in der Halbebene $\Re(s) > 1$ liegenden Pole und Nullstellen der Zetafunktion bei diesem Erzeugungswechsel invariant sind.

Wir wollen hier nun zunächst die Zetafunktionen $Z_A(s; K_1, K_i)$ und $Z_A(s; K_i, K_1)$ miteinander vergleichen. Wir verwenden hierzu die Darstellungen (7.9) dieser Funktionen durch die Primstellen $(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}_i) \in b_{1i}$ bzw. $(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q}_1) \in b_{i1}$ und ordnen diese unter Benutzung von (6.3) und Definition 5 folgendermaßen nach den Paaren $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ um

$$\begin{aligned} Z_A(s; K_1, K_i) &= \prod_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i} Z_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i}(s) \text{ mit } Z_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i}(s) = \prod_{(\mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}_i) \text{ zu } (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)} \left(1 - q^{-s f \mathfrak{P}_{1i}, \mathfrak{q}_i}\right)^{-1}, \\ Z_A(s; K_i, K_1) &= \prod_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i} Z_{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1}(s) \text{ mit } Z_{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1}(s) = \prod_{(\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q}_1) \text{ zu } (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)} \left(1 - q^{-s f \mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{q}_1}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Für vertauschungszulässige Paare $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ gilt $Z_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i}(s) = Z_{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1}(s)$; somit gilt auch die entsprechende Identität für das Teilprodukt über alle vertauschungszulässigen Paare in (7.13). Wir schätzen unter Benutzung von Satz 6 und seinen Korollaren die verbleibenden Restprodukte (der nicht vertauschungszulässigen $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$) ab, wobei wir jedoch zulassen, daß evtl. auch einige vertauschungszulässige Paare (infolge der Ungenauigkeit von Satz 6) in diese Restprodukte mitaufgenommen wurden. Es gilt zunächst formal

$$Z_A(s; K_1, K_i) = Z_A(s; K_i, K_1) \frac{P_{1i}^{(1)}(s)\, P_{1i}^{(2)}(s)}{P_{1i}^{(3)}(s)\, P_{1i}^{(4)}(s)}, \tag{7.14}$$

wobei die Störfaktoren $P_{1i}^{(\nu)}(s)$ folgende Bedeutung und Eigenschaften haben:

Es ist

$$P_{1i}^{(1)}(s) = \prod_{\mathfrak{p}_1 \notin S_{1i}} \prod_{\mathfrak{p}_i} Z_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i}(s) = \prod_{\mathfrak{P}_{1i} \text{ zu } \mathfrak{p}_1 \notin S_{1i}} Z_{A\,\mathfrak{P}_{1i}}(s) \tag{7.15}$$

das Produkt von endlich vielen *AF1*-Kongruenzzetafunktionen, d. h. konvergiert absolut für $\Re(s) > 1$ und hat in dieser Halbebene weder Nullstellen noch Pole. — Weiter ist

$$(7.16)\qquad P_{1i}^{(2)}(s) = \prod_{\mathfrak{p}_1 \in S_{1i}} \Bigl(\prod_{\mathfrak{p}_i}{}^{*} Z_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_i}(s)\Bigr),$$

wobei der Stern an den inneren Produkten bedeutet, daß jeweils über höchstens N_{1i} Primdivisoren $\mathfrak{p}_i$ zu multiplizieren ist[32]). Setzt man nun für $Z_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_i}(s)$ jeweils den durch (7.13) erklärten Ausdruck ein, so ergibt dies

$$(7.17)\quad P_{1i}^{(2)}(s) = \prod_{\mathfrak{p}_1 \in S_{1i}} \prod_{\mu=1}^{m} h_\mu(s;\mathfrak{p}_1), \text{ wobei } h_\mu(s;\mathfrak{p}_1) = \begin{cases} \bigl(1 - q_{\mathfrak{p}_1}^{-r_\mu(\mathfrak{p}_1)s}\bigr)^{-1} \\ \text{oder } 1 \end{cases}$$

mit ganzrationalen Zahlen $r_\mu(\mathfrak{p}_1) \geqq 1$ und einer von $\mathfrak{p}_1$ unabhängigen Schranke m für die Anzahl der inneren Faktoren[33]). Da (7.5) für $\Re(s) > 1$ absolut konvergiert, konvergiert wegen $r_\mu(\mathfrak{p}_1) \geqq 1$ auch jedes Produkt $\prod\limits_{\mathfrak{p}_1 \in S_{1i}} h_\mu(s;\mathfrak{p}_1)$ für $\Re(s) > 1$ absolut gegen eine Funktion von s, die in dieser Halbebene weder Pole noch Nullstellen besitzt, und das gleiche gilt auch für $\prod\limits_{\mu=1}^{m}\Bigl(\prod\limits_{\mathfrak{p}_1 \in S_{1i}} h_\mu(s;\mathfrak{p}_1)\Bigr)$, und wegen der absoluten Konvergenz und (7.17) ist dieser Ausdruck gleich $P_{1i}^{(2)}(s)$ (wenn einige oder auch unendlich viele Faktoren gleich 1 sind, so stört dies die Schlußweise nicht). — Auf

$$(7.18)\qquad P_{1i}^{(4)}(s) = \prod_{\mathfrak{p}_1 \in S_{1i}} \Bigl(\prod_{\mathfrak{p}_i}{}^{*} Z_{\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_1}(s)\Bigr)$$

wenden wir das gleiche Verfahren an, wobei wiederum eine von $\mathfrak{p}_1$ unabhängige (von m evtl. verschiedene) Schranke m' für die Zahl der $\mathfrak{p}_1$ zugeordneten Faktoren auftritt; $P_{1i}^{(4)}(s)$ hat die gleichen Eigenschaften wie $P_{1i}^{(2)}(s)$. — Es bleibt der $P_{1i}^{(1)}(s)$ entsprechende Ausdruck

$$(7.19)\qquad P_{1i}^{(3)}(s) = \prod_{\mathfrak{p}_i} \prod_{\mathfrak{p}_1 \notin S_{1i}} Z_{\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_1}(s).$$

Da hierin die $\mathfrak{p}_1$ endlich viele feste Primdivisoren sind, gibt es für die Zahl der zu einem $\mathfrak{p}_i$ gehörigen $\mathfrak{q}_1(\mathfrak{P}_{i1})$ eine von $\mathfrak{p}_i$ unabhängige Schranke m'', und entsprechend (7.17) ist

$$(7.20)\quad P_{1i}^{(3)}(s) = \prod_{\mathfrak{p}_i} \prod_{\mu=1}^{m''} h''_\mu(s;\mathfrak{p}_i), \text{ wobei } h''_\mu(s;\mathfrak{p}_i) = \begin{cases} \bigl(1 - q_{\mathfrak{p}_i}^{-r_\mu(\mathfrak{p}_i)s}\bigr)^{-1} \\ \text{oder } 1 \end{cases}$$

mit ganzrationalen Zahlen $r_\mu(\mathfrak{p}_i) \geqq 1$. Wieder folgt, daß $P_{1i}^{(3)}(s)$ in $\Re(s) > 1$ absolut konvergent ist und dort weder Pole noch Nullstellen hat. — Zusammen ergibt dies: *$Z_A(s; K_1, K_i)$ und $Z_A(s; K_i, K_1)$ unterscheiden sich um den Störfaktor $P_{1i}^{(1)}(s)\, P_{1i}^{(2)}(s)/P_{1i}^{(3)}(s)\, P_{1i}^{(4)}(s)$, dessen Produktdarstellung für $\Re(s) > 1$ absolut konvergiert und der in dieser Halbebene weder Nullstellen noch Pole hat.*

---

32) Mit $P_{1i}^{(1)}(s)$ und $P_{1i}^{(3)}(s)$ sind aus $Z_A(s; K_1, K_i)$ die nach Satz 6 nicht vertauschungszulässigen $Z_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_i}(s)$ herausdividiert.

33) Gemäß der Herleitung von Satz 6 setzen sich die Ausnahme-$\mathfrak{p}_i$ aus den $\mathfrak{p}_i \in S_{i1}$ (für jedes derselben ist die Zahl der zu $\mathfrak{p}_i$ gehörigen $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})$ durch $d(\mathfrak{p}_i)$ beschränkt) und einigen restlichen Ausnahme-$\mathfrak{p}_i$ zusammen (für die letzteren ist die Zahl der zugehörigen $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{P}_{1i})$ durch den Grad von $d(y)$ beschränkt).

Wir haben somit bei den zwei Typen (7.12) und (7.14) von Erzeugungswechseln eine gleiche Eigenschaft der Störfaktoren festgestellt. Da jeder allgemeine Erzeugungswechsel nach dem Schema

$$
\begin{aligned}
(7.21)\qquad & (K_1, K_i) \to (K_j, K_l) \\
&= \{(K_1, K_i) \to (K_1, K_j);\ (K_1, K_j) \to (K_j, K_1);\ (K_j, K_1) \to (K_j, K_l)\}
\end{aligned}
$$

durch Hintereinanderausführung von solchen vom Typus (7.12) bzw. (7.14) beschrieben werden kann (der 1. und 3. Schritt sind vom Typus (7.12), der 2. Schritt ist vom Typus (7.14)), erhalten wir den folgenden *Hauptsatz über die Erzeugungsabhängigkeit der arithmetischen Zetafunktionen.*

Satz 8. *Ist A ein AF2 über einem Galoisfeld k von q Elementen, so gelten für die arithmetischen Zetafunktionen von A wegen* (7.21), (7.12), (7.14) *bei einem Erzeugungswechsel die Transformationsregeln*

$$(7.22)\qquad Z_A(s; K_j, K_l) = Z_A(s; K_1, K_i) \cdot P_A(s; K_1, K_i; K_j, K_l)$$

mit Störfunktionen $P_A(s; K_1, K_i; K_j, K_l)$, die in der Halbebene $\Re(s) > 1$ weder Nullstellen noch Pole haben somit; sind alle in der Halbebene $\Re(s) > 1$ liegenden Pole und Nullstellen von $Z_A(s; K_1, K_i)$ erzeugungsunabhängig, d. h. Invarianten des AF2 A über k.

Bemerkungen zu Satz 8: 1) Satz 8 sagt nur etwas über die Nullstellen und Pole, nichts aber über die Werte der Zetafunktion an den anderen Stellen der Halbebene $\Re(s) > 1$ aus; diese können sich bei einem Erzeugungswechsel natürlich ändern. — 2) Durch Satz 8 ist ferner noch nicht garantiert, daß die Zetafunktionen stets nichttriviale Invarianten der *AF2 A* über k liefern. Dazu muß man nämlich die Zetafunktionen in den kritischen Streifen $1 < \Re(s) \leqq 2$ fortsetzen können, da ja die Produktdarstellung nur in $\Re(s) > 2$ konvergiert. Für den Teilstreifen $\frac{3}{2} < \Re(s) \leqq 2$ wird diese Fortsetzung durch das Korollar von Satz 7 in trivialer Weise für den allgemeinsten Fall gewährleistet; hierbei erhält man allerdings nur die allen *AF2* über k gemeinsamen Pole (7.11), aus denen man über die Konstantenanzahl von A hinaus nichts ablesen kann. Dagegen ist die Fortsetzbarkeit in den Streifen $1 < \Re(s) \leqq \frac{3}{2}$ allgemein noch nicht erwiesen; man kann nach Satz 8 nur sagen, es genügt für jeden *AF2* die Fortsetzbarkeit für *eine* Erzeugung (K_1, K_i), d. h. für eine Zetafunktion $Z_A(s; K_1, K_i)$ nachzuweisen, um sie dann sofort für alle Erzeugungen folgern zu können. Neben dieser durch Satz 8 bedingten Vereinfachung des Problems ist noch auf folgendes schon bekannte Teilergebnis hierzu hinzuweisen: Für eine recht weite Klasse von *AF2* (vgl. [6a], [6b]) ist die Fortsetzbarkeit in den Streifen $1 < \Re(s) \leqq \frac{3}{2}$ schon nachgewiesen, und es ergab sich, daß je nach dem Typus des *AF2* die Invarianten (Nullstellen) in diesem Streifen verschieden sein können. Daraus ergibt sich eine Klassifikation der *AF2*: (a) diejenigen mit in $1 < \Re(s) \leqq \frac{3}{2}$ fortsetzbarer Zetafunktion und Feinklasseneinteilung nach den ermittelten Invarianten, (b) diejenigen mit nicht fortsetzbarer Zetafunktion; es ist natürlich zu erhoffen, daß Fall (b) überhaupt nicht eintritt. — 3) Bei positiver Beantwortung der Fragen aus 2) verbleibt das Problem, die Zetafunktionen auch noch möglichst weit

in das Gebiet $\Re(s) \leq 1$ fortzusetzen und dabei noch weitere Invarianten des Körpers A zu erhalten. Hierauf deuten einerseits die Ergebnisse in den Spezialfällen [6a] und [6b] hin, andererseits auch die spezielle Struktur der Transformationsregel (7.12). Es verbleibt die Aufgabe, Satz 6 und damit auch (7.14) und Satz 8 in geeigneter Weise zu verschärfen (vgl. auch das anschließende Korollar). — 4) Die Aussage von Satz 8 steht in Übereinstimmung mit einem neueren Ergebnis von LANG-WEIL [5] über das Gebiet birationaler Invarianz „geometrischer" Zetafunktionen (vgl. auch [6a]) von Kongruenzmannigfaltigkeiten. Die Zusammenhänge zwischen den hier untersuchten und den WEILschen Zetafunktionen können vermutlich durch Benutzung der Überlegungen aus 6. geklärt werden.

Schärfere Aussagen über das Verhalten der arithmetischen Zetafunktionen beim Übergang von der Erzeugung (K_1, K_i) zu (K_i, K_1) folgen aus Satz 5 (bzw. aus [6a]) und Lemma 10.

Korollar zu Satz 8. *Ist A ein Doppelkörper über k, (K_1, K_i) die zugehörige Doppelkörpererzeugung, so gilt*

$$Z_A(s; K_1, K_i) = Z_A(s; K_i, K_1); \tag{7.23}$$

ist A separabel-zyklische Erweiterung vom Primzahlgrad $p \neq \mathrm{Char}(k)$ des rationalen AF2 $k(x_1, x_2)$, enthält k die p-ten Einheitswurzeln und ist $K_1 = k(x_1)$, $K_2 = k(x_2)$, so unterscheiden sich $Z_A(s; K_1, K_2)$ und $Z_A(s; K_2, K_1)$ nur um endlich viele Zähler- und Nennerfaktoren der Form $(1 - q^{-rs})$, wo $r \geq 1$ ganzrational ist.

Literatur

[1] CHEVALLEY, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable. Math. Survey VI. New York 1951. — [2a] HASSE, H.: Zahlentheorie. Berlin 1951. — [2b] HASSE, H.: Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper. J. reine angew. Math. **172**, 37—54 (1934).— [3] KNOPP, K.: Unendliche Reihen. 4. Aufl., Berlin 1947. — [4a] KRULL, W.: Idealtheorie. Erg. Math. Grenzgeb. **4**, Berlin 1935. — [4b] KRULL, W.: Über geschlossene Bewertungssysteme. J. reine angew. Math. **190**, 75—92 (1951). — [5] LANG, S., and A. WEIL: Number of Points of Varieties in Finite Fields. Amer. J. Math. **76**, 819—827 (1954). — [6a] LAMPRECHT, E.: Zetafunktionen symmetrisch-erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher. Math. Z. **64**, 47—71 (1956). — [6b] LAMPRECHT, E.: Arithmetische Zetafunktionen zu zyklischen p-Körpern von zwei Veränderlichen über einem Galoisfeld. Arch. Math. **6**, 266—274 (1955). — [6c, d] LAMPRECHT, E.: Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper I, II. Math. Ann. **131**, 313—335 (1956); Arch. Math. **7**, 225—234 (1956). — [7] SCHILLING, O. F. G.: The Theory of Valuations. Math. Survey IV. New York 1950. — [8] WEIL, A.: Arithmetic on Algebraic Varieties. Ann. Math. **53**, 412—444 (1951).

(Eingegangen am 29. Mai 1956)

HOEHNKE, H.-J.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 404—411 (1957)

Nilpotenzkriterien

Von

HANS-JÜRGEN HOEHNKE in Halle (Saale)

Einleitung

Die vorliegende Arbeit bringt Kriterien für die Nilpotenz von Ringen, die sich auf Vielfachenketten-Bedingungen für Ideale gründen und die, im Gegensatz zu den bisher bekannten Bedingungen, zugleich notwendig und hinreichend sind.

Unser Hauptergebnis beruht auf Überlegungen, welche S. MORI im Kommutativen angestellt hat, welche sich für nichtkommutative Ringe teilweise bei CH. HOPKINS [1] wiederfinden[1]) und von uns im Nichtkommutativen weitergeführt worden sind. So ergibt sich z. B. als notwendige und hinreichende Bedingung für die Nilpotenz eines Teilrings A des Jacobsonschen Radikals eines Rings R, daß A von endlichem Index ($A^k = A^{k+1}$ für endliches k) sein und in R für Elemente aus A die Produktkettenbedingung erfüllt sein muß: Es gibt keine unendliche Kette von rechtsseitigen Hauptidealen der Gestalt[2]) $(a_1, a_1R) \supset a_1(a_2, a_2R) \supset a_1a_2(a_3, a_3R) \supset \ldots$, $(a_i \in A)$. Unsere Ergebnisse zeigen, wie weit sich die Voraussetzung der Minimalbedingung für Rechtsideale, unter der HOPKINS [1], [2] die Nilpotenz eines Nilideals bewiesen hat, abschwächen läßt. Es sei noch bemerkt, daß MORI den Beweis der Nilpotenz eines Nilideals in kommutativen Ringen mit Vielfachkettensatz für Ideale bereits 1933 führte, also drei Jahre nach der Veröffentlichung des Kötheschen Problems[2a]) und fünf Jahre vor den Untersuchungen von HOPKINS [2] im Nichtkommutativen.

Wir stellen jetzt einige Begriffe zusammen, die später immer in dieser Bedeutung benutzt werden.

Ein Element a eines Rings R heißt nach S. PERLIS rechts (links) quasiregulär, wenn in R ein Element b existiert, so daß

$$a + b + ab = 0, \quad (a + b + ba = 0);$$

ein solches Element b nennt man ein rechtes (linkes) Quasiinverses von a. Ein sowohl rechts als auch links quasireguläres Element heißt schlechthin quasiregulär. Wenn a quasiregulär ist, so ist jedes rechte (linke) Quasiinverse ein linkes (rechtes) Quasiinverses, und ein solches ist eindeutig durch a bestimmt und vertauschbar mit a[3]).

[1]) Vgl. MORI, Beweis von Satz 1, S. 277—279 und HOPKINS [1], Beweis von Theorem 1.4, S. 714.

[2]) $A \supset B$ bedeutet: A ist echte Obermenge von B.

[2a]) Vgl. KÖTHE.

[3]) Vgl. JACOBSON.

Ein Rechtsideal (Linksideal) heißt quasiregulär, wenn seine Elemente sämtlich rechts (links) quasiregulär sind. Nach JACOBSON ist die Vereinigungsmenge aller quasiregulären Rechtsideale ein zweiseitiges Ideal $N^{(J)}$, das mit der Vereinigungsmenge aller quasiregulären Linksideale übereinstimmt und als das Jacobsonsche Radikal eines Rings R bekannt ist. Wir erinnern daran, daß $N^{(J)}$ nur aus quasiregulären Elementen besteht und insbesondere alle Nilideale von R enthält.

Ähnliche Verhältnisse sind im Bereich der lokal nilpotenten Ideale anzutreffen. Ein Ring heißt lokal nilpotent, wenn jeder Teilring mit endlich vielen Erzeugenden nilpotent ist. Stets existiert das maximale zweiseitige lokal nilpotente Ideal $N^{(L)}$, das Levitzkische Radikal eines Rings R, das alle lokal nilpotenten Ideale von R umfaßt[4]), so daß die Vereinigung aller lokal nilpotenten Rechtsideale mit der Vereinigung aller lokal nilpotenten Linksideale zusammenfällt.

Für den umfassenderen Bereich der Nilideale läßt sich im allgemeinen nur zeigen, daß die Vereinigung aller zweiseitigen Nilideale wieder ein Nilideal, das maximale zweiseitige Nilideal N^{**} von R, ist. LEVITZKI [2] nennt N^{**} das verallgemeinerte Radikal im Gegensatz zur Summe aller zweiseitigen nilpotenten Ideale, dem spezialisierten Radikal N^{*}, das ein zweiseitiges Nilideal ist und alle nilpotenten Ideale enthält. Im allgemeinen ist

$$N^{*} \subseteq N^{(L)} \subseteq N^{**} \subseteq N^{(J)}. \tag{1}$$

Wenn N^{**} alle Nilideale umfaßt, so wird es das Köthesche Radikal $N^{(K)}$ von R genannt[5]). Unabhängig von seiner Existenz aber ist die Vereinigungsmenge aller rechtsseitigen Nilideale gleich der Vereinigungsmenge aller linksseitigen Nilideale. Denn jedes Element eines rechts-(links-)seitigen Nilideals eines Rings R erzeugt ein links-(rechts-)seitiges Nilideal von R[6]).

1. Nilideale

Zunächst geben wir auf einer Potenzkettenbedingung beruhende Kriterien dafür an, daß ein Ring, vorzugsweise ein Ideal, Nilring ist. Es sei R ein Ring, A ein Teilring von R.

Wir sagen, in R gelte für die Elemente aus A der Potenzkettensatz, wenn für rechtsseitige Hauptideale, die von Potenzen eines Elements a aus A erzeugt sind, der Vielfachenkettensatz gelten soll:

Es gibt keine unendliche Kette der Gestalt

$$(a, aR) \supset (a^2, a^2R) \supset (a^3, a^3R) \supset \ldots, \quad (a \in A).$$

---

[4]) Vgl. LEVITZKI [1].

[5]) Vgl. KÖTHE. Es ist eine offene Frage, ob $N^{(K)}$ stets existiert.

[6]) Zum Beweis sei L irgendein linksseitiges Nilideal. Das von $a \in L$ in R erzeugte rechtsseitige Hauptideal (a, aR) besteht aus allen Elementen der Form $ag + ax$, ($x \in R$, g ganzrational). Jedenfalls ist $ga + xa$ nilpotent, da $ga, xa \in L$. Es sei $(ga + xa)^m = 0$. Wir denken uns R in einen Ring mit Eins e eingebettet, was immer möglich ist. Dann folgt $(ag + ax)^{m+1} = a(ge + x) \ldots a(ge + x) = a(ga + xa)^m(ge + x) = a \cdot 0 \cdot (ge + x) = 0$. Daher ist (a, aR) ein rechtsseitiges Nilideal.

In unseren Schlüssen wird häufig vorausgesetzt, daß A in R wenigstens eine der beiden folgenden Eigenschaften (α'), (α'') besitzt:

Wenn $a, bc = b \in A$, so folgt

$$(\alpha') \text{ stets } b = 0 \text{ für } c \in (a, aR),$$
$$(\alpha'') \text{ stets } b = 0 \text{ für } c \in (a, Ra).$$

Satz 1. *Ein Ideal A eines Rings R ist genau dann ein Nilring, wenn*
(α) *aus c, $bc = b \in A$ stets $b = 0$ folgt und*
(β) *in R für die Elemente aus A der Potenzkettensatz gilt.*

Beweis. Offenbar ist (β) notwendig; desgleichen (α), denn da $c \in A$, ist c nilpotent und $b = bc = bc^2 = \cdots = 0$. Umgekehrt seien ($\alpha$), ($\beta$) erfüllt. Dann hat A in R die Eigenschaft (α') bzw. (α''), wenn A ein Rechtsideal bzw. Linksideal von R ist. Wir zeigen allgemein: Wenn A ein Teilring eines Rings R ist, der wenigstens eine der beiden Eigenschaften (α'), (α'') besitzt, und wenn in R für die Elemente aus A der Potenzkettensatz gilt, so ist A ein Nilring.

Für ein Element $a \in A$ existiert nach der Potenzkettenbedingung eine kleinste natürliche Zahl $n = n(a)$, so daß

$$(a^n, a^n R) = (a^{n+1}, a^{n+1}R) = \ldots$$

wird. Danach ist $a^n \in (a^{n+1}, a^{n+1}R) = a^n(a, aR)$. Hat A die Eigenschaft (α'), so folgt sofort $a^n = 0$. Darf man dagegen nur (α'') verwenden und ist etwa $a^n = a^n(ag + ax)$, so hat man $a^{n+1} = a^n(ag + ax)\,a = a^{n+1}(ga + xa)$, $a^{n+1} = 0$. Da $a^n = a^{n+1}g + a^{n+1}x$, so ist in beiden Fällen $a^n = 0$. Offenbar ist n die kleinste Zahl, für die $a^n = 0$ ist. Eine solche Zahl heißt der Nilpotenz-Exponent von a.

Aus dem Beweis von Satz 1 gewinnt man mit Hilfe des Lemmas 1 den Satz 2.

Lemma 1. *Wenn ein Element $b \in R$ zu $bN^{(J)}$ gehört, wo $N^{(J)}$ das Jacobsonsche Radikal von R ist, so ist $b = 0$* [7]).

Satz 2. *Ein Teilring A des Jacobsonschen Radikals eines Rings R ist genau dann ein Nilring, wenn in R für die Elemente aus A der Potenzkettensatz gilt.*

2. Zwischenbetrachtung

Es seien S und T irgend zwei nichtleere Komplexe von Elementen eines Rings J; S enthalte die Null. Wir bilden die Gesamtheit Q aller $x \in J$ mit

$$xT \subseteq S$$

und setzen $Q = ST^{-1}$. Analog ist $T^{-1}S$ definiert. Wenn U ein weiterer nichtleerer Komplex aus J ist, so gilt

$$(*) \qquad (ST^{-1})\,U^{-1} = S(U \circ T)^{-1}, \qquad U^{-1}(T^{-1}S) = (T \circ U)^{-1}S,$$

wobei unter dem „Komplexprodukt" $U \circ T$ bzw. $T \circ U$ die Gesamtheit aller Produkte der Form ut bzw. tu mit $t \in T$, $u \in U$ zu verstehen ist. Es genügt, die erste der beiden Relationen zu beweisen. Setzt man $U \circ T = P$, $ST^{-1} = Q$, und ist $x \in QU^{-1}$, so ist $xU \subseteq Q$, also $xP \subseteq Q \circ T \subseteq S$, demnach $x \in SP^{-1}$,

[7]) Vgl. z. B. Baer, Hilfssatz 1, S. 4.

$QU^{-1} \subsetneq SP^{-1}$. Umgekehrt folgt aus $[(SP^{-1}) \circ U] \circ T = (SP^{-1}) \circ P \subsetneq S$, daß $(SP^{-1}) \circ U \subsetneq ST^{-1} = Q$, $SP^{-1} \subsetneq QU^{-1}$. Somit ist $QU^{-1} = SP^{-1}$.

Wenn S, T, U Moduln sind, so werden auch ST^{-1} und $T^{-1}S$ Moduln sein, und die Komplexprodukte $U \circ T$ bzw. $T \circ U$ können in (*) durch die Produktmoduln UT bzw. TU ersetzt werden.

Satz 3.[8]) *Ein Ring $J \neq (0)$ ist genau dann nilpotent vom Exponenten n, wenn*

$$(0) \subset (0) \cdot J^{-1} \subset \cdots \subset (0) \cdot J^{-n+1} = J\,.$$

Beweis. Wir setzen $(0) \cdot J^{-0} = (0)$. Dann gilt allgemein

$$(0) \cdot J^{-i} \subsetneq (0) \cdot J^{-i-1}, \quad (i \geqq 0)\,.$$

Denn wegen $((0) \cdot J^{-i})\, J^{i} = (0)$ ist auch $((0) \cdot J^{-i})\, J^{i+1} = (0)$.

Wenn nun $J \neq (0)$ ein nilpotenter Ring vom Exponenten n ist, so ist $J^{n} = (0)$, also $n \geqq 2$ und $J^{n-1} \neq (0)$. Für $0 \leqq i < n-1$ ist wegen $J^{n-i-1} J^{i+1} = (0)$

$$J^{n-i-1} \subsetneq (0) \cdot J^{-i-1}.$$

Wäre $(0) \cdot J^{-i} = (0) \cdot J^{-i-1}$, so wäre $J^{n-i-1} \subsetneq (0) \cdot J^{-i}$, also $J^{n-1} = J^{n-i-1} J^{i} = (0)$, im Widerspruch zu $J^{n-1} \neq (0)$.

Umgekehrt sei $J \neq (0)$ ein Ring, welcher der Kettenbedingung des Satzes 2 mit passendem n genügt. Da nach Definition $(0) \cdot J^{-0} = (0)$, aber $J \neq (0)$, ist $n \geqq 2$. Wegen $(0) \cdot J^{-n+1} = J$ ist $J \cdot J^{n-1} = (0)$, d. h. $J^{n} = (0)$. Wäre $J^{n-1} = (0)$, so wäre $n \geqq 3$, und $J \cdot J^{n-2} = (0)$ ergäbe $J \subsetneq (0) \cdot J^{-n+2}$, d. h. $(0) \cdot J^{-n+2} = (0) \cdot J^{-n+1}$, entgegen der Voraussetzung. Demnach ist J nilpotent vom Exponenten n.

Für die Verwendung im nächsten Abschnitt eignet sich besser die Fassung im

Korollar. *Ein Ring $J \neq 0$ ist genau dann nilpotent vom Exponenten n, wenn*

(a) *J den endlichen Index n hat*[9]) *und*

(b) *für jedes $(0) \cdot J^{-i} \neq J$ stets $(0) \cdot J^{-i} \neq (0) \cdot J^{-i-1}$ ist.*

Beweis. Im Hinblick auf Satz 3 beschränken wir uns auf den Nachweis, daß (a), (b) hinreichend sind. Es ist $J^{n} = (0)$. Denn nach (a) ist $(0) \cdot J^{-n} = (0) \cdot J^{-n-1}$, also nach (b) $(0) \cdot J^{-n} = J$, d. h. $J \cdot J^{n} = (0)$ bzw., da nach (a) $J^{n} = J^{n+1}$ ist, auch $J^{n} = (0)$ und $n \geqq 2$. Außerdem ist $J^{n-1} \neq (0)$, da $J^{n-1} \neq J^{n}$ sein sollte. Somit ist J nilpotent vom Exponenten n.

3. Nilpotente Ideale

Es sei A ein Teilring eines beliebigen Rings R.

Wir sagen, daß in R der Produktkettensatz für Elemente aus A gilt, wenn es keine unendliche Kette von rechtsseitigen Hauptidealen der Gestalt

$$(a_1, a_1 R) \supset a_1 (a_2, a_2 R) \supset a_1 a_2 (a_3, a_3 R) \supset \ldots, (a_i \in A)$$

gibt.

---

[8]) Für die Verwendung dieser Kettenbedingung als Nilpotenzbedingung vgl. MORI, S. 279 und HOPKINS [1], S. 714—715.

[9]) Die kleinste natürliche Zahl n, für die $J^{n} = J^{n+1}$ ist, nennt man den endlichen Index von J (falls ein solches n existiert).

Satz 4. ***Ein Ideal A eines Rings R ist genau dann nilpotent vom Exponenten n, wenn***

(α) aus $c, bc = b \in A$ stets $b = 0$ folgt,

(β) in R für Elemente aus A der Produktkettensatz gilt und

(γ) A den endlichen Index n hat.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar. Wenn nun A ein Rechtsideal (Linksideal) ist, welches (α) erfüllt, so hat es die Eigenschaft (α'), ((α'')). Wir beweisen allgemein: Der Teilring A von R besitze wenigstens eine der Eigenschaften (α'), (α''), er habe den endlichen Index n und erfülle (β). Dann ist A nilpotent vom Exponenten n.

Natürlich ist A nach dem Beweis des Satzes 1 ein Nilring. Wir zeigen, daß A nilpotent ist. Es sei $A \neq (0)$, und B sei ein Komplex mit

$$(0) \subseteq B \subset A\,.$$

Dann gibt es ein Element $a_1 \in A$ mit $a_1 \notin B$. Wir bilden innerhalb des Teilrings A den Komplex

$$Q_1 = \{a_1\}^{-1} B,$$

das ist die Gesamtheit aller $x \in A$, für die $a_1 x \in B$. Wenn $Q_1 \subset A$, so gibt es ein Element $a_2 \in A$ mit $a_2 \notin Q_1$. Dann ist $a_1 a_2 \notin B$, da sonst $a_2 \in \{a_1\}^{-1} B = Q_1$ wäre, was ausgeschlossen wurde. Weiter ist

$$(a_1, a_1 R) \supset a_1 (a_2, a_2 R);$$

denn wäre $(a_1, a_1 R) = a_1 (a_2, a_2 R)$, so hätte man für passendes ganzrationales g und $x \in R$

$$a_1 = a_1 (a_2 g + a_2 x)$$

und folglich $a_1 = 0$, wenn A die Eigenschaft (α') besitzt. Ist (α'') erfüllt, so ergibt sich aus $a_1 a_2 = a_1 (a_2 g + a_2 x)\, a_2 = a_1 a_2 (g a_2 + x a_2)$, daß $a_1 a_2 = 0$ ist. Sowohl $a_1 = 0$ als auch $a_1 a_2 = 0$ stehen aber im Widerspruch zu $a_1, a_1 a_2 \notin B$, da $0 \in B$.

Darauf bilde man

$$Q_2 = \{a_2\}^{-1} Q_1 = \{a_1 a_2\}^{-1} B$$

und unterscheide wieder zwei Fälle: $Q_2 = A$ bzw. $Q_2 \neq A$, usw. Man erhält so eine Vielfachenkette[10])

$$(a_1, a_1 R) \supset a_1 (a_2, a_2 R) \supset \cdots \supset a_1 a_2 \cdots a_{k-1} (a_k, a_k R),$$

wo $a_1 a_2 \ldots a_k \notin B$ ist, die man immer weiter fortsetzen kann, solange $Q_k = \{a_1 a_2 \ldots a_k\}^{-1} B$ von A verschieden ist. Gemäß (β) muß daher für einen endlichen Index k $Q_k = A$ werden. Damit ist gezeigt: Zu jedem Komplex B mit $(0) \subseteq B \subset A$ existiert in A ein Element $a \notin B$, so daß $aA \subseteq B$, oder $a \in BA^{-1}$.

---

[10]) Eine solche Hauptidealkette konstruiert MORI, S. 278, wo aber die Kommutativität der Multiplikation benutzt wird.

Demnach ist das Korollar zu Satz 3 auf $J = A$ anwendbar, da für $B = (0) \cdot A^{-i} \neq A$ stets ein $a \in A$ mit $a \notin (0) \cdot A^{-i}$, $a \in BA^{-1} = (0) \cdot A^{-i-1}$ vorhanden, also auch die Forderung (b) des Korollars erfüllt ist.

Über Lemma 1 erhalten wir aus dem Beweis von Satz 4 den

Satz 5. *Ein Teilring A des Jacobsonschen Radikals eines Rings R ist genau dann nilpotent, wenn*

(a) *A von endlichem Index ist und*

(b) *in R für Elemente aus A der Produktkettensatz gilt.*

Satz 6. *Alle Nilideale eines Rings R sind nilpotent genau dann, wenn*

(a) *alle rechtsseitigen Nilideale endliche Indizes besitzen und*

(b) *in R für die Elemente eines jeden rechtsseitigen Nilideals der Produktkettensatz gilt.*

Beweis. Gemäß Satz 5 sind alle rechtsseitigen Nilideale nilpotent und liegen in N^*. Als ein rechtsseitiges Nilideal ist N^* selber nilpotent. Da die Vereinigung aller rechtsseitigen Nilideale mit der Vereinigung aller linksseitigen Nilideale identisch ist, umfaßt N^* auch alle linksseitigen Nilideale, die demnach gleichfalls alle nilpotent sind.

Satz 7. *Wenn das Jacobsonsche Radikal $N^{(J)}$ eines Rings R von endlichem Index ist und in R für Elemente aus $N^{(J)}$ der Produktkettensatz gilt, so existiert das Köthesche Radikal $N^{(K)}$, und die Ideale N^*, $N^{(L)}$, $N^{**} = N^{(K)}$, $N^{(J)}$ sind identisch und nilpotent.*

Beweis. Gemäß Satz 5 ist $N^{(J)}$ nilpotent, so daß $N^{(J)} \subseteq N^*$. Mit Rücksicht auf (1) ist also $N^* = N^{(L)} = N^{**} = N^{(J)}$. Da $N^{(J)}$ alle Nilideale enthält, so liegen diese auch in N^{**}, was die Existenz von $N^{(K)}$ verbürgt.

4. Zweiseitige Produktketten

Mitunter passen sich Nilpotenz-Kriterien, die auf Vielfachenketten nach zweiseitigen Idealen beruhen, den Gegebenheiten besser an als solche nach Rechtsidealen.

Es sei A ein Teilring eines Rings R. Wir sagen, in R gilt für Elemente aus A der Satz von den zweiseitigen Produktketten, wenn es keine unendliche Kette von zweiseitigen Hauptidealen der Gestalt

$$(a_1, a_1R, Ra_1, Ra_1R) \supset (a_1a_2, a_1a_2R, Ra_1a_2, Ra_1a_2R) \supset \ldots, \quad (a_i \in A)$$

gibt.

Satz 8. *Ein Ideal A eines Rings R ist genau dann nilpotent, wenn*

(α) *$a, b \in A$, $b \in (ba, baR, Rba, RbaR)$ stets $b = 0$ nach sich zieht,*

(β) *in R für Elemente aus A der Satz von den zweiseitigen Produktketten gilt und*

(γ) *A von endlichem Index ist.*

Beweis. Die Bedingungen (α), (β), (γ) sind notwendig für die Nilpotenz von A. (α) ist sogar allgemeiner für jeden Teilring A des Levitzkischen Radikals

$N^{(L)}$ von R richtig: Es sei etwa

$$(\blacktriangle) \qquad b = \sum_{i=1}^{t} s_i\, b a s_i,$$

wobei s_i, s_i' ganzrational oder Elemente aus R sind. Wiederholtes Ersetzen von b in ($\blacktriangle$) führt zu

$$b = \sum s_{i_1}' s_{i_2}' \dots s_{i_m}' b a s_{i_m} \dots a s_{i_2} a s_{i_1} = 0,$$

wenn m der Nilpotenz-Exponent des von den t Elementen $as_1, as_2, \dots, as_t$ erzeugten Teilrings des lokal nilpotenten Rechtsideals $N^{(L)}$ ist.

Wir haben noch nachzuweisen, daß die Forderungen in Satz 8 für die Nilpotenz von A hinreichen. Das gilt sogar für einen beliebigen Teilring A von R und ist ähnlich wie im Beweis des Satzes 4 einzusehen. Wir sparen Wiederholungen und bemerken nur, daß anstelle der rechtsseitigen Hauptideale $a_1 a_2 \dots a_{k-1}(a_k, a_k R)$ die zweiseitigen Hauptideale $(a_1 a_2 \dots a_k, a_1 a_2 \dots a_k R, Ra_1 a_2 \dots a_k, Ra_1 a_2 \dots a_k R)$ zu bilden sind. Wäre etwa

$$(a_1, a_1 R, Ra_1, Ra_1 R) = (a_1 a_2, a_1 a_2 R, Ra_1 a_2, Ra_1 a_2 R),$$

so ergäbe sich aus (α) für $a = a_2$, $b = a_1$ der Widerspruch $a_1 = 0$.

Bemerkung. Wenn A ein Rechtsideal ist, darf man (α) in Satz 8 durch

(α^0) $\qquad b \in \{(b, Rb)\, A\} \cap A$ zieht stets $b = 0$ nach sich,

ersetzen, da ba und das von ba erzeugte zweiseitige Hauptideal im zweiseitigen Ideal $(b, Rb)\, A$ liegt und da andererseits (α^0) auch notwendig für die Nilpotenz von A ist.

Aus dem Beweis von Satz 8 ergibt sich der

Satz 9. *Ein Teilring A des Levitzkischen Radikals eines Rings R ist genau dann nilpotent, wenn*

(a) *A von endlichem Index ist und*

(b) *in R für Elemente aus A der Satz von den zweiseitigen Produktketten gilt.*

Satz 10. *Wenn das Levitzkische Radikal $N^{(L)}$ eines Rings R von endlichem Index ist und in R für Elemente aus $N^{(L)}$ der Satz von den zweiseitigen Produktketten gilt, so ist $N^* = N^{(L)}$, und beide Ideale sind nilpotent*[11]).

Beweis. Da $N^{(L)}$ nach Satz 9 nilpotent ist, hat man $N^{(L)} \subseteq N^*$, und beide Ideale werden im Hinblick auf (1) identisch.

Aus den Sätzen 6 und 10 folgt schließlich der

Satz 11[12]). *Alle Nilideale eines Rings R sind nilpotent genau dann, wenn*

(a) *alle rechtsseitigen Nilideale von $R/N^{(L)}$ endliche Indizes besitzen,*

(b) *in $R/N^{(L)}$ für die Elemente eines jeden rechtsseitigen Nilideals der Produktkettensatz gilt,*

(c) *der Index von $N^{(L)}$ endlich ist und*

(d) *in R für Elemente aus $N^{(L)}$ der Satz von den zweiseitigen Produktketten gilt.*

---

[11]) Verallgemeinerung des LEVITZKIschen Theorems 4, [2], S. 555.

[12]) Dazu vgl. LEVITZKI [2], Theorem 5, S. 555.

Literatur

Baer, R.: Kriterien für die Existenz eines Einselements in Ringen. Math. Z. 56, 1—17 (1952). — Hopkins, Ch.: [1] Rings with minimal condition for left ideals. Ann. Math. 40, 712—730 (1939). — [2] Nil-rings with minimal condition for admissible left ideals. Duke Math. J. 4, 664—667 (1938). — Jacobson, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. 67, 300—320 (1945). — Köthe, G.: Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist. Math. Z. 32, 161—186 (1930). — Levitzki, J.: [1] On the radical of a general ring. Bull. Amer. Math. Soc. 49, 462—466 (1943). — [2] Semi-nilpotent ideals. Duke Math. J. 10, 553—556 (1943). — Mori, S.: Über eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz. J. Sci. Hiroshima Univ. A, 3, 275—318 (1933). — Perlis, S.: A characterization of the radical of an algebra. Bull. Amer. Math. Soc. 48, 128—132 (1942).

(Eingegangen am 6. Juni 1956)

TIETZ, H.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 412—429 (1957)

Faber-Theorie auf nicht-kompakten Riemannschen Flächen

Von

HORST TIETZ in Münster

1. Zu den verschiedenen Methoden, eine holomorphe Funktion in einem vorgegebenen Gebiet durch Funktionen mit umfassenderem Holomorphiegebiet zu approximieren, gehören die Faberschen Polynomentwicklungen. Ihre Bedeutung liegt in der Mittelstellung, die sie zwischen den unter allgemeinsten Voraussetzungen gültigen Existenzaussagen des Rungeschen Satzes und dem sehr speziellen Kalkül des Taylorschen Satzes einnehmen. In einigen neueren Arbeiten von H. RÖHRL[1]) und dem Verfasser[2]) wurde daher begonnen, die Faber-Theorie auf Riemannsche Flächen zu übertragen; in der letzten der zitierten Arbeiten[3]) insbesondere wurde gezeigt, daß eine elementare Operation, Laurent-Trennung genannt, die angemessene Methode zur Gewinnung dieser Theorie ergibt. Von der konkurrierenden Theorie der Orthogonalreihen unterscheidet sich die Faber-Theorie vor allem dadurch, daß sie nicht auf metrischen Gesichtspunkten beruht, und es erhebt sich daher die Frage, ob sie sich auch auf nicht-kompakte Riemannsche Flächen ausdehnen läßt.

Unter den bislang in der Faber-Theorie gemachten Voraussetzungen war nämlich die Kompaktheit der das Entwicklungsgebiet umgebenden Riemannschen Fläche die stärkste Einschränkung. Ihr Nutzen liegt in der Möglichkeit der algebraischen Normierung des Elementardifferentials, das die Laurent-Trennung erzeugt. Die Laurent-Trennung überträgt diese Normierung auf die Cauchy-Größen[4]), die durch Invarianz gegenüber der Laurent-Trennung gekennzeichnet sind und, vermöge dieser Invarianz, gerade mit denjenigen Größen zusammenfallen, von denen die Faber-Theorie handelt; für die Cauchy-Größen ist sowohl die genannte Invarianz als auch die Normierung charakteristisch. Obgleich diese Gleichwertigkeit beider Eigenschaften einfache Schlüsse ermöglicht, zeigt es sich, daß sich die Faber-Theorie allein auf die Invarianz der Cauchy-Größen gründen läßt. Definieren wir folglich die Cauchy-Größen durch *diese* Eigenschaft, so sind sie *relativ zum Elementardifferential* bestimmt, und es entfällt die Veranlassung, dieses noch durch Normierung festzulegen, und damit der Grund für die Beschränkung auf kompakte Riemannsche Flächen.

---

[1]) Vgl. [7].
[2]) Vgl. [5, 9].
[3]) Vgl. [9].
[4]) Wir reden von „Größen", wenn wir zwischen Funktionen und Differentialen nicht unterscheiden wollen. Cauchy-Größen heißen bei H. G. TILLMANN [10] *bianalytisch*.

Daher gibt es, wie die vorliegende Arbeit zeigen soll, eine Faber-Theorie für die Cauchy-Größen auch auf nicht-kompakten Riemannschen Flächen. Genau genommen gehört sogar bei vorgegebenem Entwicklungsgebiet zu jeder Wahl des Elementardifferentials eine solche Theorie; insofern ist diese Theorie ärmer als im kompakten Falle, in dem die algebraische Normierung eine sinnvolle Entscheidung unter den möglichen Theorien gestattet.

2. Grundlegend ist ein Satz von H. BEHNKE und K. STEIN[5], der aussagt, *daß es auf einer nicht-kompakten Riemannschen Fläche R stets ein Elementardifferential $dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ gibt, das bei festem $\mathfrak{z}$ in Abhängigkeit von der Stelle $\mathfrak{y}$ ein bis auf den einfachen Pol $\mathfrak{z}$ mit Residuum $+1$ holomorphes Differential und bei festem $\mathfrak{y}$ in Abhängigkeit von $\mathfrak{z}$ eine bis auf den einfachen Pol $\mathfrak{y}$ holomorphe Funktion ist.*

Das nicht-kompakt auf R liegende Gebiet G besitze den Rand C, der aus endlich vielen disjunktiven rektifizierbaren Jordankurven bestehen möge. Bezüglich $dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ lassen sich für die C-Größen, das sind die auf C holomorphen Größen, die beiden komplementären Operatoren L und L^* der Laurent-Trennung (§ 1) und im Anschluß daran die Cauchy-Größen als die unter L bzw. L^* invarianten C-Größen (§ 2) definieren.

Die Frage nach der Existenz von Cauchy-Größen auf G ist gleichwertig damit, ob es auf $G + C$ holomorphe Größen gibt, die durch ihr mit dem Elementardifferential gebildetes und nur längs dem relativen Rand C von G genommenes Cauchy-Integral dargestellt werden. Mit Hilfe der Laurent-Trennung läßt sich diese Frage zurückführen auf die analoge nach Cauchy-Größen auf $G^* + C$, dem Komplement von G auf R. Diese und damit jene läßt sich völlig klären (Satz 2 und Bemerkung a) in § 3), wenn G^* von endlichem Geschlecht ist[6]; dieser selbe Fall ist es gerade, in dem eine Abbildung von G^* auf einen Kreisbereich mit schlichten Randkreisen zur Verfügung steht[7], wie man sie zur Gewinnung der Faber-Größen von G benötigt.

Damit läßt sich die Faber-Theorie durchführen für die Cauchy-Größen eines Entwicklungsgebietes G, das auf der Riemannschen Fläche R von endlich vielen, einzeln zerlegenden Jordankurven (nicht-kompakt) berandet wird und dessen Komplement G^* endliches Geschlecht besitzt (§ 3).

Die letzten Abschnitte behandeln einige sich unmittelbar ergebende Fragen und zeigen, daß sich Resultate der klassischen Faber-Theorie (Sätze von HEUSER[8], ILIEV[9], ULLMANN[10]) auf durchsichtigste Weise durch den Kalkül der Laurent-Trennung gewinnen und verallgemeinern lassen.

Die Darstellung ist von den vorangegangenen Arbeiten unabhängig, zumal sie von ihnen wesentlich in den Bezeichnungen abweicht.

---

[5]) Vgl. [1], Satz 11; dort wird das Elementardifferential mit $A(\zeta, z)\,d\zeta$ bezeichnet.

[6]) Satz 2 stimmt im wesentlichen überein mit einem von H. G. TILLMANN in [10], S. 89/90 gewonnenen Ergebnis.

[7]) Vgl. [8].

[8]) Vgl. [3].

[9]) Vgl. [4].

[10]) Vgl. [11].

§ 1. Die Laurent-Trennung

1.1. Auf der nicht-kompakten Riemannschen Fläche R berande[11]) das endliche System C rektifizierbarer und paarweise punktfremder Jordankurven das (zusammenhängende) Gebiet G und sei relativ zu G positiv orientiert; das (nicht notwendig zusammenhängende) Komplement von $G + C$ sei G^*.

Wir wählen auf R ein Elementardifferential $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, wie es in der Einleitung erwähnt wurde, und definieren mit seiner Hilfe die auf die *C-Größen*, das sind die auf C holomorphen Funktionen bzw. Differentiale, wirkenden Operatoren L und L^* der *Laurent-Trennung* wie folgt:

für C-Funktionen φ: für C-Differentiale $d\sigma$:

$$(1.1)\quad \begin{aligned} L\,\varphi &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{y}(C)} \varphi(\mathfrak{y})\, dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z}), & L\,d\sigma &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{y}(C)} d\sigma(\mathfrak{y})\, dF(\mathfrak{z},\mathfrak{y}), & \mathfrak{z} &\in G;\\ L^*\varphi &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{y}(C)} \varphi(\mathfrak{y})\, dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z}), & L^*d\sigma &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{y}(C)} d\sigma(\mathfrak{y})\, dF(\mathfrak{z},\mathfrak{y}), & \mathfrak{z} &\in G^*. \end{aligned}$$

Dadurch ist $L\omega$[12]) als holomorphe Größe in G erklärt, während $L^*\omega$ diese Eigenschaft in jeder Komponente von G^* besitzt; da jedoch die Integranden auf C noch holomorph sind, lassen sich die Größen $L\omega$, $L^*\omega$ noch über C hinaus holomorph fortsetzen; man braucht, um das einzusehen, den Integrationsweg C nur etwas nach G^* bzw. G zu verschieben. $L\omega$ und $L^*\omega$ sind also auf C gemeinsam holomorph, und (1.1) zeigt, daß dort

$$(1.2)\qquad \omega = L\,\omega + L^*\omega$$

gilt. Diese Beziehung, die aussagt, daß L und L^* komplementäre Operatoren sind, rechtfertigt — wegen ihrer Analogie zu der bei der Gewinnung der Laurent-Reihe einer auf einem Kreisring holomorphen Funktion üblichen Aufspaltung dieser Funktion in zwei Bestandteile — die Bezeichnung „Laurent-Trennung".

1.2. Die Operatoren L und L^* sind, wie aus (1.1) unmittelbar folgt, *linear*

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} L(a\,\omega_1 + b\,\omega_2) &= a\,L\,\omega_1 + b\,L\,\omega_2,\\ L^*(a\,\omega_1 + b\,\omega_2) &= a\,L^*\omega_1 + b\,L^*\omega_2. \end{aligned}$$

Man erkennt weiter, daß L und L^* *vertauschbar* sind:

$$(1.4)\qquad L\,L^*\omega = L(\omega - L\,\omega) = L\,\omega - L^2\omega = L^*L\,\omega$$

wie sich — in der Reihenfolge der Gleichungen — aus (1.2), (1.3), (1.2) ergibt.

1.3. L und L^* sind ferner *stetig* in folgendem Sinne: ω_n sei eine gleichmäßig auf C gegen die C-Größe ω konvergierende Folge von C-Größen; dann konvergieren die Laurent-Komponenten $L\,\omega_n$ bzw. $L^*\omega_n$ gleichmäßig gegen $L\,\omega$ bzw. $L^*\omega$ im Inneren von G bzw. G^*; auch dieses ergibt sich ohne weiteres aus (1.1).

[11]) „Beranden" ist im nicht-kompakten Sinne gemeint.

[12]) ω bezeichne stets eine beliebige C-Größe (Funktion oder Differential).

1.4. Es sei φ eine C-Funktion. Dann besteht ein Zusammenhang zwischen $Ld\varphi$ und $dL\varphi$; aus (1.1) folgt durch partielle Integration [13]), daß für $\mathfrak{z} \in G$ gilt:

$$L\,d\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{y}(C)} \varphi(\mathfrak{y})\, d_{\mathfrak{y}}\, d_{\mathfrak{z}}\, F(\mathfrak{z},\mathfrak{y}),$$

$$d\,L\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{y}(C)} \varphi(\mathfrak{y})\, d_{\mathfrak{z}}\, d_{\mathfrak{y}}\, F(\mathfrak{y},\mathfrak{z});$$

mit

$$d_{\mathfrak{y}}\, d_{\mathfrak{z}}\, W(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = d_{\mathfrak{y}}\, d_{\mathfrak{z}}\, F(\mathfrak{z},\mathfrak{y}) - d_{\mathfrak{z}}\, d_{\mathfrak{y}}\, F(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$$

ist also

$$L\,d\varphi = d\,L\varphi + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{y}(C)} \varphi(\mathfrak{y})\, d_{\mathfrak{y}}\, d_{\mathfrak{z}}\, W(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) \quad \text{für } \mathfrak{z} \in G;$$

hierin ist $d_{\mathfrak{y}}\, d_{\mathfrak{z}}\, W(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ ein Differential 1. Gattung in beiden Variablen. Ebenso — oder einfacher aus (1.2) — ergibt sich

$$L^*d\varphi = dL^*\varphi - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{y}(C)} \varphi(\mathfrak{y})\, d_{\mathfrak{y}}\, d_{\mathfrak{z}}\, W(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) \quad \text{für } \mathfrak{z} \in G^*.$$

Setzen wir abkürzend

$$d\varphi_C = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{y}(C)} \varphi(\mathfrak{y})\, d_{\mathfrak{y}}\, d_{\mathfrak{z}}\, W(\mathfrak{y},\mathfrak{z}), \tag{1.5}$$

so lauten diese Beziehungen

$$L\,d\varphi = d\,L\varphi + d\varphi_C,\quad L^*d\varphi = dL^*\varphi - d\varphi_C. \tag{1.6}$$

Da in der (1.5) der Integrand singularitätenfrei ist, ändert sich das Integral stetig, wenn $\mathfrak{z}$ den Integrationsweg C überschreitet; da es sowohl in G als auch in G^* holomorph ist, sind diese Zweige holomorphe Fortsetzungen von einander; das bedeutet, daß $d\varphi_C$ holomorph auf der ganzen Fläche R ist; (1.6) besagt daher, daß sich $Ld\varphi$ und $dL\varphi$ bzw. $L^*d\varphi$ und $dL^*\varphi$ um ein Differential 1. Gattung unterscheiden; dabei war vorausgesetzt, daß φ eine C-Funktion, $d\varphi$ also längs C periodenfrei ist.

1.5. Wir benötigen noch die folgende Aussage: φ und $d\sigma$ seien C-Größen; dann besitzen die C-Differentiale $\varphi(L^*d\sigma)$ und $(L\varphi)d\sigma$ längs C gleiche Perioden:

$$\int\limits_C \varphi(L^*d\sigma) = \int\limits_C (L\varphi)\, d\sigma. \tag{1.7}$$

Auch dieses ergibt sich sofort, wenn man für $L^*d\sigma$ und $L\varphi$ die Ausdrücke (1.1) mit entsprechend nach G bzw. G^* verschobenen Integrationswegen in diese Integrale einsetzt und in einem von ihnen die Integrationen vertauscht. Analog gilt:

$$\int\limits_C \varphi(L\,d\sigma) = \int\limits_C (L^*\varphi)\, d\sigma. \tag{1.8}$$

---

[13]) Ein Index bei d gibt die Variable an, auf die sich d bezieht.

§ 2. Cauchy-Größen

2.1. **Definition:** Die C-Größe ω heißt *Cauchy-Größe* in G bzw. G^*, wenn sie durch L bzw. L^* reproduziert wird:

$$L\,\omega = \omega \quad \text{bzw.} \quad L^*\omega = \omega.$$

Sie ist dann offenbar in G bzw. G^* holomorph. Hiernach und nach (1.2) ist für Cauchy-Größen

$$\begin{aligned} &\text{in } G: && \omega = L\,\omega \quad \text{oder} \quad L^*\omega = 0, \\ &\text{in } G^*: && \omega = L^*\omega \quad \text{oder} \quad L\,\omega = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

charakteristisch.

2.2. Für eine Cauchy-Funktion f in G und ein beliebiges C-Differential $d\sigma$ gilt nach (1.7) und (2.1)

$$\int_C f\,d\sigma = \int_C f(L^*d\sigma); \tag{2.2}$$

ebenso ist für ein Cauchy-Differential dg in G und eine beliebige C-Funktion φ nach (1.8) und (2.1)

$$\int_C \varphi\,dg = \int_C (L^*\varphi)\,dg; \tag{2.3}$$

für je zwei Cauchy-Größen f und dg in G gilt also stets

$$\int_C f\,dg = 0. \tag{2.4}$$

2.3. Die Stetigkeit der Laurent-Trennung führt für Cauchy-Größen in G zu folgender fundamentalen Konsequenz: zunächst sei ω eine beliebige C-Größe; aus

$$\omega_n \to \omega \ \textit{gleichmäßig auf } C$$

folgt

$$L\,\omega_n \to L\,\omega \ \textit{gleichmäßig im Inneren von } G;$$

ist speziell ω eine Cauchy-Größe in G, so ergibt sich

Satz 1 (Approximationssatz): *ω sei eine Cauchy-Größe in G und werde auf C durch die Folge ω_n von C-Größen gleichmäßig approximiert; dann wird ω im Inneren von G gleichmäßig durch die Folge $L\,\omega_n$ approximiert.*

2.4. Es erhebt sich die Frage nach der Existenz von Cauchy-Größen in G. Da für eine solche $\omega = L\,\omega$ gilt, braucht man sie nur unter den Größen der Form $L\,\omega$ zu suchen. Diejenigen $L\,\omega$ sind nach (2.1) gerade die Cauchy-Größen, für die

$$L(L\,\omega) = L\,\omega \quad \text{oder} \quad L^*L\,\omega = 0 \tag{2.5}$$

ist. Wegen der Vertauschbarkeit (1.4) von L und L^* ist das gleichbedeutend mit

$$L\,L^*\omega = 0 \quad \text{oder} \quad L^*(L^*\omega) = L^*\omega. \tag{2.6}$$

Satz 2a. *$L\omega$ ist genau dann Cauchy-Größe in G, wenn $L^*\omega$ Cauchy-Größe in G^* ist.*

Falls nun G^* auf R kompakt liegt, gilt in G^* der Residuensatz: für jede in G^* holomorphe Größe, also a fortiori für jedes $L^*\omega$, ist (2.6) erfüllt; also ist daher (2.5) für alle Größen $L\omega$ richtig.

Satz 2 (Cauchysche Integralformel)[14]: *Liegt G^* auf R kompakt, so werden genau die Größen der Form $L\omega$ durch ihre Cauchy-Integralformel dargestellt; sie sind also gerade die gesuchten Cauchy-Größen*[15].

Es gibt wirklich Cauchy-Größen, denn jede C-Größe ω, die nicht holomorph in ganz G^* fortsetzbar ist, liefert in $L\omega$ eine nicht verschwindende Cauchy-Größe. Andererseits ist aber die Menge der Cauchy-Größen kleiner als die Menge der in $G + C$ holomorphen Größen: beispielsweise ist $L\gamma = 0$ *für jede ganze Größe* γ.

§ 3. Faber-Entwicklungen

3.1. Die Voraussetzungen des Approximationssatzes lassen sich folgendermaßen erfüllen:

In G wähle man zu C ein geeignetes Kurvensystem C'', das zusammen mit C ein System von Ringgebieten berandet, und betrachte dort die vorgegebene zu approximierende Cauchy-Größe ω. Man bilde jedes dieser Ringgebiete konform auf einen Kreisring einer Hilfsebene ab und entwickle dort die jeweilige Komponente der auf diese Kreisringe verpflanzten Cauchy-Größe ω in eine Laurent-Reihe. Die n-ten Partialsummen dieses Reihensystems stellen, auf R zurückverpflanzt, auf jedem Kurvensystem C', das zwischen C und C'' verläuft, C'-Größen ω_n dar, die dort gleichmäßig gegen ω konvergieren. Da C' beliebig nahe bei C gewählt werden kann, folgt aus dem Approximationssatz und der Linearität (1.3), daß die Reihen, die man aus obigen Laurent-Reihen durch gliedweise Anwendung des Operators L längs C' erhält, im Inneren von G gleichmäßig gegen ω konvergieren. — Bei diesen Überlegungen haben wir nicht benutzt, daß ω noch auf C holomorph ist; wir brauchen die Holomorphie von ω nur auf jedem zu C (hinreichend) benachbarten C'.

Die approximierenden Größen $L\omega_n$ sind in G holomorph; sie sind nach (1.2) über C hinaus nach G^* genausoweit analytisch fortsetzbar wie die Größen ω_n; sie sind also auf ganz R meromorph genau dann, wenn die ω_n in ganz $G^* + C$ meromorph sind. Um das zu erreichen, wird man versuchen, die Abbildungen obiger Ringgebiete auf Kreisringe zu einer Abbildung von G^* fortzusetzen. Diese ist dann insbesondere auf C holomorph; da C in Kreisränder übergeht, muß C also aus analytischen Kurven bestehen. Nehmen wir weiter an, was wir schon zur Kennzeichnung der Cauchy-Größen (Satz 2) taten, daß G^* auf R kompakt liegt, so gibt es[16] eine Abbildung τ von G^* auf eine (nicht notwendig zusammenhängende) Überlagerungsfläche der τ-Ebene, die jede Kurve aus C der Linie des Einheitskreises schlicht überlagert. Setzen wir C als analytisch voraus, so leistet diese Abbildung das

[14]) Vgl. Fußnote 6.

[15]) Unter Cauchy-Größen schlechthin verstehen wir solche in G.

[16]) Vgl. [8].

Verlangte: sie ist über C hinaus holomorph fortsetzbar, so daß man in G ein Kurvensystem C'' finden kann derart, daß die zwischen C und C'' gelegenen Ringgebiete unter τ in Kreisringe übergehen. Man wird aber weiter noch dafür sorgen müssen, daß das in ω_n zusammengeschlossene System von nunmehr auf G^* erklärten Größen dort *eine* Größe ausmacht; anders ausgedrückt: die auf zwei Kurven von C erklärten Zweige der Größe ω_n müßten sich in G^* meromorph ineinander fortsetzen lassen, falls die beiden Kurven in G^* verbindbar wären. Das führt uns zu der zusätzlichen Voraussetzung, daß schon jede einzelne Kurve aus C beranden soll. Wir fassen diese Einschränkungen zusammen zu der für das folgende gültigen

Voraussetzung: *Das Kurvensystem C auf R bestehe aus endlich vielen punktfremden analytischen Jordankurven, deren jede für sich eine kompakte Komponente von G^* berandet.*

Bemerkungen: a) Wir können die Voraussetzung, daß G^* auf R kompakt liegt, dadurch abschwächen, daß wir nur fordern, *jede Komponente von G^* solle von endlichem Geschlecht sein.* Dieser Fall läßt sich auf den obigen zurückführen, weil R zu einer Riemannschen Fläche $\tilde{R}$ fortgesetzt werden kann, in der G ein kompaktes Komplement besitzt. Denn nach einem Satz von L. Sario[17]) läßt sich jede Komponente G_i^* von G^* $(i = 1, \ldots, r)$ in eine geschlossene Riemannsche Fläche R_i von gleichem Geschlecht einbetten. Da R_i von der Randkurve C_i von G_i^* zerlegt wird, bestimmt C_i eine Teilfläche $\tilde{G}_i^*$ von R_i, die G_i^* enthält. Verheften wir nun jedes $\tilde{G}_i^*$ längs C_i mit G, so erhalten wir die gewünschte Fläche $\tilde{R}$. Als dF wählen wir schließlich ein zu $\tilde{R}$ gehöriges Elementardifferential und können dann mit $\tilde{G}^* = \Sigma \tilde{G}_i^*$ statt $G^* = \Sigma G_i^*$ die Theorie für $\tilde{R}$ statt für R entwickeln.

b) Des weiteren nehmen wir zur Vereinfachung der Darstellung an, *daß C nur aus einer einzigen Kurve besteht*, G^* also ein Gebiet ist. Diese Voraussetzung ist unwesentlich; denn sei sie nicht erfüllt, bestehe also C aus den Kurven $C_1, \ldots, C_r$ und G^* entsprechend aus den Gebieten $G_1^*, \ldots, G_r^*$, und sei ω eine Cauchy-Größe in G, so gilt in G

$$\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_r \tag{3.0}$$

mit $\omega_i = L_i \omega$, wo L_i der C_i zugeordnete Operator ist; ω_i ist in $R - G_i^*$ holomorph und nach Satz 2 dort eine Cauchy-Größe:

$$L_i \omega_i = \omega_i.$$

Wegen (3.0) ist also eine Cauchy-Größe im allgemeinen Falle mehrerer Randkurven Summe von Cauchy-Größen, die zu einer einzigen Randkurve gehören; die folgenden Ergebnisse lassen sich daher sofort auf den allgemeinen Fall übertragen.

3.2. Wir führen jetzt diese Andeutungen durch. — Die analytische Jordankurve C auf R zerlege also R in die Gebiete G und G^*; letzteres liege kompakt

[17]) Vgl. [6], Satz 16.

in R. Es gibt nach [8] eine Abbildung τ von G auf eine Überlagerungsfläche der τ-Ebene, die aus einer gewissen Anzahl N von Vollebenen und einer Kreisscheibe vom Radius 1 besteht. Es kann angenommen werden, daß τ in G^* nur einfache Nullstellen $\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_N$ und einfache Pole $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_N$ besitzt; wenn G^* schlichtartig ist, kann $N = 0$ gewählt werden, anderenfalls ist N sicherlich positiv. τ ist auf C noch holomorph.

3.3. Wir definieren nun als die zu G gehörigen *Faber-Größen*

$$\Phi_n = L\,\tau^{-n}, \quad d\,\Psi_n = L(\tau^{-n-1}\,d\tau), \tag{3.1}$$

und als die ihnen *zugeordneten Größen*

$$\varphi_n = L^*\tau^{-n}, \quad d\,\varphi_n = L^*(\tau^{-n-1}\,d\tau). \tag{3.2}$$

Es gilt wegen (1.2) zunächst auf C

$$\tau^{-n} = \Phi_n + \varphi_n, \quad \tau^{-n-1}\,d\tau = d\,\Psi_n + d\,\psi_n; \tag{3.3}$$

da aber die linken Seiten in G^* meromorph, die Größen φ_n und $d\,\psi_n$ dort wegen (3.2) holomorph sind, sind die in G holomorphen Größen Φ_n und $d\Psi_n$ durch (3.3) meromorph in G^* erklärt; sie sind also meromorph auf ganz R, und zwar nach Satz 2 wegen (3.1) Cauchy-Größen in G, während sie in G^* genau die Singularitäten von τ^{-n} bzw. $\tau^{-n-1}\,d\tau$ aufweisen.

Wegen $\tau^{-n-1}\,d\tau = -\dfrac{1}{n}\,d(\tau^{-n})$ für $n \neq 0$ folgt noch aus (1.6), daß sich $d\Psi_n$ und $-\dfrac{1}{n}\,d\Phi_n$ für $n \neq 0$ nur um ein Differential 1. Gattung unterscheiden; insbesondere sind diese $d\Psi_n$ also selbst Differentiale 2. Gattung, d. h. Differentiale ohne Residuen. Dagegen ist nach (3.1) und (1.1)

$$d\,\Psi_0(\mathfrak{z}) = -\sum_0^N dF(\mathfrak{z}, \mathfrak{n}_\nu) + \sum_1^N dF(\mathfrak{z}, \mathfrak{p}_\nu),$$

also ein Differential 3. Gattung, das an den Nullstellen $\mathfrak{n}_\nu$ bzw. Polstellen $\mathfrak{p}_\nu$ von τ einfache Pole mit den Residuen $+1$ bzw. -1 besitzt.

Satz 3: *Die zu G gehörigen Faber-Größen Φ_n und $d\,\Psi_n$ sind auf R meromorph, und zwar in G Cauchy-Größen, während sie sich in G^* von den dort meromorphen Größen τ^{-n} bzw. $\tau^{-n-1}d\tau$ um die holomorphen zugeordneten Größen φ_n und $d\,\psi_n$ unterscheiden. Für $n \neq 0$ ist $d\,\Psi_n$ auf R ein Differential 2. Gattung, das sich von $-\dfrac{1}{n}d\Phi_n$ um das Differential 1. Gattung $-\dfrac{1}{n}\,d(\tau^{-n})_C$ unterscheidet*[18]*); $d\,\Psi_0$ ist ein Differential 3. Gattung, während $\Phi_0 = 0$.*

3.4. ω sei eine Cauchy-Größe. Da τ auf C noch holomorph ist, besitzen die Definitionsgebiete von ω und τ ein in G an C grenzendes Ringgebiet als Durchschnitt, in dem sich ω in eine Laurent-Reihe nach Potenzen von τ entwickeln läßt; und zwar ist, je nachdem ω eine Cauchy-Funktion f oder

[18]) Vgl. Gleichung (1.5).

ein Cauchy-Differential dg bedeutet[19]),

$$(3.4)\qquad f=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\tau^{-n}\qquad \text{mit}\quad a_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f\tau^{n-1}\,d\tau,$$

$$(3.5)\qquad dg=\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n\tau^{-n-1}\,d\tau\qquad \text{mit}\quad b_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \tau^{n}\,dg;$$

dabei ist C' eine in G gelegene und zu C homologe und beliebig benachbarte Kurve.

Wegen der Linearität des jetzt längs C' genommenen Operators L folgt aus dem Approximationssatz, daß die Cauchy-Größen gleichmäßig im Innern von G dargestellt werden durch

$$(3.6)\qquad f=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\Phi_n,$$

$$(3.7)\qquad dg=\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n\,d\Psi_n$$

mit denselben Koeffizienten, die in den Laurent-Reihen (3.4) und (3.5) auftreten. Da zu vorgegebener Cauchy-Größe diese Koeffizienten durch die Laurent-Reihen eindeutig bestimmt sind, während es im allgemeinen verschiedene Faber-Reihen (3.6) bzw. (3.7) gibt, welche dieselbe Größe darstellen, wollen wir diese Koeffizienten als *ausgezeichnete* Koeffizienten der betrachteten Größe bezeichnen. Für die ausgezeichneten Koeffizienten a_n in (3.4) ergeben (2.2), (3.2), (3.4)

$$(3.8)\qquad a_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f\,d\psi_{-n};$$

ebenso folgt für die Koeffizienten b_n in (3.5) aus (2.3), (3.2), (3.5)

$$(3.9)\qquad b_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \varphi_{-n}\,dg.$$

Satz 4 (**Entwicklungssatz**): *Jede Cauchy-Größe läßt sich gleichmäßig im Innern von G in eine Reihe nach Faber-Größen entwickeln. Als Koeffizienten dieser Reihe können dieselben Koeffizienten gewählt werden, die in der Laurent-Reihe auftreten, durch welche die gegebene Cauchy-Größe auf C' dargestellt wird; diese ausgezeichneten Koeffizienten drücken sich durch die gegebene Größe und durch die den Faberschen zugeordneten Größen gemäß* (3.8) *bzw.* (3.9) *aus.*

(3.5). Ebenso wie die Möglichkeit der Entwicklung von Cauchy-Größen (in G) nach Faber-Größen wird bewiesen, daß sich die in G^* holomorphen Größen — sie sind wegen der Kompaktheit von G^* die Cauchy-Größen in G^* — dort nach den zugeordneten Größen entwickeln lassen; bedeutet $'C$ eine in G^* gelegene und zu C homologe und hinreichend benachbarte Kurve, so lautet dies Resultat

[19]) Die den zu C' benachbarten Kurven entsprechenden Kreise in der τ-Ebene sind negativ orientiert.

Satz 5: ***f^* und dg^* seien in G^* holomorph. Sie besitzen im Innern von G^* gleichmäßig konvergente Darstellungen***

$$f^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n, \quad dg^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_n d\psi_n, \tag{3.10}$$

deren Koeffizienten übereinstimmen mit denjenigen in den auf 'C gültigen Laurent-Reihen

$$f^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n \tau^{-n}, \quad dg^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_n \tau^{-n-1} d\tau \tag{3.11}$$

und errechnet werden können aus

$$\alpha_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{'C} f^* \tau^{n-1} d\tau = -\frac{1}{2\pi i}\int_{'C} f^* d\Psi_{-n} \tag{3.12}$$

bzw.

$$\beta_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{'C} \tau^n dg^* = -\frac{1}{2\pi i}\int_{'C} \Phi_{-n} dg^*. \tag{3.13}$$

Die beiden letzten Beziehungen folgen wegen $L^* f^* = f^*$ und $L^* dg^* = dg^*$ aus (1.8) bzw. (1.7).

§ 4. Der Fall N = 0

4.1. Wenn G^* schlichtartig ist, kann $N = 0$ gewählt werden, das Bild von G^* unter τ ist also der schlichte Einheitskreis. In diesem Falle ergeben sich wesentliche Vereinfachungen.

Da τ auf G^* keinen Pol und genau eine einfache Nullstelle besitzt, sind die Größen τ^{-n} für alle $n \leqq 0$ und die Größen $\tau^{-n-1}d\tau$ für alle $n \leqq -1$ auf $G^* + C$ holomorph; sie werden daher von L^* reproduziert, von L also annulliert:

$$\Phi_n = 0, \quad \varphi_n = \tau^{-n} \quad \text{für } n = 0, -1, -2, \ldots$$
$$d\Psi_n = 0, \quad d\psi_n = \tau^{-n-1}d\tau \quad \text{für } n = \quad -1, -2, \ldots .$$

4.2. In den Faber-Reihen (3.6) und (3.7) läuft die Summation daher nur über $n > 0$ bzw. $n \geqq 0$. Das bewirkt, daß diese Darstellungen *einzig* sind. Um das einzusehen, beachten wir, daß Φ_n sich in G^* von τ^{-n} um die holomorphe Funktion φ_n unterscheidet; die in der Nähe von C gültige Laurent-Reihe für Φ_n enthält also außer dem Glied τ^{-n} nur τ-Potenzen mit positiven Exponenten. Setzt man diese Reihen in eine gleichmäßig im Innern von G konvergente Faber-Reihe $\sum_1^\infty{}' a_n \Phi_n$ ein und ordnet nach Potenzen von τ, so erhält man eine Laurent-Reihe, deren Anteil mit negativen Exponenten gerade $\sum_1^\infty{}' a_n \tau^{-n}$ ist und die im Durchschnitt einer geeigneten Umgebung von C mit G die durch die Faber-Reihe gegebene Funktion darstellt. Nach Satz 4 enthält die ausgezeichnete Faber-Reihe dieser Funktion dieselben Koeffizienten wie die eben gebildete Laurent-Reihe. Die gegebene Faber-Reihe ist also mit der

ausgezeichneten Faber-Reihe identisch, weil in beiden Reihen die Koeffizienten für $n > 0$ übereinstimmen und für $n \leq 0$ gar nicht auftreten. — Ebenso schließt man für Reihen nach den $d\,\Psi_n$.

4.3. Betrachten wir jetzt zu einer Cauchy-Größe ω die sie in der Nähe von C darstellende Laurent-Reihe! Diese zerfällt in die beiden Teilreihen[20]), in denen τ nur mit negativen bzw. nur mit nicht-negativen Exponenten auftritt. Die Reihe mit nicht-negativen Exponenten ist in G^* holomorph, während die andere nach obigem gerade die Koeffizienten besitzt, die in der Faber-Reihe von ω auftreten. Vergleicht man also eine Faber-Reihe und eine mit demselben Koeffizienten gebildete Potenzreihe von der Form (3.11), so erkennt man, daß beide sich nur um eine in G^* holomorphe Größe unterscheiden. Anders ausgedrückt: beide Reihen weisen in G^* gleiche Singularitäten auf[21]); insbesondere ist die durch die Faber-Reihe dargestellte Cauchy-Größe ω in ganz G^* meromorph fortsetzbar, genau dann, wenn die zugehörige Potenzreihe in der τ-Ebene eine rationale Funktion darstellt (verallgemeinerter Satz von ULLMAN). Ferner folgt ohne weiteres, daß andere interessante Eigenschaften — wie Überkonvergenz, Nichtfortsetzbarkeit, abelsche und Taubersche Eigenschaften — einer Faber-Reihe und der mit den gleichen Koeffizienten gebildeten Potenzreihe stets simultan zukommen.

Satz 6: *Wenn $N = 0$ ist, ist G^* schlichtartig und wird von τ auf den schlichten Einheitskreis abgebildet. Dann gilt*

$$\Phi_n \equiv 0, \quad \varphi_n \equiv \tau^{-n} \qquad \textit{für} \quad n = 0, -1, -2, \ldots ,$$
$$d\,\Psi_n \equiv 0, \; d\,\psi_n \equiv \tau^{-n-1} d\tau \qquad \textit{für} \quad n = -1, -2, \ldots ,$$

während Φ_n und $d\,\Psi_n$ für $n > 0$ bzw. $n \geq 0$ auf R genau einen Pol besitzt, dieser liegt auf der Nullstelle von τ und hat die Ordnung n bzw. $n+1$. Verschiedene im Innern von G gleichmäßig konvergente Faber-Reihen stellen verschiedene Cauchy-Größen dar. Die im Innern von G gleichmäßig konvergenten Faber-Reihen

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \Phi_n, \quad \sum_{0}^{\infty} b_n d\Psi_n$$

unterscheiden sich von den entsprechenden Potenzreihen

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \tau^{-n}, \quad \sum_{0}^{\infty} b_n \tau^{-n-1} d\tau,$$

die stets im Durchschnitt von G mit einer Umgebung von C konvergieren, um Größen, die in $G^* + C$ holomorph sind.

§ 5. Die Faber-Größen

5.1. Wir kehren zum allgemeinen Fall $N \geq 0$ zurück. Da C bezüglich G^* negative Orientierung besitzt und weil in G^* wegen der Kompaktheit der

[20]) Das ist die übliche Laurent-Trennung in der τ-Ebene.

[21]) Dies ist der eigentliche Kern des nachfolgenden Satzes von I. L. ULLMANN [11], der seinerseits einen Satz von L. ILIEV [4] umfaßt.

Residuensatz gilt, ergibt sich aus (1.1), daß das Elementardifferential $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ für festes $\mathfrak{z}$ aus G^* ein Cauchy-Differential in $\mathfrak{y}$ und für festes $\mathfrak{y}$ aus G^* eine Cauchy-Funktion in $\mathfrak{z}$ ist. Nach Satz 4 bestehen daher Entwicklungen

$$dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} b_n(\mathfrak{z})\, d\Psi_n(\mathfrak{y}) & \text{für} \quad \mathfrak{y} \in G,\ \mathfrak{z} \in G^* \\ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n(\mathfrak{y})\, \Phi_n(\mathfrak{z}) & \text{für} \quad \mathfrak{y} \in G^*,\ \mathfrak{z} \in G, \end{cases}$$

deren Koeffizienten $b_n(\mathfrak{z})$ bzw. $a_n(\mathfrak{y})$ sich nach (3.5) bzw. (3.4) und (1.1), (3.2) ergeben zu

$$b_n(\mathfrak{z}) = -L^* \tau^n(\mathfrak{z}) = -\varphi_{-n}(\mathfrak{z}),$$
$$a_n(\mathfrak{y}) = -L^*(\tau^{n-1}(\mathfrak{y})\, d\tau(\mathfrak{y})) = -d\,\psi_{-n}(\mathfrak{y}).$$

Damit erhalten wir

Satz 7: *Das Elementardifferential $dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ besitzt folgende ausgezeichneten Faber-Entwicklungen:*

$$(5.1) \qquad dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} -\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{-n}(\mathfrak{z})\, d\Psi_n(\mathfrak{y}) & \text{für} \quad \mathfrak{z} \in G^*,\ \mathfrak{y} \in G \\ -\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(\mathfrak{z})\, d\psi_{-n}(\mathfrak{y}) & \text{für} \quad \mathfrak{z} \in G,\ \mathfrak{y} \in G^*. \end{cases}$$

5.2. Die Faber-Größen Φ_n und $d\Psi_n$ besitzen als Cauchy-Größen selbst ausgezeichnete Faber-Entwicklungen

$$(5.2) \qquad \Phi_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{nk} \Phi_k,$$

$$(5.3) \qquad d\Psi_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{nk}\, d\Psi_k.$$

Von Interesse ist eine Beziehung zwischen den Koeffizienten A_{nk} und B_{nk}: nach (3.4), (3.5) ist

$$A_{nk} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi_n \tau^{k-1}\, d\tau, \quad B_{nk} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \tau^k\, d\Psi_k$$

und daher nach (1.7), (3.1) und (1.2)

$$\begin{aligned} A_{nk} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_C L(\tau^{-n})\, \tau^{k-1}\, d\tau \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_C \tau^{-n} L^*(\tau^{k-1}\, d\tau) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_C \tau^{-n} (\tau^{k-1}\, d\tau - L(\tau^{k-1}\, d\tau)) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_C \tau^{-n+k-1}\, d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_C \tau^{-n}\, d\Psi_{-k} \\ &= \delta_{nk} - B_{-k,-n} \quad (\delta_{nk}\text{: Kronecker-Symbol}). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die (allseitig unendlich ausgedehnten) Koeffizientenmatrizen mit

(5.4) $$\mathbf{A} = \|A_{nk}\|,\quad \mathbf{B} = \|B_{nk}\|,$$

definieren wir

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \|B_{-k,-n}\|$$

als *Transponierte* von B und setzen $\mathbf{E} = \|\delta_{nk}\|$, **so lautet unser Ergebnis**

Satz 8: ***Für die Koeffizientenmatrizen der ausgezeichneten Faber-Entwicklungen*** **(5.2)** ***und*** **(5.3)** ***der Faber-Größen gilt***

(5.5) $$\mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}\,.$$

5.3. Es seien noch einige weitere Eigenschaften der Faber-Größen angeführt.

Aus Satz 3 folgt, *daß für* $N > 0$ ***außer*** Φ_0 ***kein*** Φ_n ***oder*** $d\,\Psi_n$ ***identisch verschwindet.***

(2.4) besagt, daß für jedes Paar Φ_k, $d\,\Psi_l$ **gilt**

$$\int_C \Phi_k d\,\Psi_l = 0\,.$$

Man erkennt leicht, daß etwa die erste der in Satz 7 angegebenen Entwicklungen des Elementardifferentials gerade die in Satz 5 genannte Darstellung nach den zugeordneten Funktionen φ_n **ist; es gilt also nach Satz 5 und 7 gleichzeitig**

$$dF(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = \begin{cases} -\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{-n}(\mathfrak{z})\, d\,\Psi_n(\mathfrak{y}) \\ -\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau^n(\mathfrak{z})\, d\,\Psi_n(\mathfrak{y}) \end{cases} \qquad \text{für} \quad \mathfrak{y} \in G,\ \mathfrak{z} \in C;$$

subtrahiert man beide Reihen, so erhält man

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{-n}(\mathfrak{z})\, d\,\Psi_n(\mathfrak{y}) \equiv 0 \qquad \text{für} \quad \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in G;$$

denn die zunächst für $\mathfrak{z} \in C$ **gültige Beziehung überträgt sich nach dem Approximationssatz (Satz 1) auf ganz** G**; in dieser *Nullentwicklung* verschwindet außer für** $n = 0$ **kein Summand identisch, falls** $N > 0$**. — Analog ergibt sich**

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{-n}(\mathfrak{z})\, d\,\psi_n(\mathfrak{y}) \equiv 0 \quad \text{für } \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in G^*.$$

Im klassischen Falle spielten die Abschätzungen der Faber-Polynome eine wichtige Rolle. Es seien noch deren Analoga hergeleitet:

Da C **durch** τ **auf den Kreis** $|\tau| = 1$ **eindeutig bezogen wird, gibt es eine ganze Umgebung** S **von** C**, die durch** τ **schlicht auf einen Kreisring**

(5.6) $$1 - \delta^* < |\tau| = \varrho < 1 + \delta$$

abgebildet wird; δ^* **und** δ **seien maximal gewählt**[22]**). Die zu** ϱ **gehörige**

[22]) Falls $N = 0$, ist $\delta^* = 1$.

in S gelegene Kurve nennen wir C_ϱ; es ist also $C = C_1$; für $\varrho > 1$ liegt C_ϱ in G, für $\varrho < 1$ in G^*.

Für $\mathfrak{z} \in G$ ist

$$\Phi_n(\mathfrak{z}) = L\,\tau^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=\varrho} \tau^{-n}(\mathfrak{y})\, dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$$

mit solchem ϱ aus (5.6), daß $\mathfrak{z}$ durch C_ϱ von C getrennt wird. Daraus folgt

$$|\Phi_n(\mathfrak{z})| \leq M\,\varrho^{-n+1},$$

wobei M eine von ϱ und $\mathfrak{z}$ abhängige in $\mathfrak{y} \in C_\varrho$ gleichmäßige Schranke für $\left|\dfrac{dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{d\tau(\mathfrak{y})}\right|$ ist.

Also gilt

$$\overline{\lim_{n>0}}\ \sqrt[n]{|\Phi_n(\mathfrak{z})|} \leq \frac{1}{1+\delta} \quad \text{für } \mathfrak{z} \in G - S$$

und

$$\overline{\lim_{n<0}}\ \sqrt[-n]{|\Phi_n(\mathfrak{z})|} \leq 1 - \delta^* \quad \text{für } \mathfrak{z} \in G + S\,.$$

Für $n > 0$ und $\mathfrak{z} \in S$ erhält man dagegen folgende scharfe Beziehung: es gilt

$$\varphi_n(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=\varrho} \tau^{-n}(\mathfrak{y})\, dF(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$$

mit ϱ beliebig aus

$$|\tau(\mathfrak{z})| < \varrho < 1 + \delta;$$

somit ist

$$|(\varphi_n(\mathfrak{z})| \leq M\,\varrho^{-n+1};$$

in

$$\Phi_n = \tau^{-n} - \varphi_n = \tau^{-n}(1 - \varphi_n \tau^n)$$

strebt daher die Klammer für $n \to \infty$ gegen 1; dasselbe gilt für einen geeigneten Zweig ihrer n-ten Wurzel; *also gilt für eine bestimmte Wahl der Wurzeln*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(\mathfrak{z})} = \frac{1}{\tau(\mathfrak{z})} \quad \textit{für } \mathfrak{z} \in S\,.$$

Analoges ergibt sich für die Faberschen Differentiale.

§ 6. Faber-Reihen

6.1. Eine im Innern von G gleichmäßig konvergente Reihe nach Faber-Größen stellt dort eine Cauchy-Größe dar, wie man sofort durch gliedweise Anwendung des Operators L längs einer Kurve C' erkennt.

Satz 9: *Aus einer im Innern von G gleichmäßig konvergenten Faber-Reihe, sie stelle die Cauchy-Größe ω dar, erhält man die ausgezeichnete Faber-Reihe von ω durch Einsetzen der ausgezeichneten Faber-Reihen* (5.2) *bzw.* (5.3) *für die Faber-Größen und Umordnung nach diesen; insbesondere wird eine ausgezeichnete Faber-Reihe durch diesen Prozeß reproduziert.*

Beweis: Die einzusetzenden Faber-Reihen (5.2), (5.3) haben dieselben Koeffizienten wie die Laurent-Reihen, durch welche die Faber-Größen bei C dargestellt werden; setzt man diese Laurent-Reihen in die gegebene Faber-

Reihe ein und ordnet um, so erhält man die Laurent-Reihe von ω. Ersichtlich bewirkt diese Umordnung dieselbe Kombination der Koeffizienten wie die im Satz genannte Umordnung nach den Faber-Größen; daher folgt die Behauptung aus Satz 4.

Wendet man Satz 9 auf die Reihen (5.2), (5.3) an, so erhält man

Satz 10: *Die Matrizen* $\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{B}$ *sind idempotent*:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A},\ \mathbf{B}^2 = \mathbf{B}. \tag{6.1}$$

6.2. Wir wollen jetzt einen Einblick in die für $N > 0$ vorkommenden *Nullentwicklungen* gewinnen. Da unsere Methode darin bestehen wird, daß wir gleichzeitig mit einer gegebenen Faber-Reihe die zugehörige Laurent-Reihe mit demselben Koeffizienten betrachten, müssen wir die Menge aller im Innern von G gleichmäßig konvergenten Faber-Reihen einschränken; falls $N > 0$, braucht die zugehörige Laurent-Reihe nämlich nirgends auf R zu konvergieren. Wir fordern also von den im folgenden betrachteten Faber-Reihen, daß die zugehörige Laurent-Reihe noch auf jeder in G gelegenen und zu C hinreichend benachbarten Kurve C' konvergiert; jedenfalls bleiben per definitionem die ausgezeichneten Faber-Reihen von dieser Einschränkung unberührt. Konvergiert umgekehrt eine Laurent-Reihe in der angegebenen Weise, sie stelle die Größe ω dar, so auch die mit demselben Koeffizienten gebildeten Reihen nach den Faberschen bzw. den zugeordneten Größen und stellen in G bzw. in $G^* + C$ die Größen $L\omega$ bzw. $L^*\omega$ dar.

Die ausgezeichneten Faber-Reihen sind dadurch charakterisiert, daß $\omega = L\omega$, also $L^*\omega = 0$ ist, die Nullentwicklungen dadurch, daß $L\,\omega = 0$, also $\omega = L^*\omega$ holomorph in $G^* + C$ ist.

Da die Reihen (5.2) ausgezeichnet sind, gilt

$$\Phi_n = \tau^{-n} - \varphi_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{nk}\tau^{-k},$$

also, da wegen Satz 8

$$\delta_{nk} - A_{nk} = B_{-k,-n}$$

ist,

$$\varphi_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{-k,-n}\tau^{-k};$$

mithin erhält man in

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{-k,-n}\Phi_k \equiv 0$$

ein System von Nullentwicklungen, das im Sinne von Satz 5 alle Nullentwicklungen nach den Φ_n *erzeugt.* Analoges gilt von

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{-k,-n}\, d\,\Psi_k \equiv 0.$$

Es gibt keine endliche Nullentwicklung

$$\sum_{n_1}^{n_2} a_n \Phi_n \equiv 0,$$

die Faber-Größen sind also zu je endlich vielen linear unabhängig. Denn aus einer solchen Nullentwicklung würde folgen, daß

$$\omega = \sum_{n_1}^{n_2} a_n \tau^{-n}$$

in ganz G^* holomorph fortsetzbar wäre; das ist aber im Falle $N > 0$ nicht möglich, weil jede Potenz von τ in G^* Pole besitzt, die sich in obiger Summe offenbar nicht kompensieren können.

Die analoge Frage, *ob eine endliche Faber-Reihe*

$$\sum_{n_1}^{n_2} a_n \Phi_n$$

ausgezeichnet sein kann, ist äquivalent zu derjenigen, ob

$$\sum_{n_1}^{n_2} a_n \varphi_n \equiv 0 \tag{6.2}$$

möglich ist. Auf dasselbe Problem führt die Frage, *ob endlich viele obiger Nullentwicklungen linear abhängig sein können,* daß also eine endliche Linearkombination von ihnen die Null trivial[23]) darstellt. Diese Fragen können nicht a priori verneint werden. Jedoch bedeutet das Bestehen von (6.2), daß die in G^* meromorphe Funktion

$$\sum_{n_1}^{n_2} a_n \tau^{-n}$$

sich holomorph über ganz G fortsetzen läßt, und stellt somit ersichtlich eine Ausnahme dar.

6.3. Es soll schließlich noch ein Resultat von Heuser [3] auf unseren allgemeinen Fall übertragen werden.

R_1, R_2 seien zwei Riemannsche Flächen, G_1, G_2 Gebiete auf ihnen, die von den einfachen analytischen Kurven C_1, C_2 berandet werden und die kompakt liegenden Komplementärgebiete G_1^*, G_2^* besitzen. Die Stellen auf R_i, die Operatoren der Laurent-Trennung und die Größen auf R_i unterscheiden wir durch (untere oder obere) Indizes.

Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen den in G_1 und G_2 durch Faber-Reihen mit *denselben* Koeffizienten dargestellten Cauchy-Größen. Es sei etwa

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\mathfrak{z}_1) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \Phi_n^{(1)}(\mathfrak{z}_1), \quad \mathfrak{z}_1 \in G_1 \subset R_1, \\ f^{(2)}(\mathfrak{z}_2) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \Phi_n^{(2)}(\mathfrak{z}_2), \quad \mathfrak{z}_2 \in G_2 \subset R_2, \end{aligned} \tag{6.3}$$

und es werde angenommen, daß die zugehörigen Laurent-Reihen in G_i auf

[23]) Das heißt: Alle Koeffizienten der Faber-Größen verschwinden.

Kurven C_i' konvergieren, die hinreichend nahe bei C_i liegen: dort sei also

$$\varphi^{(1)}(\mathfrak{z}_1) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \tau_1^{-n}(\mathfrak{z}_1),$$

$$\varphi^{(2)}(\mathfrak{z}_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \tau_2^{-n}(\mathfrak{z}_2).$$

Nun sind aber die Kurven C_1' und C_2' durch $\tau_1(\mathfrak{z}_1) = \tau_2(\mathfrak{z}_2)$ konform auf einander bezogen: es gibt eine auf C_2' holomorphe Funktion

$$\mathfrak{z}_1 = \chi(\mathfrak{z}_2),$$

so daß dort

$$\varphi^{(2)}(\mathfrak{z}_2) \equiv \varphi^{(1)}(\chi(\mathfrak{z}_2))$$

ist.

Da für die durch die Faber-Reihen dargestellten Funktionen

$$f^{(i)} = L_i\, \varphi^{(i)}$$

gilt, folgt also:

$$f^{(2)}(\mathfrak{z}_2) = L_2\, \varphi^{(1)}(\chi(\mathfrak{z}_2));$$

setzt man jetzt noch voraus, daß speziell die Darstellung (6.3) ausgezeichnet ist, so ergibt sich

$$f^{(2)}(\mathfrak{z}_2) = L_2 f^{(1)}(\chi(\mathfrak{z}_2)).$$

Wir fassen dieses Ergebnis und das entsprechende für Differentiale zusammen zu

Satz 11 (**Heusersche „Übertragung"**): *Es seien*

$$f^{(1)}(\mathfrak{z}_1) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, \Phi_n^{(1)}(\mathfrak{z}_1),$$

$$dg^{(1)}(\mathfrak{z}_1) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n\, d\Psi_n^{(1)}(\mathfrak{z}_1)$$

ausgezeichnete Faber-Reihen in $G_1 \subset R_1$. Dann gilt für die durch

$$f^{(2)}(\mathfrak{z}_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, \Phi_n^{(2)}(\mathfrak{z}_2),$$

$$dg^{(2)}(\mathfrak{z}_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n\, d\Psi_n^{(2)}(\mathfrak{z}_2)$$

in $G_2 \subset R_2$ dargestellten Cauchy-Größen

$$f^{(2)}(\mathfrak{z}_2) = L_2 f^{(1)}(\chi(\mathfrak{z}_2)),$$

$$dg^{(2)}(\mathfrak{z}_2) = L_2\, dg^{(1)}(\chi(\mathfrak{z}_2));$$

dabei bedeutet $\mathfrak{z}_1 = \chi(\mathfrak{z}_2)$ die durch $\tau = \tau_i(\mathfrak{z}_i)$ vermittelte konforme Abbildung einer in G_2 gelegenen Halbumgebung von C_2 auf eine solche von C_1 in G_1.

Literatur

[1] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430—461 (1948). — [2] FABER, G.: Über polynomische Entwicklungen I. Math. Ann. **57**, 389—408 (1903). — [3] HEUSER, P.: Über eine Transformation der Faberschen Polynomreihen. Math. Z. **38**, 777—782 (1934). — [4] ILIEV, L.: Reihen von Faber-Polynomen, deren Koeffizienten eine endliche Anzahl von Werten annehmen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 499—502 (1953). — [5] RÖHRL, H.: Zur Theorie der Faberschen Entwicklungen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. Arch. d. Math. **3**, 93—102 (1952). — [6] SARIO, L.: Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand. Ann. Acad. Fenn., Ser. A1, **50** (1948). — [7] TIETZ, H.: Fabersche Entwicklungen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. J. reine u. angew. Math. **190**, 22—33 (1952). — [8] TIETZ, H.: Eine Normalform berandeter Riemannscher Flächen. Math. Ann. **129**, 44—49 (1955). — [9] TIETZ, H.: Laurent-Trennung und zweifach unendliche Faber-Systeme. Math. Ann. **129**, 431—450 (1955). — [10] TILLMANN, H. G.: Dualität in der Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen. J. reine u. angew. Math. **195**, 76—101 (1956). — [11] ULLMANN, J. L.: On Faber Series. Michigan Math. J. **2**, 109—114 (1954).

(Eingegangen am 15. Juli 1956)

SCHIEFERDECKER, E.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 430—441 (1957)

Einige Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas der Funktionentheorie in komplexen Banach-Räumen

Von

EBERHARD SCHIEFERDECKER in Münster (Westf.)

Für Funktionen $f(x)$, welche in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ eines komplexen BANACH-Raumes $\mathfrak{X}$ mit Werten in einem komplexen BANACH-Raum $\mathfrak{Y}$ definiert sind, läßt sich wie folgt ein brauchbarer Holomorphiebegriff einführen: $f(x)$ heißt F-holomorph in $\mathfrak{G}$, wenn zu jedem $x \in \mathfrak{G}$ ein Element $f'(x)$ des BANACH-Raumes $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ aller beschränkten linearen Operationen von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ so existiert, daß

$$(1) \qquad \|f(x+h) - f(x) - f'(x)\,h\| = o(\|h\|) \quad \text{für } \|h\| \to 0 \quad x \in \mathfrak{G}, h \in \mathfrak{X}$$

gilt (SEBASTIÃO E SILVA [5], 2; 2, Definition). Diesem Begriff ordnen sich insbesondere die Holomorphiebegriffe der Theorien einer und mehrerer komplexen Veränderlichen unter (2, Bemerkung 3).

Für F-holomorphe Funktionen gilt ein Analogon des SCHWARZschen Lemmas, wie SHIMODA [4], Theorem 2, kürzlich gezeigt hat. Die vorliegende Arbeit behandelt die naheliegende Frage, ob dieser Satz von SHIMODA im Rahmen einer Theorie F-holomorpher Funktionen zu einer ähnlichen Stellung berufen ist wie sein Prototyp in der klassischen Funktionentheorie. Es wird gezeigt, daß einige Sätze aus dem Ideenkreis des SCHWARZschen Lemmas für F-holomorphe Funktionen mut. mut. richtig bleiben: Ist $f(x)$ in $\|x\| < R$ F-holomorph und gilt dort $\|f(x)\| \leqq M$, so bestehen die Relationen

$$(2) \qquad \|f(x)\| \leqq M \frac{M\,\|x\| + R\,\|f(0)\|}{M R + \|f(0)\|\,\|x\|} \qquad \|x\| < R,$$

$$(3) \qquad \|f'(x)\| \leqq \frac{2\,M R}{R^2 - \|x\|^2} \qquad \|x\| < R$$

(4, Satz 1; 6, Satz 2). Wenn außerdem

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(0) = 0 \qquad n \geqq 1, \text{ganz},$$

so gilt noch

$$(4) \qquad \|f(x)\| \leqq \frac{M}{R^n} \|x\|^n \qquad \|x\| < R$$

(4, Satz 2). In (2) bzw. (4) ist für $f(0) = 0$ bzw. $n = 1$ der Satz von SHIMODA (3, Satz 1) enthalten. Da in BANACH-Räumen eine Produktbildung beliebiger Elemente nicht erklärt ist, werden die Beweise von (2), (3), (4) und anderer Ungleichungen nicht nach den in der klassischen Funktionentheorie üblichen Beweisverfahren (die Multiplikationen und Divisionen benutzen) angesetzt. Doch gibt es auch Sätze des behandelten Ideenkreises, deren Beweise für den

klassischen Fall fast wörtlich übertragen werden können. Ein Beispiel hierfür bildet die Aussage, daß jede beschränkte ganze F-holomorphe Funktion konstant ist (3, Satz 2). Dieses Analogon des Satzes von LIOUVILLE läßt sich zu einer Charakterisierung der „F-Polynome" verallgemeinern (3, Satz 3).

Eine Anwendung findet der Satz von SHIMODA beim Beweis des Satzes, daß die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, ... irgendeiner F-holomorphen Funktion $f(x)$ F-holomorphe Funktionen mit Werten in $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$, $\big[\mathfrak{X}, [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]\big]$, ... sind (5, Satz 1, 5, Satz 2). Dies wurde zuerst von ZORN bewiesen ([8], (2.9)), und zwar unter Benutzung eines Hilfssatzes über Operatorfunktionen; in der vorliegenden Arbeit wird zum Beweis der genannten Aussage ein bei HILLE [3], 4.5 entwickeltes Beweisverfahren weiter ausgebaut, wobei 3, Satz 1 zur Anwendung kommt.

1. Vorbemerkungen über BANACH-Räume

Bei den funktionentheoretischen Untersuchungen in 2, ..., 6 werden Definitionsbereich und Wertevorrat der betrachteten Funktionen stets als Teilmengen vollständiger komplexer BANACH-Räume[1]) $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, ... vorausgesetzt. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden Normen $\|x\|$, $\|y\|$, ... von Elementen $x, y, \ldots$ aus $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \ldots$ mit dem gleichen Symbol $\| \; \|$ bezeichnet, da Verwechslungen kaum zu befürchten sind. Für Nullelemente evtl. verschiedener Räume wird einheitlich das Symbol θ verwendet. Eine Ausnahme bildet dabei lediglich die komplexe Zahl Null (0).

Der Raum der beschränkten linearen Operatoren, die $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ abbilden, wird mit $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ bezeichnet; insbesondere ist $\mathfrak{X}^* = [\mathfrak{X}, C^1]$ der zu $\mathfrak{X}$ adjungierte Raum (Raum der komplexwertigen beschränkten linearen Funktionale auf $\mathfrak{X}$). Erinnert sei daran, daß in einem BANACH-Raum der Form $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ insbesondere drei Topologien, die schwache, die starke und die gleichmäßige (Norm-) Topologie, von Interesse sind und zu drei Konvergenzbegriffen Veranlassung geben. Vgl. hierzu auch[3]).

Einfachste Beispiele komplexer BANACH-Räume erhält man aus der Menge C^n aller n-tupel $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ komplexer Zahlen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ $(n \geqq 1$, ganz) vermöge der Definitionen

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) + (\zeta_1', \ldots, \zeta_n') = (\zeta_1 + \zeta_1', \ldots, \zeta_n + \zeta_n') \qquad \zeta_\nu, \zeta_\nu' \in C^1,$$

$$\alpha(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (\alpha\,\zeta_1, \ldots, \alpha\,\zeta_n) \qquad \alpha, \zeta_\nu \in C^1,$$

$$\|(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\| = \operatorname*{Max}_{i=1,\ldots,n} |\zeta_i| \text{ oder } = \left(\sum_{i=1}^{n} |\zeta_i|^p\right)^{1/p} \qquad p \geqq 1, \zeta_\nu \in C^1.$$

Die so aus C^n entstehenden BANACH-Räume werden der Einfachheit halber wieder mit C^n bezeichnet.

2. Vorbemerkungen zur Funktionentheorie in komplexen BANACH-Räumen

Von grundlegender Bedeutung für den Aufbau einer Funktionentheorie in komplexen BANACH-Räumen sind geeignete Holomorphie-Begriffe. Diese

---

[1]) Wegen der hier und im folgenden als bekannt angesehenen Begriffsbildungen und Sätze vgl. man etwa HILLE [3], Chap. I, ... IV.

sollen einerseits so allgemein gefaßt sein, daß sie die Holomorphie-Begriffe der Funktionentheorien einer und mehrerer komplexen Veränderlichen als Spezialfälle enthalten, andererseits so speziell sein, daß man auf der Basis dieser Begriffsbildungen eine hinreichend umfangreiche Theorie entwickeln kann.

Es ist seit langem bekannt, daß man, ausgehend von den durch GÂTEAUX und FRÉCHET eingeführten Differentialen („G-Differential" und „F-Differential"), zu Holomorphie-Begriffen gelangt, die sich als geeignet im Sinne der obigen Forderungen erwiesen haben (vgl. etwa [3], Chap. III, IV). Insbesondere kommt man dabei auch zu den sog. F-holomorphen Funktionen, die in der vorliegenden Arbeit ausschließlich betrachtet werden. Diese lassen sich aber auch in einer Form einführen, die in genauer Analogie zu dem Vorgehen in der klassischen Analysis steht, wobei der Umweg über Differentiale vermieden wird[2]). Vgl. SEBASTIÃO E SILVA [5], 2.

Definition. $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ seien komplexe BANACH-Räume, $\mathfrak{G}$ ein in $\mathfrak{X}$ liegendes Gebiet. Eine in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion $f(x)$ mit Werten in $\mathfrak{Y}$ heißt *F-differenzierbar in einem Punkte* $x_0 \in \mathfrak{G}$, wenn es zu x_0 und $f(x)$ ein $f'(x_0) \in [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ gibt mit

$$(1) \qquad \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| = o(\|h\|) \quad \text{für} \quad \|h\| \to 0$$
$$h \in \mathfrak{X}, \ \|h\| \ \text{hinreichend klein.}$$

$f'(x_0) = f^{(1)}(x_0)$ heißt (*erste*) *Ableitung von* $f(x)$ *im Punkte* x_0[3]). Entsprechend werden höhere Ableitungen definiert[4]). $f(x)$ heißt *F-holomorph in* $\mathfrak{G}$, wenn $f(x)$ in jedem Punkte von $\mathfrak{G}$ F-differenzierbar ist.

---

[2]) Ein Aufbau der Theorie G- und F-holomorpher Funktionen ohne Verwendung von G- und F-Differentialen liegt bisher nicht vor, dürfte aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten bereiten.

[3]) Man beachte, daß bei dieser Auffassung $f'(x_0)$ im allgemeinen *nicht* Element von $\mathfrak{Y}$ ist; $f'(x_0)$ ist vielmehr als ein beschränkter linearer Operator zu deuten, der auf die Elemente h von $\mathfrak{X}$ wirkt und diese in $\mathfrak{Y}$ abbildet. Die Ableitung $f'(x)$ einer F-differenzierbaren Funktion ist demnach eine sogenannte *Operatorfunktion* (den Elementen $x \in \mathfrak{G}$ wird ein Operator $f'(x) \in [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ zugeordnet). Für Operatorfunktionen $y = \varphi(x)$, $x \in \mathfrak{G} \subsetneq \mathfrak{X}$, $y \in [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$, erweisen sich drei Konvergenzbegriffe als brauchbar, die der schwachen bzw. starken bzw. Normtopologie entsprechen: $\varphi(x)$ konvergiert schwach bzw. stark bzw. gleichmäßig gegen $A \in [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ für x gegen x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} |y^*\{[\varphi(x) - A]h\}| = 0$ für jedes $h \in \mathfrak{X}$ und jedes $y^* \in [\mathfrak{Y}, C^1]$, bzw. wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \|(\varphi(x) - A]\, h\| = 0$ für jedes $h \in \mathfrak{X}$, bzw. wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \|\varphi(x) - A\| = 0$. Vgl. [3], 3.4.

[4]) Sei bereits die n^{te} Ableitung $f^{(n)}(x)$ einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle $x_0 \in \mathfrak{G}$ definiert ($n \geq 1$, ganz). Existiert $f^{(n)}(x)$ in einer gewissen Umgebung von x_0, so soll $f^{(n+1)}(x_0)$ die erste Ableitung von $f^{(n)}(x)$ an der Stelle x_0 sein, falls existent. Ferner sei $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Auch die höheren Ableitungen $f^{(n)}(x)$, $n \geq 2$, sind Operatorfunktionen[3]), deren Argumentbereich in $\mathfrak{G}$ liegt, während der Wertevorrat den durch

$$\mathfrak{Z}_1 = [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}], \ \mathfrak{Z}_k = [\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}_{k-1}] \qquad k = 2, 3, \ldots$$

definierten Räumen $\mathfrak{Z}_n$ angehört.

Man bestätigt leicht, daß jede in $x_0 \in \mathfrak{G}$ F-differenzierbare Funktion $f(x)$ in einer gewissen Umgebung von x_0 lokal-beschränkt[5]) (sogar stetig) ist, daß ihre Ableitung $f'(x_0)$ in x_0 eindeutig bestimmt ist und mit dem für irgendwelche $f(x)$, $x \in \mathfrak{G}$, $h \in \mathfrak{X}$ definierbaren G-Differential

(2) $$\delta_x^h f = \delta f(x; h) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{f(x + \zeta h) - f(x)}{\zeta} \quad \text{falls existent}$$

$$x \in \mathfrak{G};\ \zeta \in C^1;\ |\zeta| \text{ hinreichend klein}^{6)}$$

gemäß

(3) $$f'(x_0)\, h = \delta_{x_0}^h f \qquad x_0 \in \mathfrak{G},\ h \in \mathfrak{X}$$

zusammenhängt. Umgekehrt zeigt man in der Theorie vektorwertiger Funktionen, daß eine Funktion $f(x)$, die in allen Punkten von $\mathfrak{G}$ diese Eigenschaften besitzt, F-holomorph ist:

Satz 1. *Eine in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ eines komplexen* BANACH-*Raumes $\mathfrak{X}$ definierte Funktion $f(x)$ mit Werten in einem komplexen* BANACH-*Raum $\mathfrak{Y}$ ist genau dann F-holomorph in $\mathfrak{G}$, falls sie in $\mathfrak{G}$ lokal-beschränkt ist und ein G-Differential $\delta_x^h f$ für beliebige $x \in G$, $h \in \mathfrak{X}$ besitzt.*

Ein Beweis dieses Satzes findet sich bei HILLE [3], Theorem 4.5.1.

Bemerkung 1. Der vorstehende Satz besagt, daß die Begriffe „analytisch" im Sinne von HILLE [3], Definition 4.5.2 und „F-holomorph" gleichbedeutend sind.

Bemerkung 2. Übrigens folgt schon aus schwächeren Zusatzbedingungen als der der Lokalbeschränktheit, daß eine in $\mathfrak{G}$ G-differenzierbare Funktion F-holomorph ist. Vgl. dazu HILLE [3], 4.8 oder ZORN [6], [7].

Als wichtiges beweistechnisches Hilfsmittel erweist sich der folgende Satz 2, der zum Beispiel bei HILLE [3], Theorem 3. 9. 1 (in anderer Formulierung) angegeben wird:

Satz 2. *Eine in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ des C^1 definierte Funktion $f(\zeta)$ mit Werten in einem komplexen* BANACH-*Raum $\mathfrak{Y}$ ist genau dann F-holomorph in $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $y^* \in \mathfrak{Y}^*$ die Funktion $\varphi(\zeta) = y^*(f(\zeta))$ eine im Sinne der klassischen Funktionentheorie in $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktion darstellt.*

Bemerkung 3. Wenn $\mathfrak{X} = C^n$, $\mathfrak{Y} = C^m$ (n, m ganz, $\geqq 1$) und $f_1(x), \ldots, f_m(x)$, $x = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ des C^n im üblichen Sinne holomorphe Funktionen mit Werten in C^1 sind, so ist $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ eine in $\mathfrak{G}$ F-holomorphe Funktion mit Werten in C^m. Der Begriff der F-Holomorphie umfaßt also die Holomorphie-Begriffe aus der Theorie einer und mehrerer komplexen Veränderlichen. Die Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ ist die Funktional-

[5]) $f(x)$ heißt in einer offenen Menge $\mathfrak{G}$ *lokal-beschränkt*, wenn es zu jedem $x_0 \in \mathfrak{G}$ positive Zahlen $r(x_0)$ und $M(x_0)$ gibt, so daß $\|f(x)\| \leqq M(x_0)$ für jedes $x \in \mathfrak{G}$ mit $\|x - x_0\| \leqq r(x_0)$.

[6]) Der Limes ist im Sinne der starken Topologie von $\mathfrak{Y}$ zu verstehen. Die Forderung „$|\zeta|$ hinreichend klein" kann leicht präzisiert werden: Bezeichnet man mit $\varrho(x, h)$ das Supremum aller Zahlen $\varrho \geqq 0$, für die aus $|\eta| \leqq \varrho$ die Relation $x + \eta h \in \mathfrak{G}$ folgt, so muß $|\zeta| < \varrho(x, h)$ gelten.

matrix $A = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial \zeta_l}\right)_{m,n}$. Wenn für $k = m, n$ $\|(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)\| = \underset{\varkappa=1,\ldots,k}{\mathrm{Max}} |\zeta_\varkappa|$ bzw. $= \left(\sum_{\iota=1}^{k} |\zeta_\varkappa|^2\right)^{1/2}$ gesetzt wird, ergibt sich $\|F'(x)\| = \underset{i=1,\ldots,m}{\mathrm{Max}} \sum_{\varkappa=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i(x)}{\partial \zeta_\varkappa}\right|$ bzw. $= (\lambda_{\mathrm{Max}}(\bar{A}'A))^{1/2}$, wobei $\lambda_{\mathrm{Max}}(\bar{A}'A)$ den größten Eigenwert der Matrix $\bar{A}'A$, $\bar{A}' = \left(\overline{\frac{\partial f_l(x)}{\partial \zeta_i}}\right)_{n,m}$ bedeutet.

3. Das Schwarzsche Lemma und der Satz von Liouville

Von Shimoda [4], Theorem 2, wurde folgende Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas bewiesen:

Satz 1. *$f(x)$ sei eine in einer Hyperkugel $\|x\| < R$ eines komplexen* Banach-*Raumes $\mathfrak{X}$ F-holomorphe Funktion mit Werten in einem komplexen* Banach-*Raum $\mathfrak{Y}$. Ferner sei $f(\theta) = \theta$* und *$\|f(x)\| \leq M$ für $\|x\| < R$. Dann gilt sogar*

$$\|f(x)\| \leq \frac{M}{R}\|x\| \qquad \|x\| < R, \tag{1}$$

wobei in (1) für gewisse Punkte $x \neq \theta$ das Gleichheitszeichen stehen kann, ohne daß es notwendig überall in $\|x\| < R$ gilt. Abschätzung (1) kann nicht verbessert werden.

Auf einen Beweis soll verzichtet werden, zumal die in 4 betrachteten Sätze Satz 1 als Spezialfall enthalten. Erwähnt sei nur ein Beispiel von H. Cartan [2], das zeigt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes 1 sehr wohl in gewissen Punkten $x \neq \theta$ ($\|x\| < R$) die Relation $\|f(x)\| = (M/R)\|x\|$ gelten kann, ohne daß sie im ganzen Gebiet $\|x\| < R$ erfüllt ist: Sei $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = C^2$, $\|(\zeta_1, \zeta_2)\| = (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2)^{1/2}$, $\zeta_1, \zeta_2 \in C^1$. $f((\zeta_1, \zeta_2)) = \left(\zeta_2 + \frac{\zeta_1^2}{4}, \frac{\zeta_1}{2}\right)$ vermittelt eine F-holomorphe Abbildung der Hyperkugel $\|(\zeta_1, \zeta_2)\| < 1$ in sich, wobei $\|f((\zeta_1, \zeta_2))\| = \|(\zeta_1, \zeta_2)\|$ in allen Punkten $(0, \zeta_2)$, $|\zeta_2| < 1$, und nur in diesen Punkten gilt.

Der Satz von Liouville kann wie folgt verallgemeinert werden:

Satz 2. *Jede in einem komplexen* Banach-*Raum $\mathfrak{X}$ beschränkte F-holomorphe Funktion $f(x)$ mit Werten in einem komplexen* Banach-*Raum $\mathfrak{Y}$ ist konstant.*

Beweis. Sei etwa $\|f(x)\| \leq M$ in $\mathfrak{X}$. Wendet man auf die Funktion $\varphi(x) = f(x) - f(\theta)$ in $\|x\| < R$ (R beliebig > 0) Satz 1 an, so ergibt sich

$$\|\varphi(x)\| = \|f(x) - f(\theta)\| \leq \frac{2M}{R}\|x\| \qquad \|x\| < R.$$

Läßt man bei festem $x \in \mathfrak{X}$ R gegen Unendlich streben, so folgt $f(x) = f(\theta)$.

Der erweiterte Liouvillesche Satz der klassischen Funktionentheorie läßt sich durch vollständige Induktion aus einer dem Liouvilleschen Satz gleichwertigen Aussage gewinnen (siehe etwa Carathéodory [1], Nr. 168), darf also wegen des Zusammenhanges zwischen Schwarzschem Lemma und Satz von Liouville und wegen des oben Bemerkten dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas zugerechnet werden. Der erweiterte Satz von Liouville und sein Induktionsbeweis können in die Theorie F-holomorpher Funktionen übertragen werden.

Definition. $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ seien komplexe BANACH-Räume, $P(x)$ eine für alle $x \in \mathfrak{X}$ definierte Funktion mit Werten in $\mathfrak{Y}$. $P(x)$ heißt F-Polynom m^{ten} Grades, wenn $P(x)$ ein Polynom m^{ten} Grades (siehe etwa HILLE [3], Definition 4. 2. 2) ist, das außerdem F-holomorph ist[7]).

Satz 3. *$\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ seien komplexe* BANACH-*Räume, $f(x) \not\equiv 0$ eine in ganz $\mathfrak{X}$ F-holomorphe Funktion mit Werten in $\mathfrak{Y}$, $A_n(f)$ die Aussage: „Zu $f(x)$ und $n \geq 0$ gibt es Zahlen $M > 0$, $R > 0$, so daß für alle $x \in \mathfrak{X}$ mit $\|x\| > R$ die Relation*

$$\|f(x)\| < M\,\|x\|^n$$

besteht.“ Behauptung: $A_n(f)$ ist genau dann erfüllt, wenn $f(x)$ ein F-Polynom höchstens n^{ten} Grades ist.

Beweis[8]). 1. Durch vollständige Induktion nach n werde die folgende Aussage B_n bewiesen: „Ist $A_n(f)$ erfüllt, so ist $f(x)$ ein F-Polynom höchstens n^{ten} Grades; für $\mathfrak{X} = C^1$, $\mathfrak{Y}$ beliebig kann dieses in der Form $f(\zeta) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} b_\nu \zeta^\nu$, b_k geeignet $\in \mathfrak{Y}$, $\zeta \in C^1$ geschrieben werden.“

B_0 und Satz 2 sind gleichwertig (ist $f(x)$ für alle $x \in \mathfrak{X}$ mit $\|x\| > R$ beschränkt, so auch für alle $x \in \mathfrak{X}$ (Integraldarstellung von $f(x)$!)).

Sei B_{n-1}, $n - 1 \geq 0$, bereits bewiesen und sei $f(x)$ eine beliebige F-holomorphe Funktion mit $\|f(x)\| < M\|x\|^n$ für $\|x\| > R$. Man bilde bei beliebigem festem $\theta \neq x \in \mathfrak{X}$ die Funktion

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(x\zeta) - f(\theta)}{\zeta}, \quad 0 \neq \zeta \in C^1; \quad \varphi(0) = \lim_{\zeta \to 0} \varphi(\zeta)\,.$$

$\varphi(\zeta)$ ist in C^1 F-holomorph mit

$$\|\varphi(\zeta)\| < (n\|x\|^n + \|f(\theta)\|)\,|\zeta|^{n-1} \qquad |\zeta| > \mathrm{Max}\,(1, R/\|x\|)\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung stellt $\varphi(\zeta)$ ein F-Polynom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades dar und kann in der Form

$$\varphi(\zeta) = b_1(x) + b_2(x)\,\zeta + \ldots + b_n(x)\,\zeta^{n-1} \qquad b_k(x) \in \mathfrak{Y},\ \zeta \in C^1$$

geschrieben werden. Wegen $k!\, b_{k+1}(x) = \dfrac{d^k \varphi(0)}{d\zeta^k} = \delta^{k+1} f(\theta; x)$[10]) und wegen des Zusammenhanges zwischen f und φ ergibt sich

$$f(x\zeta) = f(\theta) + \zeta\,\varphi(\zeta) = f(\theta) + \frac{\delta f(\theta; x)}{1!} + \cdots + \frac{\delta^n f(\theta; x)}{n!} \qquad x \in \mathfrak{X},\ \zeta \in C^1.$$

Nach bekannten Sätzen folgt hieraus, daß $f(x)$ ein F-Polynom sein muß.

2. Jedes Polynom n^{ten} Grades $P(x)$ kann als Summe homogener Polynome $P_0(x), \ldots, P_n(x)$ $0^{\text{ten}}, \ldots, n^{\text{ten}}$ Grades geschrieben werden: $P(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} P_\nu(x)$.

Wenn $P(x)$ F-holomorph ist, sind die $P_k(x)$ ebenfalls F-holomorph ([3], (4. 2. 3) und [3], Theorem 4. 3. 9). Es existieren daher Konstanten M_0,

---

[7]) Die Zusatzforderung der F-Holomorphie von $P(x)$ kann man durch wesentlich schwächere Bedingungen ersetzen. Zum Beispiel ist jedes stetige oder B-stetige Polynom bereits F-holomorph. — Vgl. die in [8]) zitierte Literatur.

[8]) Es werden einige Tatsachen über abstrakte Polynome benutzt. Vgl. deswegen HILLE [3], 4.2, ... 4.4.

$M_1, \ldots, M_n > 0$, so daß

$$\|P_0(x)\| \leq M_0, \|P_1(x)\| \leq M_1\|x\|, \ldots, \|P_n(x)\| \leq M_n\|x\|^n \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

([3], Theorem 4. 2. 4). Mithin ist $\|P(x)\| = O\ (\|x\|^n)$ für $\|x\| \to \infty$.

Bemerkung. Einen anderen Beweis des Satzes 3 kann man unter Benutzung von Integralformeln für die höheren Differentiale F-holomorpher Funktionen erhalten. Einen solchen Beweis gibt SHIMODA an. Einer Arbeit von SHIMODA entnehme ich, daß Satz 2 zuerst von A. E. TAYLOR in einer mir bisher nicht zugänglichen Arbeit „Analytic functions in general analysis". Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 6, 277—292 (1937), bewiesen wurde.

4. Weitere Verallgemeinerungen des SCHWARZschen Lemmas

In diesem Abschnitt sollen zwei Sätze behandelt werden, deren Analoga in der klassischen Funktionentheorie leichte Folgerungen des SCHWARZschen Lemmas sind. Da eine Produktbildung für zwei beliebige Elemente eines BANACH-Raumes nicht erklärt ist, werden die Beweise dieser Sätze nicht nach den in der klassischen Funktionentheorie üblichen Schlußverfahren (die Multiplikationen und Divisionen benutzen) erbracht.

Satz 1. *$f(x)$ sei eine in einer Hyperkugel $\|x\| < R$ eines komplexen* BANACH-*Raumes $\mathfrak{X}$ F-holomorphe Funktion mit Werten in einem komplexen* BANACH-*Raum $\mathfrak{Y}$. Wenn $\|f(x)\| \leq M$ für $\|x\| < R$, so gelten die Beziehungen*

$$(1) \qquad \|f(x)\| \leq M \frac{M\|x\| + R\|f(\theta)\|}{MR + \|f(\theta)\|\,\|x\|} \qquad \|x\| < R,$$

$$(2) \qquad M \frac{M - \|f(\theta)\|}{MR + \|f(\theta)\|\,\|x\|} \leq \frac{M - \|f(x)\|}{R - \|x\|} \qquad \|x\| < R.$$

Diese Abschätzungen können nicht verbessert werden.

Satz 2. *Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Darüberhinaus gelte noch*

$$(3) \qquad f(\theta) = \theta, f'(\theta) = \theta, \ldots, f^{(n-1)}(\theta) = \theta \qquad n \geqq 1, \text{ganz}^{9)}).$$

Dann besteht sogar die Relation

$$(4) \qquad \|f(x)\| \leq \frac{M}{R^n}\|x\|^n \qquad \|x\| < R,$$

die nicht verbessert werden kann.

Der Beweis dieser Sätze wird nach folgendem Schema durchgeführt: Die Sätze 1 und 2 sind für $\mathfrak{X} = C^1$, $\mathfrak{Y} = C^1$ offenbar richtig (siehe etwa CARATHÉODORY [1], Nr. 287 und 141); mit Hilfe von 2, Satz 2 erkennt man dann, daß diese Sätze auch für $\mathfrak{X} = C^1$, $\mathfrak{Y}$ beliebig, richtig sein müssen. Der allgemeine Fall: $\mathfrak{X}$ beliebig, $\mathfrak{Y}$ beliebig wird in naheliegender Weise auf den Spezialfall $\mathfrak{X} = C^1$, $\mathfrak{Y}$ beliebig zurückgeführt. Der Beweis zu Satz 1 sei etwas genauer ausgeführt:

---

[9]) Man beachte, daß in (3) Nullelemente verschiedener Räume mit demselben Symbol bezeichnet sind. Es ist $f(\theta) \in \mathfrak{Y}$, $f'(\theta) \in [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] = \mathfrak{Z}_1, \ldots, f^{(n-1)}(\theta) \in \mathfrak{Z}_{n-1}{}^{3)}$). Daß eine F-holomorphe Funktion $f(x)$ Ableitungen beliebiger Ordnung in jedem Punkte ihres Holomorphiegebietes besitzt, folgt aus 5, Satz 2.

Für $\mathfrak{X} = C^1$, $\mathfrak{Y}$ beliebig ergibt sich zunächst wegen 2, Satz 2

$$\|y^*(f(\zeta))\| \leq M \|y^*\| \frac{M\|y^*\| |\zeta| + R\|y^*(f(0))\|}{M\|y^*\| R + \|y^*(f(0))\| |\zeta|} \qquad |\zeta| < R,$$

wobei y^* ein beliebiges vom Nullfunktional verschiedenes beschränktes lineares Funktional auf $\mathfrak{Y}$ bedeutet. Man erhält weiter

$$(5) \qquad \|y^*(f(\zeta))\| / \|y^*\| \leq M \frac{M|\zeta| + R\|y^*(f(0))\|/\|y^*\|}{MR + (\|y^*(f(0))\|/\|y^*\|)|\zeta|} \qquad |\zeta| < R;\ \theta \neq y^* \in \mathfrak{Y}^*$$

Unter Beachtung der leicht zu verifizierenden Relation

$$\operatorname*{Max}_{0 \leq \xi \leq \xi_0} \frac{A + B\,\xi}{C + D\,\xi} = \frac{A + B\,\xi_0}{C + D\,\xi_0} \qquad A, B, C, D > 0,\ AD - BC > 0$$

kann man die rechte Seite der Ungleichung (5) nach oben abschätzen. Man erhält wegen $\sup\limits_{y^* \neq \theta} \frac{\|y^*(f(0))\|}{\|y^*\|} = \|f(0)\|$ (folgt sofort aus $\|y^*(f(0))\| \leq \|y^*\|\,\|f(0)\|$ und aus $y^*(f(0)) = \|f(0)\|$ für geeignetes $y^* \in \mathfrak{Y}^*$ mit $\|y^*\| = 1$ (vgl. etwa [3], Theorem 2. 9. 3))

$$\|y^*(f(\zeta))\|/\|y^*\| \leq M \frac{M|\zeta| + R\|f(0)\|}{MR + \|f(0)\|\,|\zeta|} \qquad |\zeta| < R,\ \theta \neq y^* \in \mathfrak{Y}^*.$$

Man wähle nun für beliebiges, aber festes ζ aus $0 < |\zeta| < R$ ein $y_\zeta^* \in \mathfrak{Y}^*$ mit $\|y_\zeta^*\| = 1$ und $y_\zeta^*(f(\zeta)) = \|f(\zeta)\|$. Dann ergibt sich Ungleichung (1) für $\mathfrak{X} = C^1$, $\mathfrak{Y}$ beliebig.

Sei nun auch $\mathfrak{X}$ ein beliebiger komplexer BANACH-Raum. Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 genügt die durch

$$\varphi_x(\zeta) = f(\zeta\, x) \qquad x \in \mathfrak{X},\ \zeta \in C^1;\ 0 < \|x\| < R,\ |\zeta| < \frac{R}{\|x\|}$$

für festes $x \neq \theta$ definierte Funktion von ζ den Bedingungen: $\varphi_x(\zeta)$ ist (wegen $\|\varphi_x(\zeta + \zeta') - \varphi_x(\zeta) - \zeta'\delta f(\zeta x; x)\| = O(|\zeta'|)$ für $\zeta' \to 0$) F-holomorph in $|\zeta| < \frac{R}{\|x\|}$ mit $\varphi_x(0) = \theta$ und $\|\varphi_x(\zeta)\| \leq M$. Nach dem soeben Bewiesenen gilt daher

$$\|\varphi_x(\zeta)\| \leq M \frac{M\|x\| + R\|\varphi_x(0)\|}{MR + \|\varphi_x(0)\|\,\|x\|} \qquad |\zeta| < \frac{R}{\|x\|},$$

woraus (1) für $\zeta = 1$ folgt (für $x = \theta$ ist nichts zu beweisen). (1) und (2) sind gleichbedeutend, wie eine elementare Rechnung lehrt.

Bemerkung. Aus Satz 1 wie aus Satz 2 erhält man das verallgemeinerte SCHWARZsche Lemma 3, Satz 1 durch evidente Spezialisierungen.

5. Die Ableitung F-holomorpher Funktionen

Die Ableitung $f'(x)$ einer in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{X}$ F-holomorphen Funktion $f(x)$ mit Werten in $\mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ komplexe BANACH-Räume) ist eine Operatorfunktion[3]): $f'(x) \in [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$. Bezüglich der Normtopologie stellt $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ einen BANACH-Raum dar. Es liegt daher die Frage nahe, ob $f'(x)$ eine F-holomorphe Funktion in $\mathfrak{G}$ mit Werten in $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ im Sinne der Normtopologie von $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ ist. Nach ZORN [8], (2.9) ist diese Frage zu bejahen. Im folgenden soll ein anderer Beweis gegeben werden. Dieser zieht das verallgemeinerte SCHWARZsche

Lemma (3, Satz 1) und Teile der zum Beweis vom [3], Theorem 4. 5. 1 benutzten Methode heran und vermeidet eine Anwendung von [8], (2.6).

Satz 1. *$f(x)$ sei eine in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ eines komplexen* BANACH-*Raumes $\mathfrak{X}$ F-holomorphe Funktion von x mit Werten in einem komplexen* BANACH-Raum $\mathfrak{Y}$. *Dann ist $f'(x)$ eine in $\mathfrak{G}$ F-holomorphe Funktion mit Werten in $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ im Sinne der Normtopologie dieses Raumes, und es gilt*

$$(f''(x)\, h)\, k = \delta^2 f(x; h, k)^{10)} \qquad x \text{ beliebig} \in \mathfrak{G};\ h, k \text{ beliebig} \in \mathfrak{X}.$$

Beweis. $f(x)k$ ist für $x \in \mathfrak{G}$, k beliebig, aber fest $\in \mathfrak{X}$ eine F-holomorphe Funktion von x mit Werten in $\mathfrak{Y}$, kann daher um jeden Punkt $x \in \mathfrak{G}$ in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden, die in dem komplexen Stern (c-star) $C^*_{\mathfrak{G}}(x)$ um x in $\mathfrak{G}$[11]) konvergiert ([3], Theoreme 4. 3. 6 und 4. 5. 1). Man überzeugt sich leicht, daß

$$f'(x+h)\, k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\delta^{\nu+1} f(x; k, h, \ldots, h)}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\delta^{\nu+1} f(x; h, \ldots, h, k)}{\nu!}^{10)} \qquad x + h \in \mathfrak{C}^*_{\mathfrak{G}}(x)$$

die TAYLOR-Entwicklung von $f'(x)\, k$ um x in $\mathfrak{G}$ ist.

Es soll $\|\delta^{\nu+1} f(x; h, \ldots, h, k)\|$ in der Umgebung eines beliebigen Punktes $x_0 \in \mathfrak{G}$ abgeschätzt werden. Wegen der Lokalbeschränktheit von $f(x)$ in $\mathfrak{G}$ gilt mit den Bezeichnungen von [11]) für $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\|\frac{1}{m!}\delta^m f(x; l)\right\| \leq M(x_0) \cdot (2/r(x_0))^m\, \|l\|^m \qquad \|x - x_0\| \leq \frac{1}{2} r(x_0),\ l \text{ beliebig} \in \mathfrak{X}^{12)}.$$

Für $\|x - x_0\| < (1/4)\, r(x_0)$, $\|h\| < (1/4) r(x_0)$, $\theta \neq k$ beliebig $\in \mathfrak{X}$ besteht ferner für jedes $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ die Relation

$$\delta^{\nu+1} f(x; h, \ldots, h, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\delta^\nu f(x + \zeta k; h)}{\zeta^2}\, d\zeta \qquad \Gamma: |\zeta| = \frac{1}{4} r(x_0)/\|k\|$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\delta^\nu f(x + \zeta k; h) - \delta^\nu f(x; h)}{\zeta^2}\, d\zeta$$

(vgl. [3], Gleichung (4. 3. 1.) mit $n = 1$). Längs Γ gilt nach Obigem sicher

$$\|\delta^\nu f(x + \zeta k; h) - \delta^\nu f(x; h)\| \leq \nu! \cdot 2\, M(x_0)\, (2/r(x_0))^\nu\, \|h\|^\nu.$$

Andererseits kann auf die Funktion $\varphi(x') = \delta^\nu f(x + x'; h) - \delta^\nu f(x; h)$ in $\|x'\| \leq (1/4)\, r(x_0)$ das verallgemeinerte SCHWARZsche Lemma angewandt werden. Es lehrt insbesondere, daß auf Γ

$$\|\delta^\nu f(x + \zeta k; h) - \delta^\nu f(x, h)\| \leq \nu! \cdot 2\, M(x_0)\, (2/r(x_0))^\nu\, \|h\|^\nu\, \|\zeta k\|.$$

Eine elementare Abschätzung liefert nun sofort für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\|\frac{1}{\nu!}\delta^{\nu+1} f(x; h, \ldots, h, k)\right\| \leq \frac{2\, M(x_0)\, \|h\|^\nu\, \|k\|}{(\frac{1}{2} r(x_0))^\nu\, (\frac{1}{4} r(x_0))}$$

$$\|x - x_0\| < \frac{1}{4} r(x_0);\ \|h\| < \frac{1}{4} r(x_0);\ k \text{ beliebig} \in \mathfrak{X}.$$

---

[10]) Man setzt für $n \geq 1$, ganz $\delta^n f(x; h_1, \ldots, h_n) = \delta^{h_n}_x(\delta^{h_{n-1}}_x(\ldots(\delta^{h_1}_x f)\ldots))$ und $\delta^n f(x; h) = [\delta^n f(x; h_1, \ldots h_n)]_{h_1 = \ldots = h_n = h}$ (x beliebig $\in \mathfrak{G}$; $h, h_1, \ldots, h_n$ beliebig $\in \mathfrak{X}$).

[11]) $\mathfrak{C}^*_{\mathfrak{G}}(x) = \{x + h \in \mathfrak{G}$: aus $|\zeta| \leq 1$, $\zeta \in C^1$, und $x + h \in \mathfrak{G}$ folgt $x + \zeta h \in \mathfrak{G}\}$.

[12]) Siehe [3], Beweis von Theorem 4. 5. 1.

Mit Hilfe dieser Ungleichungen schließt man

$$\|f'(x+h)\,k - f'(x)\,k - \delta^2 f(x;k,h)\| \leq \frac{32\,M(x_0)\,\|h\|^2\,\|k\|}{(r(x_0))^2\,(r(x_0)-2\,\|h\|)}$$

$$\|x - x_0\| < \frac{1}{4}\,r(x_0);\ \|h\| < \frac{1}{4}\,r(x_0);\ k \text{ beliebig} \in \mathfrak{X}\,.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 sind sämtliche Ableitungen $f^{(n)}(x)$ von $f(x)$ F-holomorphe Funktionen in $\mathfrak{S}$ mit Werten in $\mathfrak{Z}_n$*[4]) *im Sinne der Normtopologie von $\mathfrak{Z}_n$, und es gilt*

$$(\ldots((f^{(n)}(x)\,h_1)\,h_2)\ldots)\,h_n = \delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n)$$

$$x \text{ beliebig} \in \mathfrak{S};\ h_1,\ldots,h_n \text{ beliebig} \in \mathfrak{X}\,.$$

Beweis. Trivial.

6. Abschätzung der ersten Ableitung beschränkter F-holomorpher Funktionen

Dem Ideenkreis des SCHWARZschen Lemmas der klassischen Funktionentheorie gehören Abschätzungsformeln für die Ableitung beschränkter holomorpher Funktionen an. Insbesondere gilt für jede in $|\zeta| < R$ holomorphe Funktion $f(\zeta)$, deren Werte in $|\zeta| \leq M$ liegen,

$$(1)\qquad |f'(\zeta)| \leq \frac{R}{M}\,\frac{M^2 - |f(\zeta)|^2}{R^2 - |\zeta|^2} \qquad |\zeta| < R\,.$$

Diese Abschätzung kann nicht verbessert werden. (Vgl. etwa CARATHÉODORY [1], Nr. 290.) Gibt es ein Analogon dieses Verzerrungssatzes in der Funktionentheorie komplexer BANACH-Räume?

Satz 1. *$f(\zeta)$ sei eine in $|\zeta| < R$, $\zeta \in C^1$, F-holomorphe Funktion mit Werten in einem komplexen* BANACH*-Raum $\mathfrak{Y}$, die der Bedingung $\|f(\zeta)\| \leq M$ für $|\zeta| < R$ genügt. Dann gilt*

$$(2)\qquad \|f'(\zeta)\| \leq \frac{R}{M\,(R^2 - |\zeta|^2)}\,\times$$
$$\times\,(M^2 - \sup\{|y^*(f(\zeta))|^2 : \|y^*\| = 1,\ |y^*(f'(\zeta))| = \|f'(\zeta)\|\}) \qquad |\zeta| < R,\ y^* \in \mathfrak{Y}^*,$$

also auch

$$(3)\qquad \|f'(\zeta)\| \leq \frac{R\,M}{R^2 - |\zeta|^2} \qquad |\zeta| < R\,.$$

Abschätzung (2) *kann nicht verbessert werden.*[13])

Beweis. Sei y^* ein beliebiges Element von $\mathfrak{Y}^*$ mit $\|y^*\| = 1$. Wegen (1), wegen $\frac{d}{d\zeta}\left(y^*(f(\zeta))\right) = y^*\left(\frac{d}{d\zeta}\,f(\zeta)\right)$ (siehe [3], Beweis von Theorem 3. 10. 2) und wegen 2, Satz 2 gilt dann

$$|y^*(f'(\zeta))| \leq \frac{R}{M}\,\frac{M^2 - |y^*(f(\zeta))|^2}{R^2 - |\zeta|^2} \qquad |\zeta| < R\,.$$

---

[13]) Und zwar in dem Sinne, daß es geeignete $\mathfrak{Y}$ und geeignete $f(x)$ gibt, so daß für alle $|\zeta| < R$ in (2) das Gleichheitszeichen steht.

Für jedes $y^* \in \mathfrak{Y}^*$ mit $\|y^*\| = 1$, $|y^*(f'(\zeta))| = \|f'(\zeta)\|$ erhält man hieraus

$$\|f'(\zeta)\| \leq \frac{R}{M} \frac{M^2 - |y^*(f(\zeta))|^2}{R^2 - |\zeta|^2} \qquad |\zeta| < R .$$

Diese Ungleichung führt sofort zu (2). Da (2) für $\mathfrak{Y} = C^1$ mit (1) übereinstimmt, kann (2) nach dem oben Bemerkten nicht durch eine bessere Abschätzung ersetzt werden.

Bemerkung 1. Im allgemeinen gilt

$$\sup \{|y^*(f(\zeta))|^2 \colon \|y^*\| = 1, |y^*(f'(\zeta))| = \|f'(\zeta)\|\} < \|f(\zeta)\|^2.$$

Der Versuch, für beliebige $\mathfrak{Y} \neq C^1$ statt (2) die schärfere Ungleichung

$$\|f'(\zeta)\| \leq \frac{R}{M} \frac{M^2 - \|f(\zeta)\|^2}{R^2 - |\zeta|^2} \qquad |\zeta| < R$$

zu beweisen, ist daher aussichtslos. Man kann übrigens leicht Beispiele angeben, in denen diese Relation verletzt ist: Sei $\mathfrak{Y} = C^2$ mit $\|(\zeta_1, \zeta_2)\| = (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2)^{1/2}$, $\zeta_1, \zeta_2 \in C^1$. Für $f_0(\zeta) = \left(\frac{1-2\zeta}{2-\zeta}, \frac{1-3\zeta}{3-\zeta}\right)$ sind die Voraussetzungen des Satzes 1 mit $R = 1$, $M = \sqrt{2}$ erfüllt. Es gilt

$$\|f_0'(0)\| = \frac{1}{36}\sqrt{1753}, \quad \frac{R}{M} \frac{M^2 - \|f_0(0)\|^2}{R^2 - 0^2} = \frac{59}{72}\sqrt{2},$$

und es ist

$$\frac{1}{36}\sqrt{1753} > \frac{59}{72}\sqrt{2}.$$

Satz 2. *$f(x)$ sei eine in einer Hyperkugel $\|x\| < R$ eines komplexen* BANACH-*Raumes $\mathfrak{X}$ F-holomorphe Funktion mit Werten in einem komplexen* BANACH-*Raum $\mathfrak{Y}$. Wenn $\|f(x)\| \leq M$ für $\|x\| < R$, so gilt*

$$\|f'(x)\| \leq \frac{M}{R - \|x\|} \qquad \|x\| < R, \tag{4}$$

also auch

$$\|f'(x)\| \leq \frac{2MR}{R^2 - \|x\|^2} \qquad \|x\| < R. \tag{5}$$

Beweis. Man setze für beliebiges festes $x \in \mathfrak{X}$ mit $\|x\| < R$, beliebiges $\theta \neq h \in \mathfrak{X}$ und beliebiges $\zeta \in C^1$ aus $|\zeta| < (R - \|x\|)/\|h\|$

$$\varphi_{x,h}(\zeta) = f(x + \zeta h) \qquad \zeta \in C^1, |\zeta| < (R - \|x\|)/\|h\| .$$

Die Funktion $\varphi_{x,h}(\zeta)$ ist in ihrem Definitionsbereich wegen

$$\varphi'_{x,h}(\zeta) = \lim_{\zeta' \to 0} \frac{f(x + (\zeta + \zeta')h) - f(x + \zeta h)}{\zeta'} = f'(x + \zeta h)\, h \qquad |\zeta| < (R - \|x\|)/\|h\|$$

F-holomorph. Anwendung des Satzes 1 liefert

$$\|\varphi'_{x,h}(\zeta)\| \leq \frac{R - \|x\|}{\|h\|} \cdot M \cdot \{((R - \|x\|)/\|h\|)^2 - |\zeta|^2\}^{-1} \qquad |\zeta| < (R - \|x\|)/\|h\| .$$

Für $\zeta = 0$ ergibt sich

$$\|f'(x)\, h\| \leq \frac{M}{R - \|x\|} \|h\| \qquad \|x\| < R,\ \theta \neq h \text{ beliebig} \in \mathfrak{X},$$

woraus (4) und (5) sofort folgen.

Bemerkung 2. Unter den Voraussetzungen des Satzes 2 erhält man ferner

$$\|f'(x)\| \leq \frac{R\,M}{R - \|x\|^2}\,\|x\| \qquad \|x\| < R\,.$$

Bemerkung 3. Wenn in Satz 2 speziell $\mathfrak{Y} = C^1$ ist, kann man (4) verschärfen. Es gilt dann die Ungleichung

$$\|f'(x)\| \leq \frac{R}{M}\,\frac{M^2 - |f(x)|^2}{R^2 - R\,\|x\|} \qquad \|x\| < R, \tag{6}$$

die man durch eine leichte Modifikation des Beweises von Satz 2 gewinnen kann.

Bemerkung 4. Unter Benutzung des in der vorliegenden Arbeit wiederholt angewandten Beweisprinzips lassen sich auch für die höheren Ableitungen beschränkter F-holomorpher Funktionen Verzerrungssätze angeben.

Literatur

[1] CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie I., II. Basel 1950. — [2] CARTAN, H.: Sur les fonctions de deux variables complexes. Les transformations d'un domaine borné D en un domaine intérieur à D. Bull. Soc. Math. France 58, 199—219 (1930). — [3] HILLE, E.: Functional analysis and semi-groups. New York 1948. — [4] SHIMODA, I.: Notes on general analysis II. J. Gakugei Tokushima Univ. 3, 12—15 (1953). — [5] SEBASTIÃO, J. E SILVA: Integração e derivação em espaços de BANACH. Univ. Lisboa. Rev. Fac. Ci. A. Ci. Math. (2) 1, 117—166 (1950). — [6] ZORN, M. A.: GÂTEAUX differentiability and essential boundedness. Duke Math. J. 12, 579—583 (1945). — [7] ZORN, M. A.: Characterisation of analytic functions in BANACH-spaces. Ann. of Math. (2) 46, 585—593 (1945). — [8] ZORN, M. A.: Derivatives and FRÉCHET differentials. Bull. Amer. Math. Soc. 52, 133—137 (1946).

(Eingegangen am 15. Juli 1956)

KANOLD, H.-J.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 442—450 (1957)

Über die Verteilung der vollkommenen Zahlen und allgemeinerer Zahlenmengen

Von

HANS-JOACHIM KANOLD in Braunschweig .

In einer vorangehenden Arbeit [1] wurde ein Satz von L. E. DICKSON in verallgemeinerter Gestalt bewiesen und in den letzten beiden Paragraphen wurden Folgerungen aus diesem Satz hergeleitet. In der vorliegenden Arbeit sollen die Betrachtungen von [1], § 7 verschärft und ergänzt werden.

§ 1

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *die Primpotenzzerlegung der natürlichen Zahl* n; h *sei eine feste natürliche Zahl;* $A_h(x)$ *sei die Anzahl der* $n \leqq x$, *bei welchen* $\alpha_\varkappa \geqq h$ *für* $\varkappa = 1, \ldots, k$ *gilt. Dann ist* $A_h(x) = O(x^{1/h})$.

Beweis. Jedem solchen n (mit $\alpha_\varkappa \geqq h$) können wir eindeutig die Zahl

$$w = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\beta_\varkappa} \tag{1}$$

mit

$$\beta_\varkappa = \left[\frac{\alpha_\varkappa}{h}\right] \tag{2}$$

zuordnen. Wir beachten, daß w genau die gleichen Primteiler wie n besitzt und

$$w \leqq n^{1/h} \leqq x^{1/h} \tag{3}$$

gilt. Es seien jetzt

$$q_1 < q_2 < \cdots < q_g < \cdots \tag{4}$$

die der Größe nach geordneten Primzahlen. Dann gilt: Für

$$\left(\frac{x}{q_1 q_2 \cdots q_g}\right)^{1/h} < w \leqq \left(\frac{x}{q_1 q_2 \cdots q_{g-1}}\right)^{1/h} \tag{5}$$

gehören zu jedem solchen w weniger als h^g verschiedene $n \leqq x$. Also erhalten wir

$$A_h(x) < x^{1/h} + \sum_{g=2}^{\infty} h^g \left(\frac{x}{q_1 q_2 \cdots q_{g-1}}\right)^{1/h} = x^{1/h}\left(1 + \sum_{g=2}^{\infty} h^g \,(q_1 q_2 \cdots q_{g-1})^{-1/h}\right). \tag{6}$$

Wie man nach dem Quotientenkriterium leicht sieht, ist diese rechts stehende unendliche Reihe konvergent. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 2

Wir führen jetzt eine neue Bezeichnungsweise ein. Ist

$$n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}, \tag{7}$$

so wollen wir unter

$$n^{(\bar{h})} \text{ bzw. } n^{(\underline{h})} \tag{8}$$

die Teiler von n verstehen, die genau aus dem Produkt aller $p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ mit $\alpha_\varkappa \geqq h$ bzw. $\alpha_\varkappa < h$ bestehen. Es ist dann

$$n = n^{(\bar{h})} \cdot n^{(\underline{h})} = \prod_{\substack{\varkappa \leqq k \\ \alpha_\varkappa \geqq h}} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \cdot \prod_{\substack{\varkappa \leqq k \\ \alpha_\varkappa < h}} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}; \quad (n^{(\bar{h})}, n^{(\underline{h})}) = 1. \tag{9}$$

Ist nun $f(n)$ eine (eindeutige) distributive zahlentheoretische Funktion (d. h. $f(ab) = f(a)\,f(b)$ für $(a, b) = 1$), so haben wir

$$f(n) = f(n^{(\bar{h})}) \cdot f(n^{(\underline{h})}). \tag{10}$$

Wir fragen nach der Anzahl $A(x)$ der $n \leqq x$, für welche bei vorgegebener Konstante c

$$f(n) = c \tag{11}$$

gelten soll. Wir betrachten deshalb die Zuordnung

$$n^{(\bar{h})} \to n. \tag{12}$$

Sei $n^{(\bar{h})}$ gegeben. Dann erhalten wir aus (10) und (11)

$$f(n^{(\underline{h})}) = \frac{c}{f(n^{(\bar{h})})} = c_{n^{(\bar{h})}} = c^*. \tag{13}$$

Ist die Zuordnung (12) höchstens $(M-1)$-deutig, wobei $M > 1$ eine feste natürliche Zahl sein soll, so folgt nach dem Hilfssatz aus § 1

$$A(x) = O(x^{1/h}). \tag{14}$$

Ist die Zuordnung (12) für $n \leqq x$ maximal $g(x)$-deutig, so gilt

$$A(x) = O(g(x) \cdot x^{1/h}). \tag{15}$$

Ist insbesondere die Zuordnung (12) mindestens einmal M-deutig, so gibt es mindestens ein M-Tupel verschiedener Zahlen $n_1^{(\underline{h})}, \ldots, n_M^{(\underline{h})}$, die

$$f(n_1^{(\underline{h})}) = f(n_2^{(\underline{h})}) = \cdots = f(n_M^{(\underline{h})}) \tag{16}$$

erfüllen. Diese Bedingung ist gleichwertig mit

$$f(n_i^{(\underline{h})}) = f(n_j^{(\underline{h})}); \qquad 1 \leqq i < j \leqq M. \tag{17}$$

Wir haben also $\binom{M}{2}$ Gleichungen vom Typ (17) vorliegen. Es seien jetzt $q_1, q_2, \ldots, q_s$ irgendwelche vorgegebene verschiedene Primzahlen. Wir setzen

$$m = (q_1 q_2 \cdots q_s)^{h-1}. \tag{18}$$

Es sei ferner

$$(m, n_\mu^{(\underline{h})}) = t_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, M). \tag{19}$$

Die Zahlen t_μ können höchstens h^s verschiedene Werte annehmen. Setzen wir nun

$$M > h^s(H-1) \tag{20}$$

voraus, wobei $H > 1$ eine natürliche Zahl bedeuten soll, so gibt es mindestens H Zahlen $n_1^{(k)}, \ldots, n_H^{(k)}$ derart, daß

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_H = t \tag{21}$$

gilt, d. h.

$$f\left(\frac{n_1^{(k)}}{t}\right) = \cdots = f\left(\frac{n_H^{(k)}}{t}\right). \tag{22}$$

Dabei sind $\frac{n_1^{(k)}}{t}, \ldots, \frac{n_H^{(k)}}{t}$ natürliche, zu m teilerfremde Zahlen. Wir fassen das Ergebnis dieses Paragraphen in dem folgenden Satz zusammen, wobei wir die Bezeichnungen noch etwas vereinfachen.

Satz 1. *Ist $f(n)$ eine distributive zahlentheoretische Funktion und gilt für die Anzahl $A(x)$ der $n \leqq x$, die $f(n) = c$ mit vorgegebenem c erfüllen: $A(x) \neq O(x^{1/h})$, so gibt es bei beliebig vorgegebenen natürlichen Zahlen H und K mindestens H natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_H$, die nur Primteiler $> K$, jeden höchstens in der $(h-1)$-ten Potenz, besitzen und die $f(n_1) = \cdots = f(n_H)$ erfüllen. Wir können ferner annehmen, daß $n_1, \ldots, n_H$ nicht alle zugleich ein und denselben Primteiler in der gleichen Potenz enthalten.*

§ 3

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

Satz 2. *Die zahlentheoretische Funktion $\Phi(n)$ erfülle die Bedingungen:*

a) Aus $(n_1, n_2) = 1$ folgt $\Phi(n_1 n_2) = \Phi(n_1)\,\Phi(n_2)$.

b) $\Phi(n)$ sei eine natürliche Zahl; es existiere eine feste natürliche Zahl $a > 1$ so, daß $a \mid \Phi(p)$ für alle Primzahlen p gilt, die eine gegebene Konstante K übertreffen.

c) Es sei $f(p) = \frac{\Phi(p)}{p^r}$ für alle Primzahlen $p > K$, wobei r eine natürliche Zahl bedeuten soll, die im allgemeinen aber noch von p abhängen kann. Es gelte $f(p) < a$, wobei a die unter b) angegebene Bedeutung hat.

Bezeichnen wir mit $A(x)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $n \leqq x$, die $f(n) = c$ mit festem c genügen, so ist $A(x) = O(\sqrt{x})$.

Beweis. Wäre $A(x) \neq O(\sqrt{x})$, so gäbe es nach Satz 1 mindestens H natürliche, *quadratfreie* Zahlen $n_1, \ldots, n_H$, die nur Primteiler $> K$ besitzen und

$$f(n_1) = \cdots = f(n_H) \tag{23}$$

erfüllen. Sei nun

$$n_1 = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa; \quad n_2 = \prod_{\lambda=1}^{l} q_\lambda, \tag{24}$$

wobei $p_\varkappa$, q_λ Primzahlen bedeuten. Wir betrachten

$$\prod_1^k f(p_\varkappa) = \prod_1^l f(q_\lambda); \quad \text{d. h.} \quad \prod_1^k \frac{\Phi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^{r_\varkappa}} = \prod_1^l \frac{\Phi(q_\lambda)}{q_\lambda^{r_\lambda}} \tag{25}$$

und können alle auftretenden Primzahlen als paarweise teilerfremd ansehen.

Nach der Voraussetzung *b)* ist

$$a^k \,\Big|\, \prod_1^k \Phi(p_\varkappa)\,. \tag{26}$$

Nach Voraussetzung *c)* ist

$$0 < \prod_1^k \frac{\Phi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^{r\gamma_\varkappa}} < a^k. \tag{27}$$

Aus (25) bis (27) ergibt sich der Widerspruch

$$\prod_{\varkappa=1}^k \Phi(p_\varkappa) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} a^k \prod_{\varkappa=1}^k p_\varkappa^{\gamma_\varkappa}\right), \tag{28}$$

da wir o. B. d. A. auch $p_\varkappa > K > a$ annehmen dürfen.
Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerkungen zu Satz 2. Die Funktionen

$$f(n) = \frac{\sigma_r(n)}{n^r} = \frac{1}{n^r} \sum_{d/n} d^r \tag{29}$$

und

$$f(n) = \frac{\varphi_r(n)}{n^r} = \prod_{\varkappa=1}^k \frac{p_\varkappa^r - 1}{p_\varkappa^r} \tag{30}$$

erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2. Für die letzte Funktion ist aber das Ergebnis zu schwach. Denn wir sehen leicht, daß für sie gilt:

$$f(n_1) = f(n_2) \tag{31}$$

ist dann und nur dann erfüllt, wenn n_1 und n_2 genau die gleichen Primteiler besitzen. Mit festem c hat also

$$f(n) = \frac{\varphi_r(n)}{n^r} = c \tag{32}$$

als Lösungen entweder gar keine Zahl n oder die Zahlen

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \tag{33}$$

mit *festen* Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$. Sei noch o. B. d. A.

$$p_1 < \cdots < p_k \tag{34}$$

angenommen. Für die Anzahl $A(x)$ der $n \leq x$, die (32) genügen, ergibt sich eine Abschätzung aus

$$p_1^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} \leq n \leq x; \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \leq \frac{\log x}{\log p_1}. \tag{35}$$

Das liefert

$$A(x) \leq \left(\frac{\log x}{\log p_1}\right)^k = O((\log x)^k). \tag{36}$$

§ 4

Wir setzen die in Satz 2 auftretende Konstante

$$c = \frac{Z}{N}, \tag{37}$$

wobei $(Z, N) = 1$ gelten soll; jetzt soll c auch von n abhängen können. Es sei weiterhin vorausgesetzt

$$(38)\qquad 0 < f(p^\alpha) = \frac{\Phi(p^\alpha)}{p^{\alpha r}} \leqq \frac{p^r}{p^r - 1}$$

für jede Primzahlpotenz p^α; r soll wieder eine natürliche Zahl sein, die aber im allgemeinen noch von p^α abhängen darf. Dann wird

$$(39)\qquad 0 < f(n) \leqq \prod_{p|n} \frac{p^r}{p^r - 1} \leqq \prod_{p|n} \frac{p}{p-1} = \frac{n}{\varphi(n)}.$$

Wenn immer $r > 1$ gilt, folgt aus (39)

$$(40)\qquad f(n) < \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wir nehmen nun an, in (37) sei immer

$$(41)\qquad N \leqq g(n)$$

mit einer passend zu wählenden, monoton nicht abnehmenden Funktion $g(n)$. Wir definieren jetzt die Menge $\mathfrak{N}(g(n))$ als die Menge der natürlichen Zahlen $n \leqq x$, welche

$$(42)\qquad f(n) = \frac{Z}{N}; \quad (Z, N) = 1; \; N \leqq g(n)$$

erfüllen. $A(g(x))$ sei die Anzahl der $n \in \mathfrak{N}(g(n))$.

Da bekanntlich

$$(43)\qquad \varliminf_{n \to \infty} \frac{\varphi(n) \log\log n}{n} = e^{-C} \; (C = \text{Eulersche Konstante})$$

ist, existiert eine Konstante C_1 so, daß

$$(44)\qquad \frac{n}{\varphi(n)} < C_1 \log\log n$$

gilt. Aus (39) erhalten wir somit

$$(45)\qquad \frac{1}{g(x)} \leqq f(n) < C_1 \log\log \prod_{p|n} p \leqq C_1 \log\log n \leqq C_1 \log\log x.$$

Die Anzahl der Möglichkeiten für $\frac{Z}{N}$ wird nach oben begrenzt durch

$$(46)\qquad C_1 (g(x))^2 \log\log x.$$

Nach Satz 2 erhalten wir

$$(47)\qquad A(g(x)) < C_1 x^{1/2} (g(x))^2 \log\log x.$$

Ist speziell

$$(48)\qquad g(x) \leqq \frac{x^{1/4}}{h(x)\,(\log\log x)^{1/2}},$$

wobei $h(x)$ irgendeine monoton mit x gegen ∞ strebende Funktion sein soll, so folgt

$$(49)\qquad \frac{A(g(x))}{x} < \frac{C_1}{(h(x))^2} = o(1).$$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen in

Satz 3. *Die zahlentheoretische Funktion $\Phi(n)$ erfülle die Bedingungen a), b) und c) von Satz 2. Ferner sei noch* (38) *erfüllt. Es sei $A(g(x))$ die Anzahl*

der natürlichen Zahlen $n \leq x$, die (42) genügen. Dann gilt (47). Ist auch (48) erfüllt, so folgt die Gültigkeit von (49). Ist insbesondere $g(n) = N_0$ (fest), so ist

$$A(N_0) < C_1 N_0^2 x^{1/2} \log\log x = O(x^{1/2} \log\log x).$$

§ 5

Wir bemerken, daß

$$f(n) = \frac{\sigma_r(n)}{n^r} \tag{50}$$

und

$$f(n) = \frac{\varphi_r(n)}{n^r} \tag{51}$$

für $r = 1, 2, 3, \ldots$ die Bedingung (38) erfüllen. Für die erste Funktion bekommen wir für $r > 1$

$$1 + \frac{1}{g(x)} \leq f(n) = \frac{Z}{N} < \zeta(r) < 1 + \frac{1}{2^{r-2}} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}. \tag{52}$$

Daraus folgt

$$r < 2 + \frac{\log g(x)}{\log 2} < C_2 \log g(x). \tag{53}$$

Für

$$f(n) = \frac{\varphi_r(n)}{n^r} = \prod_{\varkappa=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_\varkappa^r}\right) \tag{54}$$

gewinnen wir die gleiche Abschätzung für r aus

$$1 - \frac{1}{g(x)} \geq \frac{\varphi_r(n)}{n^r} > \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) > 1 - \frac{1}{2^{r-2}} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}. \tag{55}$$

Damit gewinnen wir den

Satz 4. *Es sei $g(x)$ eine monoton nicht abnehmende Funktion und $A(g(x))$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $n \leq x$, die für irgendeine natürliche Zahl r die Bedingung $\frac{\sigma_r(n)}{n^r} = \frac{Z}{N}$; $(Z, N) = 1$; $N \leq g(n)$ erfüllen. Dann ist $A(g(x)) = O(x^{1/2}(g(x))^2 \log g(x) \log\log x)$. Dasselbe ist auch erfüllt, wenn wir statt $\sigma_r(n)$ die Funktion $\varphi_r(n)$ betrachten. Ist $g(n) = N_0$ (fest), so ist*

$$A(N_0) = O(x^{1/2} \log\log x).$$

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung und Verschärfung von [1], Satz 3 dar. Nehmen wir noch an, daß

$$g(x) \leq \frac{x^{1/4}}{h(x)\,(\log x)^{1/2}\,(\log\log x)^{1/2}} \tag{56}$$

gilt, wobei $h(x)$ die gleiche Bedeutung wie in (48) haben soll, so liefert Satz 4

$$A(g(x)) = O\left(\frac{x}{(h(x))^2}\right) = o(x). \tag{57}$$

Dieses Resultat können wir so aussprechen:

Satz 5. *n, r, N, Z bedeuten natürliche Zahlen. Die Dichte der Menge aller n, die, für irgendein r, der Bedingung*

$$\frac{\sigma_r(n)}{n^r} = \frac{Z}{N} \text{ mit } (Z, N) = 1;\ N \leq \left(\frac{n^{1/2}}{h(n) \log n \log\log n}\right)^{1/2}$$

genügen, ist Null. $h(x)$ bedeutet irgendeine monoton mit x gegen ∞ strebende Funktion. Der Satz bleibt richtig, wenn wir $\sigma_r(n)$ durch $\varphi_r(n)$ ersetzen.

§ 6

Wir wollen unsere Methoden auf die Menge der vollkommenen Zahlen anwenden. Das Ziel ist

Satz 6. *Es sei $A(x)$ die Anzahl aller vollkommenen Zahlen $\leqq x$. Dann gilt* $A(x) = O\left(x^{1/4}\frac{\log x}{\log\log x}\right)$.

Beweis. Wie früher gezeigt wurde [2], gilt für die Anzahl $A_g(x)$ aller geraden vollkommenen Zahlen $\leqq x$ die Abschätzung

$$A_g(x) = O\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right). \tag{58}$$

Wir können uns deshalb im weiteren Beweisgang auf die ungeraden vollkommenen Zahlen beschränken, die die folgende Gestalt besitzen:

$$n = p^{\alpha} q_1^{2\beta_1} \ldots q_r^{2\beta_r}\,;\quad p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4). \tag{59}$$

Zunächst betrachten wir diejenigen n, bei welchen $\alpha > 1$ ist. Für diese ist

$$n^{(4)} = \Pi\, q_\varrho^2, \tag{60}$$

wobei das Produkt über gewisse ϱ (evtl. über keins) erstreckt wird. Wäre die Anzahl dieser $n \leqq x$ nicht gleich $O(x^{1/4})$, so gäbe es nach Satz 1 zwei natürliche Zahlen

$$n_1 = p_1^2 \ldots p_i^2;\quad n_2 = q_1^2 \ldots q_j^2;\quad (n_1, n_2) = 1 \tag{61}$$

derart, daß

$$\begin{aligned}(1 + p_1 + p_1^2) \cdots (1 + p_i + p_i^2)\, q_1^2 \cdots q_j^2 \\ = (1 + q_1 + q_1^2) \cdots (1 + q_j + q_j^2)\, p_1^2 \cdots p_i^2\end{aligned} \tag{62}$$

wäre. Dann wäre aber

$$1 < \frac{1 + p_1 + p_1^2}{p_1^2} \cdots \frac{1 + p_i + p_i^2}{p_i^2} = \lambda < 2 \tag{63}$$

und λ eine ganze Zahl, was offenbar einen Widerspruch darstellt. Wir können uns von nun an auf solche n beschränken, bei welchen in der Gestalt (59) noch $\alpha = 1$ erfüllt ist. Für diese ist

$$n^{(4)} = p\,\Pi\, q_\varrho^2 \text{ mit } p \equiv 1 \pmod 4,\quad f(n^{(4)}) = \frac{\sigma(n^{(4)})}{n^{(4)}} = \frac{p+1}{p}\,\Pi\,\frac{1 + q_\varrho + q_\varrho^2}{q_\varrho^2}, \tag{64}$$

wobei wieder wie in (60) das Produkt über gewisse ϱ erstreckt wird. Nach einem Ergebnis von R. STEUERWALD [3] gilt

$$\frac{p+1}{p}\,\Pi\,\frac{1 + q_\varrho + q_\varrho^2}{q_\varrho^2} < 2. \tag{65}$$

Wir betrachten jetzt zwei verschiedene $n_1^{(4)}$, $n_2^{(4)}$, die

$$\frac{\sigma(n_1^{(4)})}{n_1^{(4)}} = \frac{\sigma(n_2^{(4)})}{n_2^{(4)}} \tag{66}$$

erfüllen. Sei also

(67) $$n_i^{(4)} = p_i q_{i1}^2 \cdots q_{is_i}^2;\quad p_i \equiv 1 \pmod 4; \qquad (i = 1, 2)$$

und

(68) $$\begin{aligned} &\frac{p_1+1}{2}(1+q_{11}+q_{11}^2)\cdots(1+q_{1s_1}+q_{1s_1}^2)\,p_2 q_{21}^2\cdots q_{2s_2}^2 \\ &= \frac{p_2+1}{2}(1+q_{21}+q_{21}^2)\cdots(1+q_{2s_2}+q_{2s_2}^2)\,p_1 q_{11}^2\cdots q_{1s_1}^2. \end{aligned}$$

Wir dürfen o. B. d. A. in (68) annehmen, daß

(69) $$(q_{11}\cdots q_{1s_1},\, q_{21}\cdots q_{2s_2}) = 1$$

gilt, da wir uns sonst in (68) die entsprechenden Faktoren auf beiden Seiten weggekürzt denken können. Wäre

(70) $$p_1 = p_2,$$

so folgte aus (65) und (68) der Widerspruch

(71) $$q_{11}^2\cdots q_{1s_1}^2 \mid (1+q_{11}+q_{11}^2)\cdots(1+q_{1s_1}+q_{1s_1}^2) < 2\, q_{11}^2\cdots q_{1s_1}^2.$$

Wir dürfen also

(72) $$p_1 < p_2$$

annehmen. Es sei jetzt vorausgesetzt

(73) $$(p_1, q_{21}\cdots q_{2s_2}) = (p_2, q_{11}\cdots q_{1s_1}) = 1.$$

Dann folgte aus (68), (69) und (72)

(74) $$p_1 q_{11}^2\cdots q_{1s_1}^2 \,\Big|\, \frac{p_1+1}{2}(1+q_{11}+q_{11}^2)\ldots(1+q_{1s_1}+q_{1s_1}^2).$$

Das ist nach (65) ein Widerspruch. Also muß mindestens eine der beiden Bedingungen

(75) $$p_1^2 \mid n_2^{(4)};\quad p_2^2 \mid n_1^{(4)}$$

erfüllt sein. Aus (67), (68) und (72) können wir unter Beachtung, daß $1 + q + q^2$ außer evtl. 3 nur Primteiler $\equiv 1 \pmod 3$ besitzt, schließen, daß

(76) $$p_2 \equiv 1 \pmod 3$$

sein muß. Wir nehmen nun an, die (12) entsprechende Zuordnung

(77) $$n^{(\bar{4})} \to n$$

sei für alle $n \leq x$ maximal $g(x)$-deutig. Dann besitzt die (13) entsprechende Gleichung

(78) $$\frac{1}{2}\,\frac{\sigma(n_i^{(4)})}{n_i^{(4)}} = \frac{p_i+1}{2}(1+q_{i1}+q_{i1}^2)\ldots(1+q_{is_i}+q_{is_i}^2) = c^*$$

für von i unabhängiges c^* mindestens einmal $g(x)$ Lösungen $n_i^{(4)}$ $(i = 1, \ldots, g(x))$, die zu einem bestimmten $n^{(\bar{4})} = n_0^{(\bar{4})}$ gehören. Wir können nun annehmen:

(79) $$\begin{aligned} &p_1 < p_2 < \cdots < p_{g(x)} && \text{[nach (72)];} \\ &p_2 \equiv p_3 \equiv \cdots \equiv p_{g(x)} \equiv 1 \pmod{12} && \text{[nach (67) und (76)].} \end{aligned}$$

Wegen (75) müssen von den $g(x)\,(g(x)-1)$ Bedingungen

$$p_i^2 \mid n_j^{(4)} \qquad (i, j = 1, \ldots, g(x);\ i \neq j) \tag{80}$$

mindestens $\binom{g(x)}{2}$ erfüllt sein. Also muß für mindestens einen festen Index k nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip gelten, daß (evtl. mit entsprechender Umnumerierung)

$$p_1^2\, p_2^2 \cdots p_{k-1}^2 \mid n_k^{(4)}; \quad k-1 \geqq \frac{g(x)-1}{2} \tag{81}$$

erfüllt ist. Wir beachten, daß wir [vgl. (78)]

$$2 = \frac{\sigma(n_i)}{n_i} = \frac{\sigma(n_0^{(\bar 4)})}{n_0^{(\bar 4)}} \cdot \frac{\sigma(n_i^{(4)})}{n_i^{(4)}}; \quad \frac{1}{2}\,\sigma(n_i^{(4)}) \,\Big|\, n_i. \quad (i = 1, \ldots, g(x)) \tag{82}$$

annehmen dürfen. Insbesondere folgt nach (79) und (81) für $i = k$

$$3^{\left[\frac{g(x)-3}{2}\right]} \mid 3^{k-2} \mid n_k. \tag{83}$$

Ist aber $\left[\frac{g(x)-3}{2}\right] > 2$, so bedeutet das auch

$$3^{\left[\frac{g(x)-3}{2}\right]} \mid n_0^{(\bar 4)} \mid n_i \leqq x \qquad (i = 1, \ldots, g(x)). \tag{84}$$

Aus (81) bekommen wir $p_1 \cdots p_{k-1} \leqq x^{1/2}$ und

$$g(x) = O\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right). \tag{85}$$

Nach (15) erhalten wir damit

$$A(x) = O\left(x^{1/4}\,\frac{\log x}{\log\log x}\right) \tag{86}$$

und den Beweis von Satz 6. Aus (84) können wir noch das folgende Resultat entnehmen:

Satz 7. *Es sei G eine beliebig große, fest vorgegebene natürliche Zahl. Dann gilt für die Anzahl $A_G(x)$ aller nicht durch 3^G teilbaren vollkommenen Zahlen $\leqq x$: $A_G(x) = O(x^{1/4})$.*

Literatur

[1] KANOLD, H.-J.: Über einen Satz von L. E. DICKSON II. Math. Ann. **132**, 246—255 (1956). — [2] KANOLD, H.-J.: Eine Bemerkung über die Menge der vollkommenen Zahlen. Math. Ann. **131**, 390—392 (1956). — [3] STEUERWALD, R.: Verschärfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., math.-naturwiss. Kl. **1937**, 69—72.

(Eingegangen am 23. Juli 1956)

Nöbeling, G. und Bauer, H.
Math. Annalen, Bd. 132, S. 451 (1957)

Ergänzung zu unserer Arbeit „Über die Erweiterungen topologischer Räume“

Math. Ann. Bd. 130, S. 20 (1955).

Von

Georg Nöbeling und Heinz Bauer in Erlangen.

Die genannte Arbeit beruht auf einem zentralen Satz von I. Gelfand, wonach jede F-Algebra isometrisch-isomorph ist zur F-Algebra aller stetigen, reellen Funktionen auf einem geeigneten bikompakten Hausdorff-Raum (unser Satz 1). In der Definition der F-Algebra $\mathfrak{A}$ im § 1 unserer Arbeit muß noch folgende Forderung hinzugefügt werden:

(I) *Für jedes Element* $x \in \mathfrak{A}$ *besitzt* $x^2 + e$ *ein Inverses in* $\mathfrak{A}$.

Hierauf machte uns Herr A. J. Geurts freundlicherweise aufmerksam. Unser Versehen kam dadurch zustande, daß uns die Arbeit von Herrn I. Gelfand nicht zugänglich war und wir daher den genannten Satz rekonstruieren mußten.

Die Bedingung (I) ist in allen Fällen erfüllt, in denen wir vom Satz 1 Gebrauch machen. Der weitere Inhalt der Arbeit bleibt daher von dieser Ergänzung der Definition der F-Algebren unbeeinflußt.

Herrn H. Nakano verdanken wir den Hinweis, daß die Existenz der Standarderweiterungen $\beta_{\mathfrak{E}} E$ für den Spezialfall der Erweiterungsklassen $\mathfrak{E}$ eindeutiger Fortsetzbarkeit (vgl. § 3 unserer Arbeit) bereits im § 24 seines Buches "Topology and linear topological spaces" (Tokyo 1951) bewiesen wurde.

(Eingegangen am 29. Dezember 1956).